Diagrammi asintotici di Bode: esercizi

- Tracciare i diagrammi asintotici di Bode della seguente funzione $G(s)$:

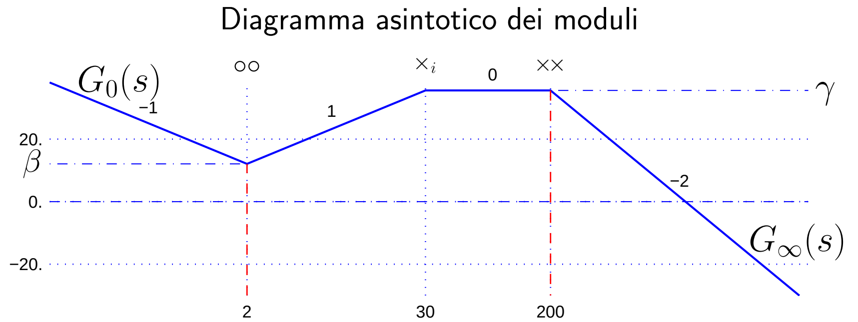
$$G(s) = \frac{60\,(s^2 + 0.8\,s + 4)}{s(s-30)(1+\frac{s}{200})^2}.$$

Pendenza iniziale: -20 db/dec. Pulsazioni critiche: $\omega = 2$ (due zeri complessi coniugati stabili), $\omega = 30$ (un polo instabile) e $\omega = 200$ (due poli stabili).

Funzione $G_0(s)$:

$$G_0(s) = \frac{60(4)}{s(-30)(1)^2} = -\frac{8}{s}$$

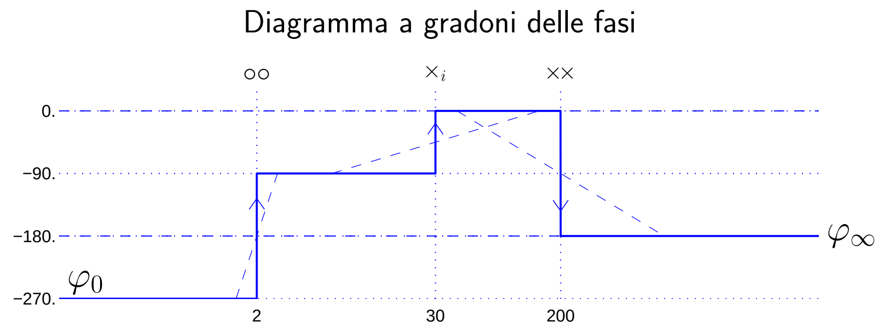
Fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi$.



Funzione $G_\infty(s)$:

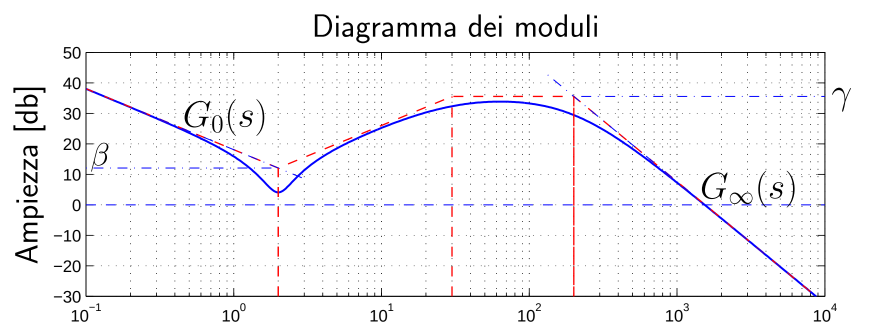
$$G_\infty(s) = \frac{60(s^2)}{s(s)(\frac{s}{200})^2} = \frac{2400000}{s^2}$$

Fase finale $\varphi_\infty = -\pi$.



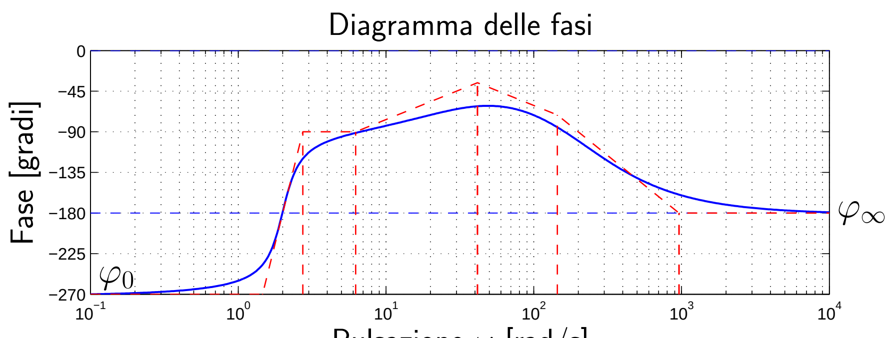
Guadagno β:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=2}$$
$$= 4 = 12 \text{ db}.$$



Guadagno γ:

$$\gamma = |G_\infty(s)|_{s=200}$$
$$= 60 = 35.56 \text{ db}.$$

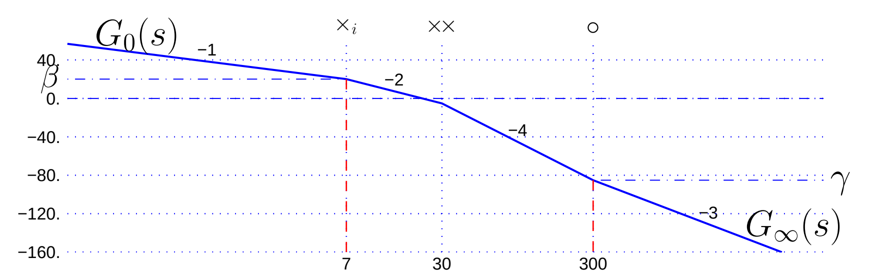


- Tracciare i diagrammi asintotici di Bode della seguente funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1470\,(s+300)}{s\,(s-7)(s^2+15\,s+900)}.$$

Pendenza iniziale: -20 db/dec. Pulsazioni critiche: $\omega = 7$ (polo instabile), $\omega = 30$ (due poli complessi coniugati stabili) e $\omega = 300$ (uno zero stabile).

Diagramma asintotico dei moduli

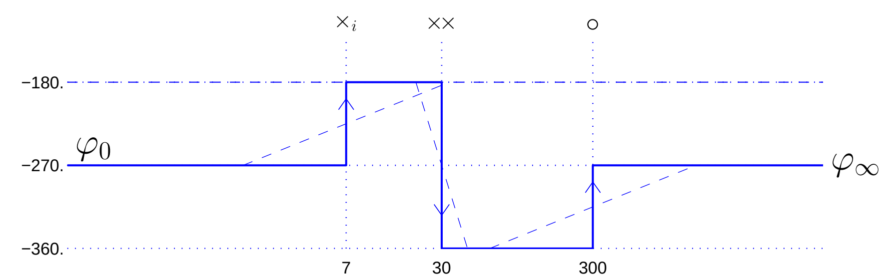


Funzione $G_0(s)$:

$$G_0(s) = \frac{1470\,(300)}{s\,(-7)(900)} = -\frac{70}{s}$$

Fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi$.

Diagramma a gradoni delle fasi

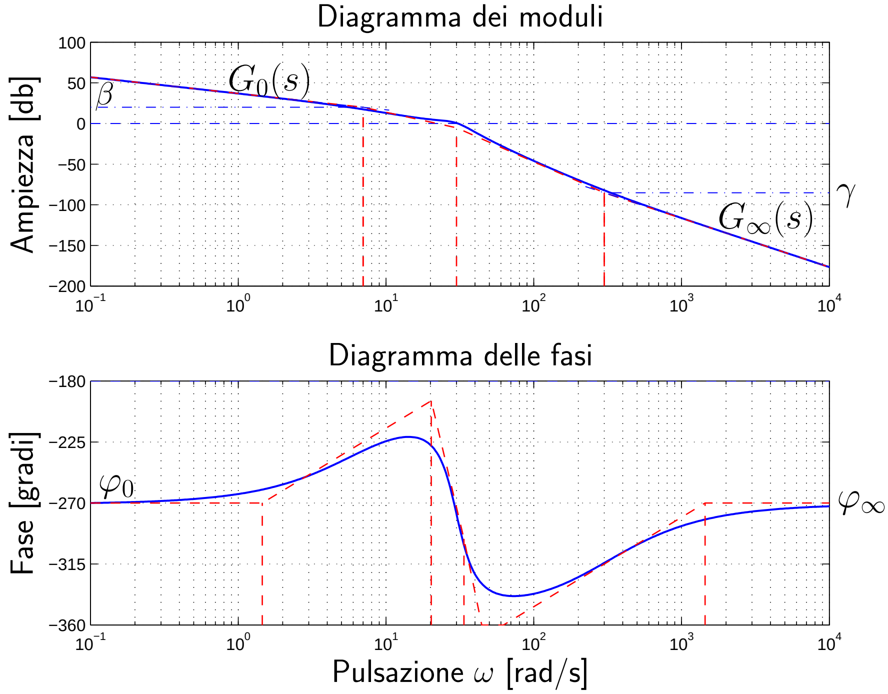


Funzione $G_\infty(s)$:

$$G_\infty(s) = \frac{1470\,(s)}{s\,(s)(s^2)} = \frac{1470}{s^3}$$

Fase finale $\varphi_\infty = -\frac{3}{2}\pi$.

Diagramma dei moduli



Guadagno β:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=7}$$
$$= 10 = 20 \text{ db}.$$

Guadagno γ:

$$\gamma = |G_\infty(s)|_{s=300}$$
$$= \frac{1470}{300^3} = -85.28 \text{ db}.$$

- Tracciare i diagrammi asintotici di Bode della seguente funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{50\,(5-s)^2}{s\,(s^2 - 18\,s + 900)(10\,s + 5)}.$$

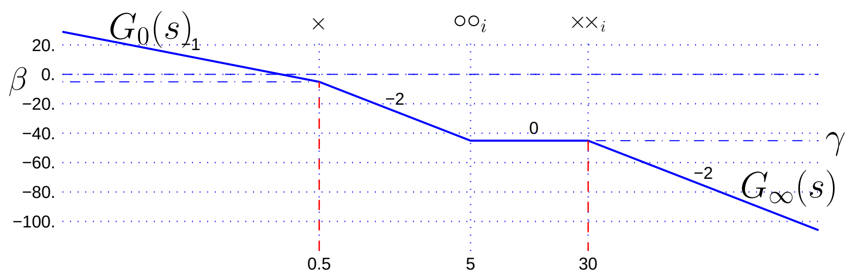
Pendenza iniziale: -20 db/dec. Pulsazioni critiche: $\omega = 0.5$ (un polo stabile), $\omega = 5$ (due zeri reali instabili) e $\omega = 30$ (due poli complessi coniugati instabili).

Funzione $G_0(s)$:

$$G_0(s) = \frac{50\,(5)^2}{s\,(900)(5)} = \frac{5}{18\,s}$$

Fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$.

Diagramma asintotico dei moduli

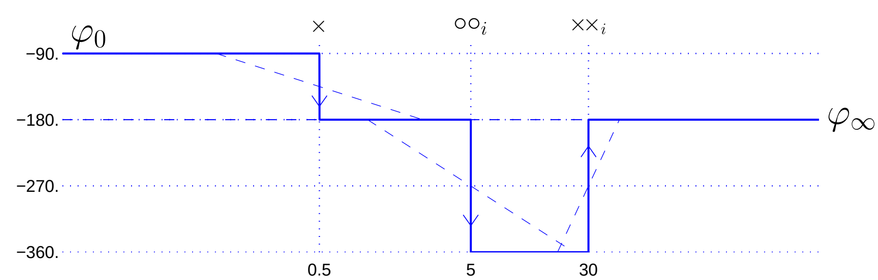


Funzione $G_\infty(s)$:

$$G_\infty(s) = \frac{50\,(-s)^2}{s\,(s^2)(10\,s)} = \frac{5}{s^2}$$

Fase finale $\varphi_\infty = -\pi$.

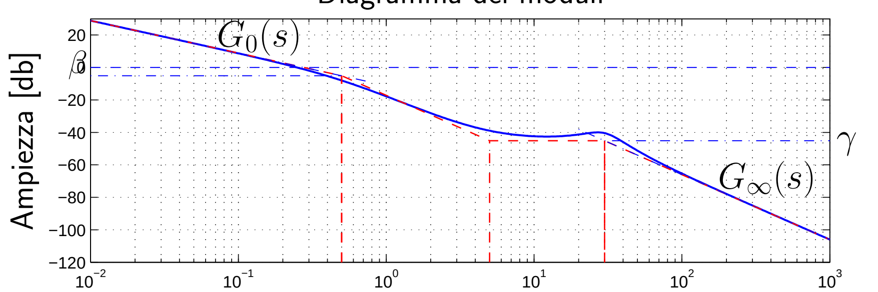
Diagramma a gradoni delle fasi



Guadagno β:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.5} = \frac{5}{9} = -5.1 \text{ db}.$$

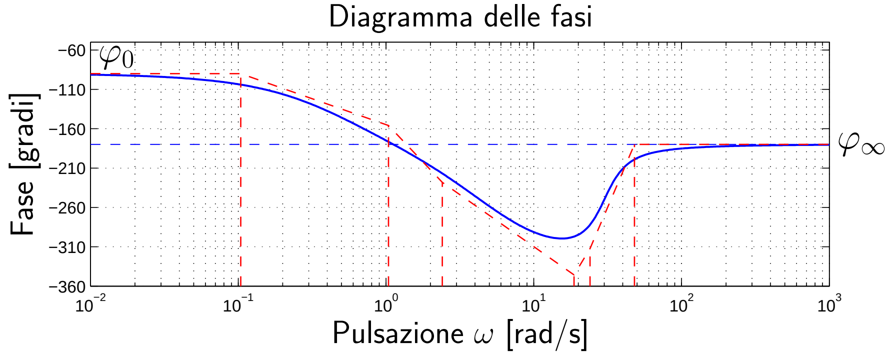
Diagramma dei moduli



Guadagno γ:

$$\gamma = |G_\infty(s)|_{s=30} = \frac{5}{30^2} = -45.1 \text{ db}.$$

Diagramma delle fasi



- Tracciare i diagrammi asintotici di Bode della seguente funzione $G(s)$:

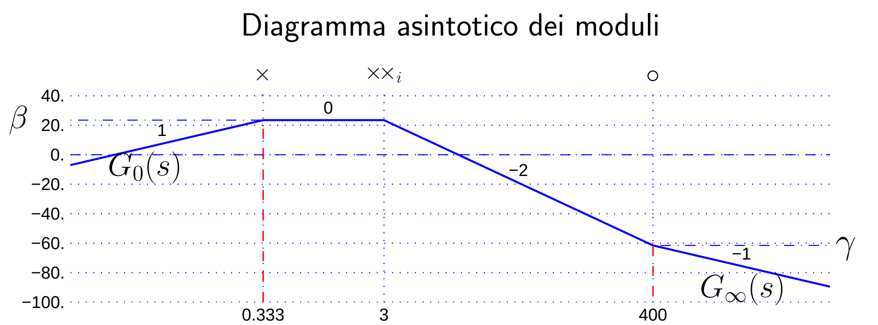
$$G(s) = \frac{s\,(s+400)}{(1+3\,s)(s^2-1.5\,s+9)}.$$

Pendenza iniziale: +20 db/dec. Pulsazioni critiche: $\omega = 0.333$ (un polo stabile), $\omega = 3$ (due poli complessi coniugati instabili) e $\omega = 400$ (uno zero reale stabile).

Funzione $G_0(s)$:

$$G_0(s) = \frac{s\,(400)}{(1)(9)} = \frac{400\,s}{9}$$

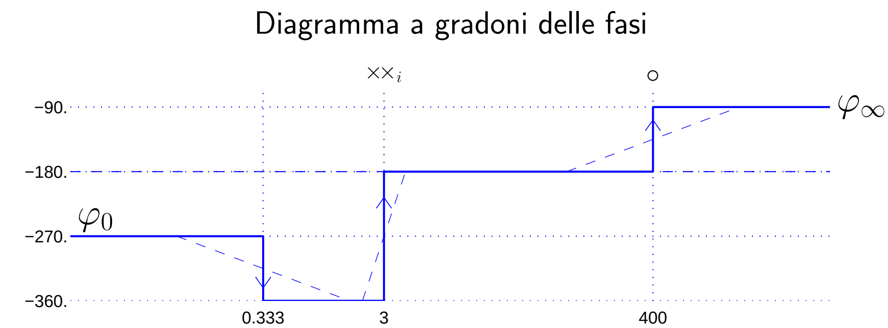
Fase iniziale $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$.



Funzione $G_\infty(s)$:

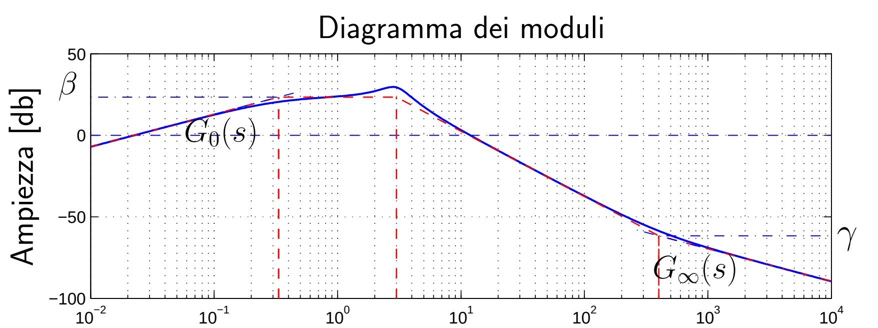
$$G_\infty(s) = \frac{s\,(s)}{(3\,s)(s^2)} = \frac{1}{3\,s}$$

Fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$.



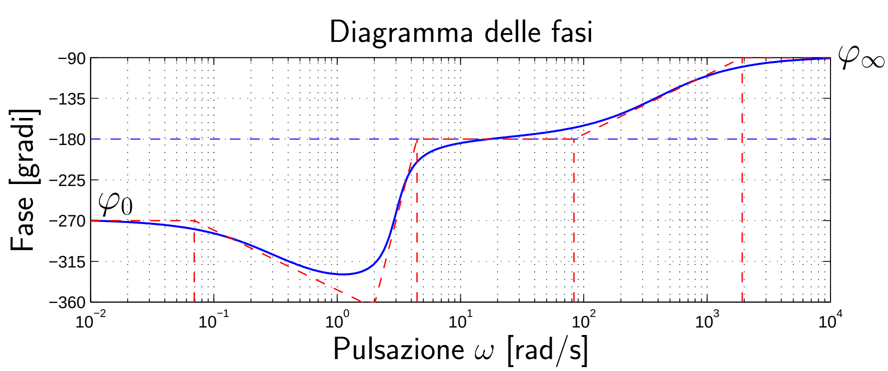
Guadagno β:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.333} = \frac{400}{27} = 23.4 \text{ db}.$$



Guadagno γ:

$$\gamma = |G_\infty(s)|_{s=400} = \frac{1}{1200} = -61.58 \text{ db}.$$



• Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico calcolare l'espressione della funzione $G(s)$.

Guadagno β per $\omega = 1$:

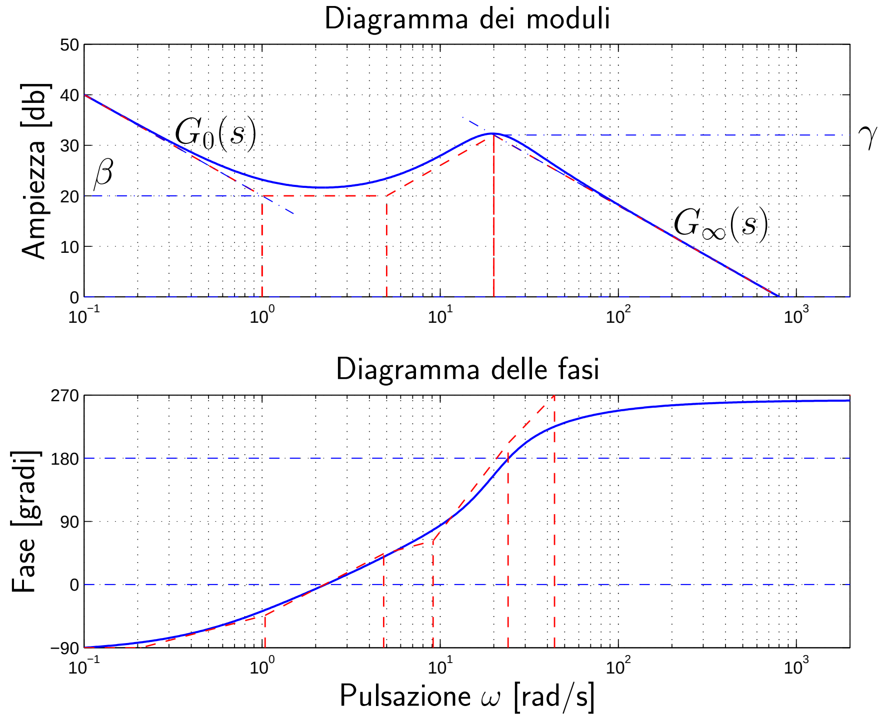
$$\beta = 20 \text{ db} = 10.$$

Pulsazioni critiche ω:

0 $\rightarrow$ un polo
1 $\rightarrow$ uno zero stabile
5 $\rightarrow$ uno zero stabile
20 $\rightarrow$ due poli c.c. instabili

Coefficiente δ:

$$M_{\omega_n} = 1 \quad \rightarrow \quad \delta = 0.5.$$



La pendenza iniziale indica la presenza di un polo nell'origine. Il valore di δ della coppia di poli complessi coniugati è $\delta = 0.5$ perchè dal grafico risulta chiaro che per $\omega_n = 20$ il diagramma reale coincide con quello asintotico.

La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) \simeq \frac{\overbrace{800}^{K}(s+1)(s+5)}{s\,(s^2 - 20\,s + 400)} = \frac{10\,(1+s)(1+0.2\,s)}{s\,(1 - 0.05\,s + 0.025\,s^2)}.$$

Il valore del guadagno K della funzione $G(s)$ si determina imponendo che il guadagno dell'approssimante $G_0(s)$ per $\omega = 1$ sia uguale a β:

$$|G_0(s)|_{s=j} = \left|\frac{5K}{400s}\right|_{s=j} = \frac{K}{80} = 10 \qquad \rightarrow \qquad K = 800.$$

Il valore del guadagno K puó essere determinato anche imponendo che il guadagno dell'approssimante $G_\infty(s)$ per $\omega = 20$ sia uguale a $\gamma = 32$ db:

$$|G_\infty(s)|_{s=j20} = \left|\frac{K}{s}\right|_{s=j20} = \frac{K}{20} = 32 \text{ db} = 40 \qquad \rightarrow \qquad K = 800.$$

• Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico calcolare l'espressione della funzione $G(s)$.

Guadagno β per $\omega = 0.2$:

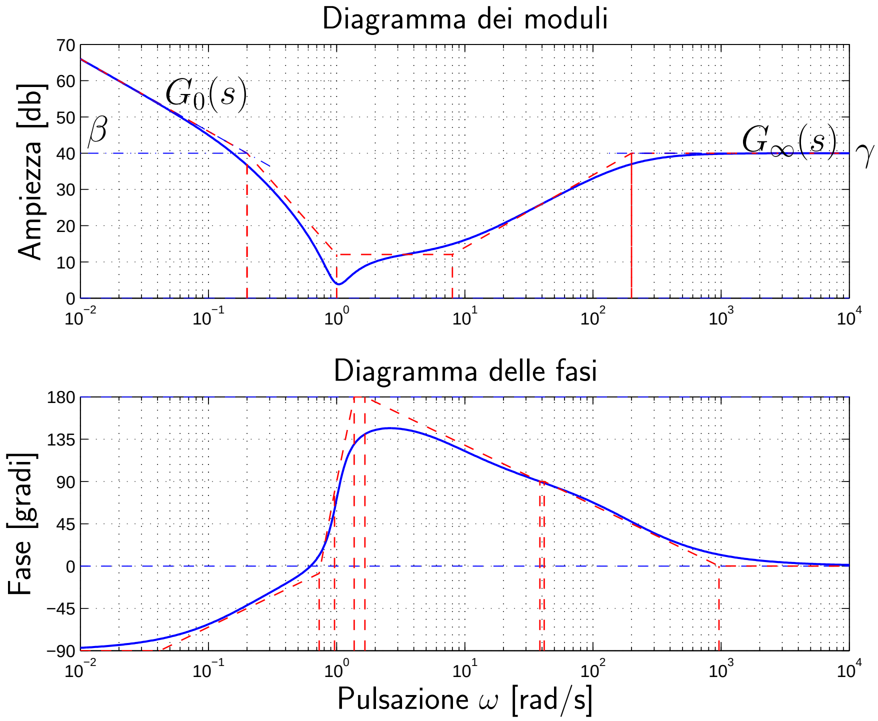
$$\beta = 40 \text{ db} = 100.$$

Pulsazioni critiche ω:

$0 \rightarrow$ un polo
$0.2 \rightarrow$ un polo instabile
$1 \rightarrow$ due zeri c.c stabili
$8 \rightarrow$ uno zero instabile
$200 \rightarrow$ un polo stabile

Coefficiente δ:

$$M_{\omega_n} = 2.5 \quad \rightarrow \quad \delta = 0.2.$$



La pendenza iniziale "-1" indica la presenza di un polo nell'origine. Il valore di $\delta = 0.2$ della coppia di zeri complessi coniugati si determina dal valore $M_{\omega_n} = 8$ db in corrispondenza della pulsazione $\omega_n = 1$.

La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) \simeq \frac{\overbrace{100}^{K}\,(s^2 + 0.4\,s + 1)(s-8)}{s\,(s-0.2)(s+200)} = \frac{20\,(1+0.4\,s+s^2)(1-0.125\,s)}{s\,(1-5\,s)(1+0.005\,s)}.$$

Il valore del guadagno K della funzione $G(s)$ si determina imponendo che il guadagno dell'approssimante $G_0(s)$ per $\omega = 0.2$ sia uguale a β:

$$|G_0(s)|_{s=j0.2} = \left|\frac{8K}{40s}\right|_{s=j0.2} = \frac{8K}{8} = 100 \qquad \rightarrow \qquad K = 100.$$

Il valore del guadagno K puó essere determinato anche imponendo che il guadagno dell'approssimante $G_\infty(s)$ per $\omega = 200$ sia uguale a $\gamma = 40$ db:

$$|G_\infty(s)|_{s=j200} = K = 40 \text{ db} = 100 \qquad \rightarrow \qquad K = 100.$$

• Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode mostrati in figura. Calcolare: 1) l'espressione analitica della funzione $G(s)$; 2) la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale: $x(t) = 5\sin(0.02\,t) + 3\cos(400\,t)$.

Guadagno β per $\omega = 0.2$:

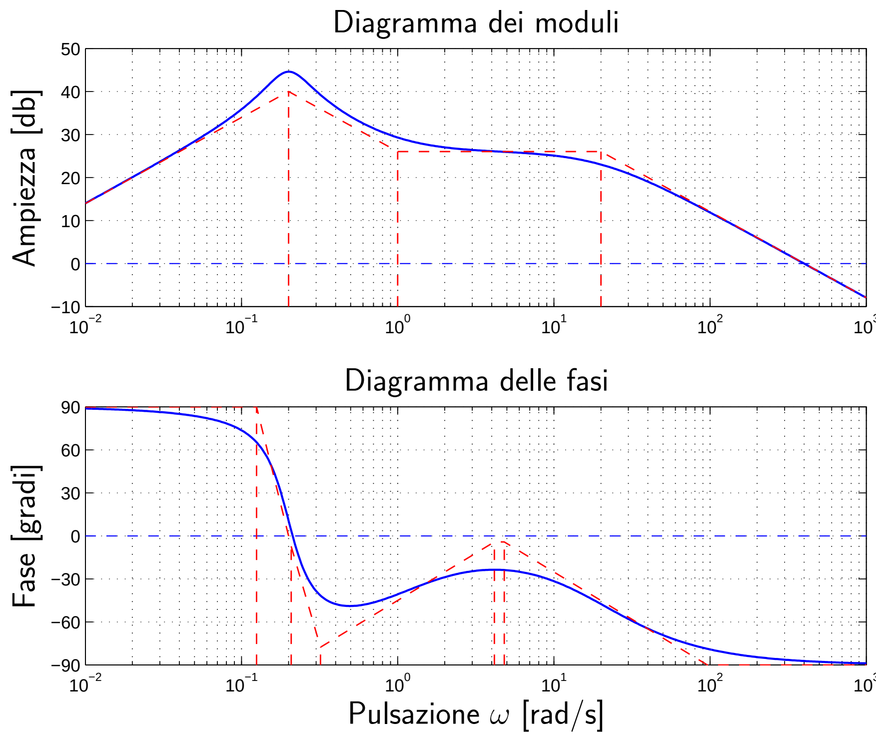
$$\beta = 40 \text{ db} = 100.$$

Pulsazioni critiche ω:

0 $\rightarrow$ uno zero
0.2 $\rightarrow$ due poli c.c. stabili
1 $\rightarrow$ uno zero stabile
20 $\rightarrow$ un polo stabile

Coefficiente δ:

$$M_R = 1.66 \quad \rightarrow \quad \delta = 0.3.$$



1) La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{\overbrace{400}^{K}\; s\,(s+1)}{(s^2+0.12\,s+0.04)(s+20)} = \frac{500\,s\,(1+s)}{(1+3\,s+25\,s^2)(1+0.05\,s)}.$$

Il valore del guadagno K della funzione $G(s)$ si determina imponendo che il guadagno dell'approssimante $G_0(s)$ per $\omega = 0.2$ sia uguale a β:

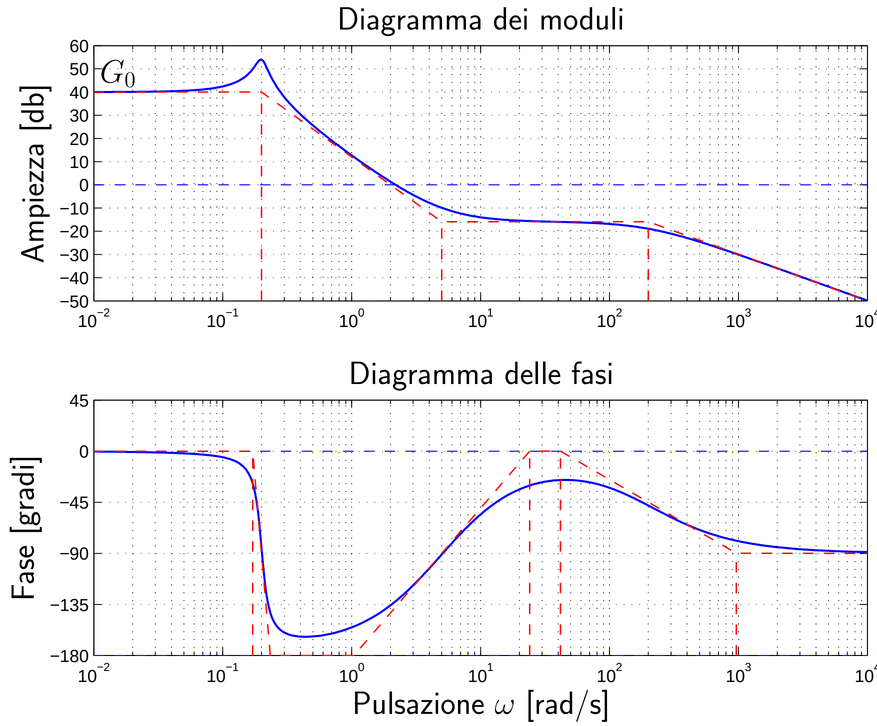
$$|G_0(s)|_{s=j0.2} = \left|\frac{K\,s}{0.8}\right|_{s=j0.2} = \frac{K\,0.2}{0.8} = 100 \qquad \rightarrow \qquad K = 400.$$

2) La risposta a regime del sistema $G(s)$ al segnale dato è la seguente:

$$\begin{aligned} y_\infty(t) &= 5\,|G(0.02j)|\,\sin(0.02\,t + \arg G(0.02j)) \\ &\quad +3\,|G(400j)|\,\cos(400\,t + \arg G(400j)) \\ &= 50.4\,\sin(0.02\,t + 87.62^\circ) + 2.996\,\cos(400\,t - 87.26^\circ). \end{aligned}$$

I valori di $|G(0.02j)|$, $\arg G(0.02j))$, $|G(400j)|$ e $\arg G(400j))$ si leggono direttamente sui diagrammi di Bode dei moduli e delle fasi.

• Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico: 1) ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$; 2) disegnare l'andamento qualitativo della risposta al gradino unitario.



Guadagno statico:

$$G(0) = 100.$$

Pulsazioni critiche ω:

$0.2 \to$ due poli c.c. stabili
$5 \to$ due zeri stabili
$200 \to$ un polo stabile

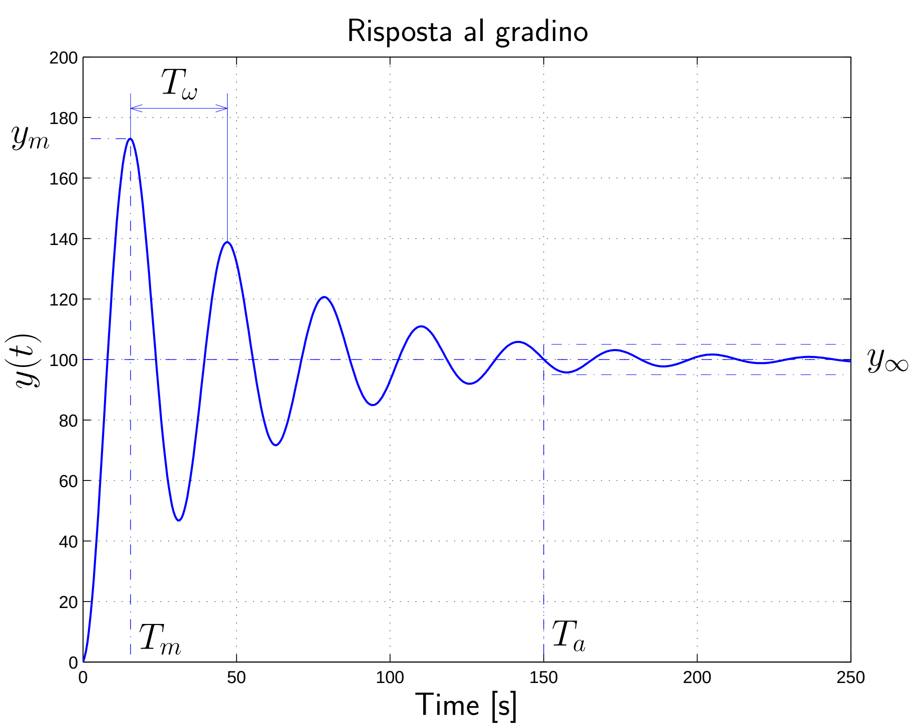
Coefficiente δ:

$$M_R = 5 \quad \to \quad \delta = 0.1.$$

1) L'espressione analitica della funzione $G(s)$ è la seguente:

$$G(s) = \frac{32\,(s+5)^2}{(s^2 + 0.04\,s + 0.04)(s+200)} = \frac{100\,(1+0.2\,s)^2}{(1 + s + 25\,s^2)(1 + 0.005\,s)}.$$

2) L'andamento della risposta al gradino del sistema $G(s)$ è mostrato in figura.



Poli dominanti:

$$p_{1,2} = -0.02 \pm j\,0.199.$$

Valore a regime:

$$y_\infty = G(0) = 100.$$

Tempo di assestamento:

$$T_a = \frac{3}{0.02} = 150 \text{ s.}$$

Periodo T_ω:

$$T_\omega = \frac{2\pi}{0.199} \simeq 31.57 \text{ s.}$$