

Diagrammi di Bode

• La funzione di risposta armonica $F(\omega) = G(j\omega)$ può essere rappresentata graficamente in tre modi diversi: i *Diagrammi di Bode*, i *Diagrammi di Nyquist* e i *Diagrammi di Nichols*.

• I **Diagrammi di Bode** sono due:

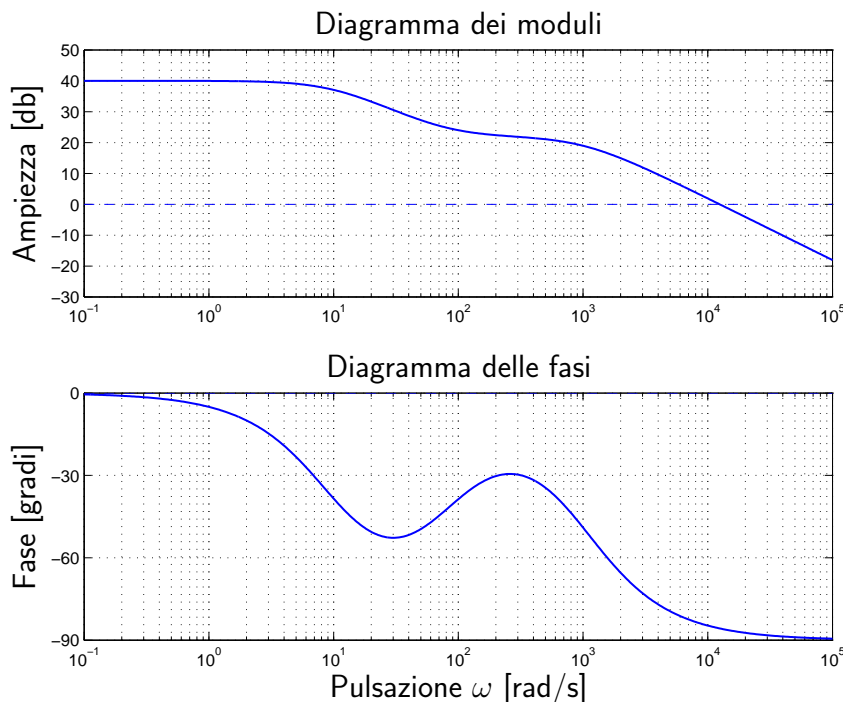
1) Diagramma delle ampiezze: rappresenta il modulo $|G(j\omega)|$ in funzione della pulsazione ω . Sia il modulo $|G(j\omega)|$ che la pulsazione ω vengono espressi in scala logaritmica. Tipicamente per i moduli $|G(j\omega)|$ si usano i “db” ($A_{\text{db}} = 20 \log_{10} A$), mentre per la pulsazione ω si usa la scala logaritmica in base 10.

2) Diagramma delle fasi: rappresenta la fase $\arg G(j\omega)$ in funzione della pulsazione ω . In questo caso la fase $\arg G(j\omega)$ viene espressa in scala lineare, mentre la pulsazione ω viene espressa in scala logaritmica base 10.

• Esempio:

$$G(s) = \frac{100 \left(1 + \frac{s}{80}\right)}{\left(1 + \frac{s}{10}\right) \left(1 + \frac{s}{1000}\right)} \quad \rightarrow \quad G(j\omega) = \frac{100 \left(1 + j\frac{\omega}{80}\right)}{\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right) \left(1 + j\frac{\omega}{1000}\right)}$$

• Diagrammi di Bode:



Conversione delle ampiezze in db

- Il *decibel* è un'unità logaritmica convenzionale che normalmente si impiega per esprimere quantità positive, tipicamente il guadagno di amplificatori:

$$A_{\text{db}} = 20 \log_{10} A$$

- Per la conversione si può utilizzare il seguente diagramma:

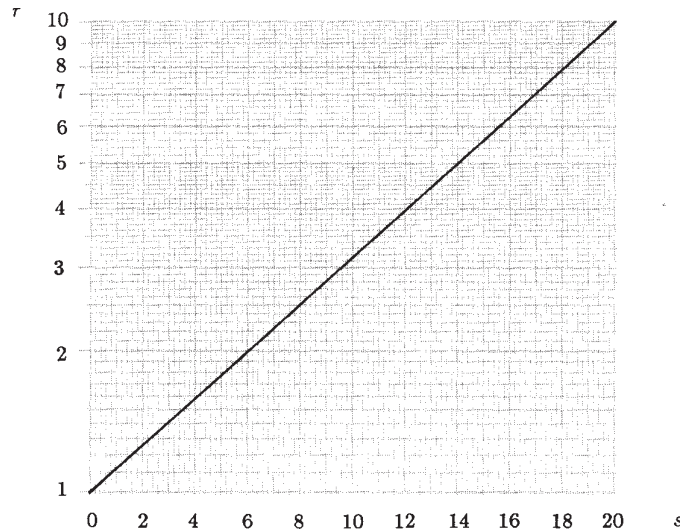
Posto A nella forma:

$$A = r \cdot 10^n \quad \text{con } 1 \leq r < 10,$$

il valore di A in decibel è:

$$A_{\text{db}} = 20n + s \text{ db}$$

dove s si ricava dal diagramma a fianco: $0 \leq s < 20$.



- Alcune conversioni di uso frequente:

Le decadi		$A > 1$	
⋮	⋮	$\sqrt{2}$	3 db
10000	80 db	2	6 db
1000	60 db	5	14 db
100	40 db	20	26 db
10	20 db	50	34 db
1	0 db	$A < 1$	
0.1	-20 db	$1/\sqrt{2}$	-3 db
0.01	-40 db	1/2	-6 db
0.001	-60 db	1/5	-14 db
0.0001	-80 db	1/20	-26 db
⋮	⋮	1/50	-34 db

– Esempio 1:

$$A = 24$$

$$A = 2.4 \cdot 10^1$$

$$A_{\text{db}} \simeq 20 + 8 = 28$$

– Esempio 2:

$$A = 0.56$$

$$A = 5.6 \cdot 10^{-1}$$

$$A_{\text{db}} \simeq -20 + 15 = -5$$

– Ogni 6 db il valore di A raddoppia;

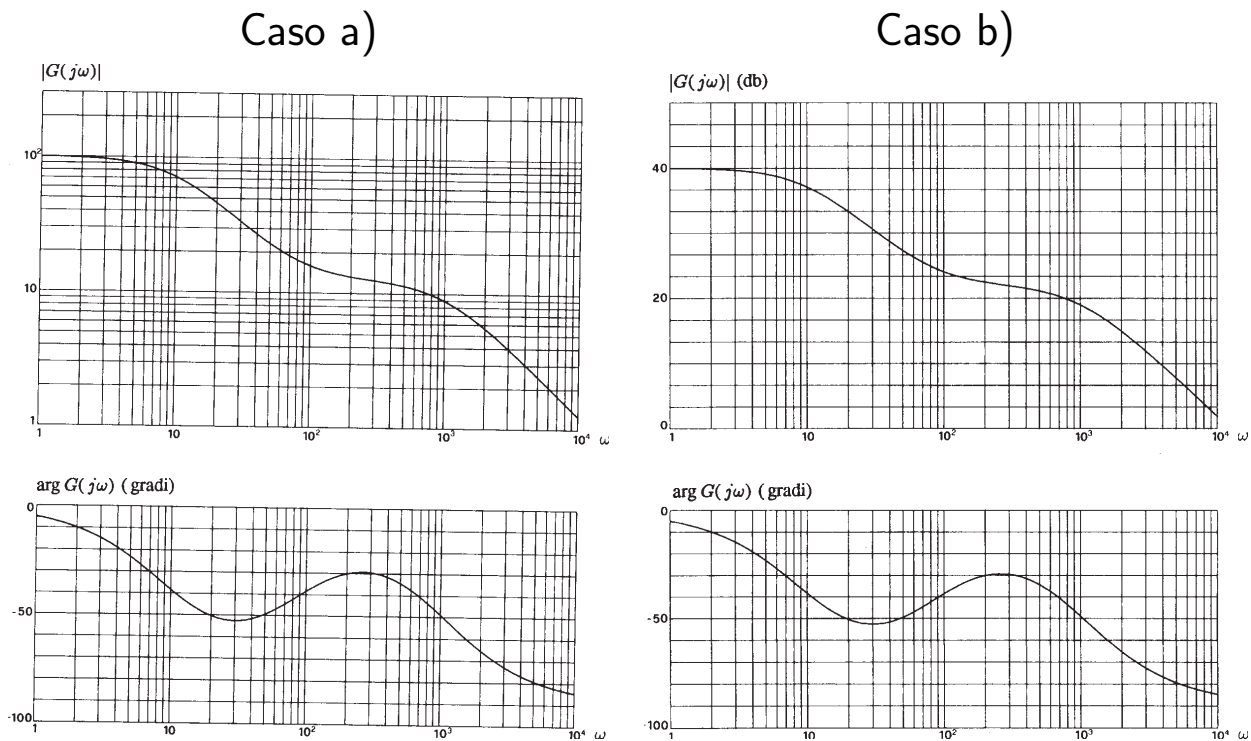
– Ogni 20 db il valore di A è moltiplicato per 10;

- Per i calcoli teorici si utilizzano tipicamente i logaritmi naturali:

$$\ln G(j\omega) = \ln \left[|G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)} \right] = \underbrace{\ln |G(j\omega)|}_{\alpha} + j \underbrace{\arg G(j\omega)}_{\beta}$$

Peraltro, un cambiamento di base dei logaritmi equivale ad un semplice cambiamento di scala.

- Si possono utilizzare due tipi diversi di carta millimetrata:
 - a) carta con doppia scala logaritmica per le ampiezze e carta semilogaritmica per le fasi;
 - b) carta semilogaritmica sia per le ampiezze sia per le fasi. In questo caso la scala delle ampiezze è graduata in decibel: $A_{\text{db}} = 20 \log_{10} A$.



- I vantaggi che si hanno impiegando una scala logaritmica sono:

- 1) è possibile avere una rappresentazione dettagliata di grandezze che variano in campi notevolmente estesi;
- 2) i diagrammi di Bode di sistemi in cascata si ottengono come somma dei diagrammi di Bode dei singoli sottosistemi;
- 3) i diagrammi di Bode di una funzione data in forma fattorizzata si ottengono come somma dei diagrammi elementari dei singoli fattori.

- Funzione $G(s)$ in forma polinomiale:

$$G(s) = K_1 \frac{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^h (s^{n-h} + a_{n-1} s^{n-h-1} + \dots + a_{h+1} s + a_h)}$$

- Il fattore s^h corrisponde ad un polo nell'origine con grado di molteplicità h . Se $h=0$ la funzione $G(s)$ non presenta poli nell'origine.
- Forma fattorizzata a poli e zeri:

$$G(s) = K_1 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{s^h (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_{n-h})}$$

- Forma fattorizzata a costanti di tempo:

$$G(s) = K \frac{(1 + \tau'_1 s)(1 + \tau'_2 s) \dots \left(1 + 2\delta'_1 \frac{s}{\omega'_{n1}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{n1}}\right) \dots}{s^h (1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots \left(1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right) \dots}$$

- Il *logaritmo del modulo* della funzione $G(s)$:

$$\begin{aligned} \log |G(s)| &= \log |K| + \log |1 + \tau'_1 s| + \dots + \log \left| 1 + 2\delta'_1 \frac{s}{\omega'_{n1}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{n1}} \right| \\ &\quad - \log |s^h| - \log |1 + \tau_1 s| - \dots - \log \left| 1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2} \right| \end{aligned}$$

- La *fase* della funzione $G(s)$:

$$\begin{aligned} \arg G(s) &= \arg K + \arg(1 + \tau'_1 s) + \dots + \arg \left(1 + 2\delta'_1 \frac{s}{\omega'_{n1}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{n1}} \right) \\ &\quad - \arg(s^h) - \arg(1 + \tau_1 s) - \dots - \arg \left(1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2} \right) \end{aligned}$$

- Il diagramma di Bode di una qualunque funzione $G(s)$ si ottiene come somma dei diagrammi di Bode delle seguenti funzioni elementari:

$$K, \quad s^{\pm 1}, \quad (1 + s\tau)^{\pm 1}, \quad \left(1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right)^{\pm 1}$$

• Guadagno costante:

$$G(s) = K$$

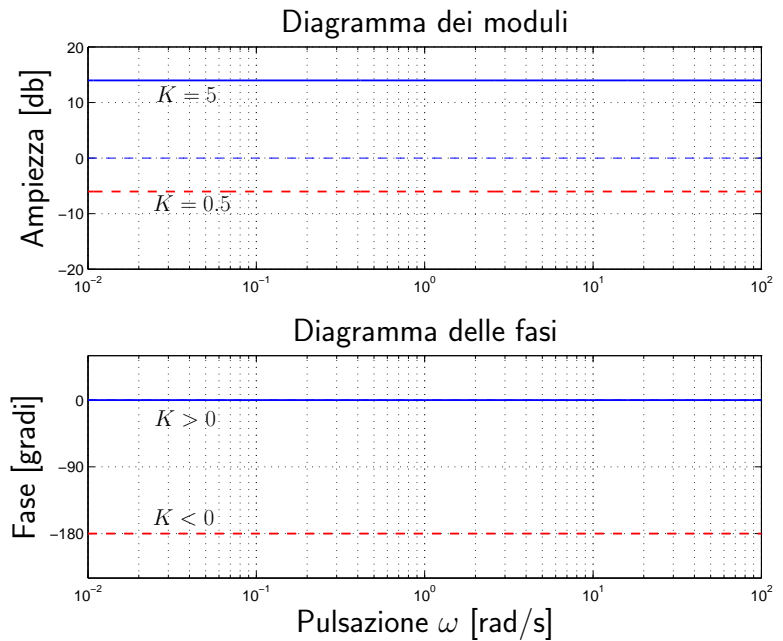
Funzione di risposta armonica:

$$G(j\omega) = |K| e^{j\varphi}$$

Modulo: $|G(j\omega)| = |K|$.

$$\text{Fase: } \begin{cases} 0 & \text{se } K > 0 \\ -\pi & \text{se } K < 0 \end{cases}$$

I diagrammi dei moduli e delle fasi sono costanti e indipendenti da ω .



• Polo nell'origine:

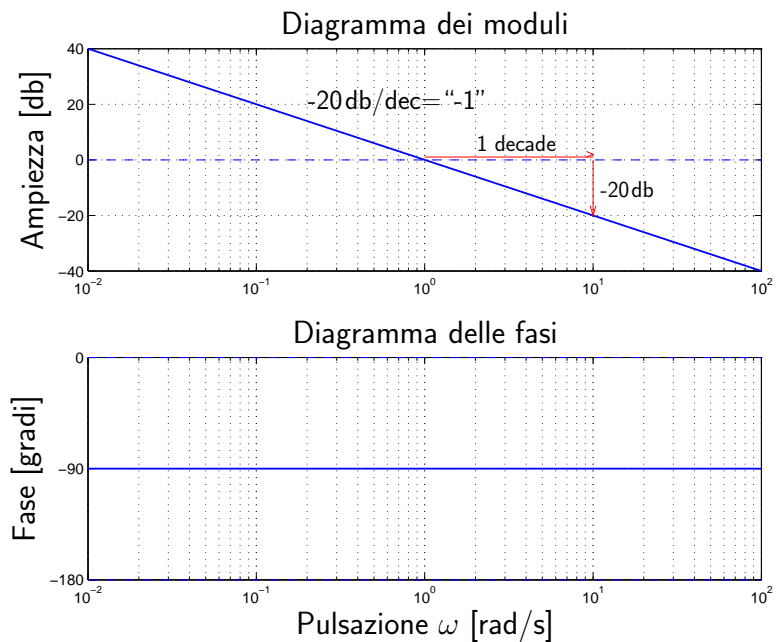
$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Funzione di risposta armonica:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

Modulo: $|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$

Fase costante: $\varphi = -\frac{\pi}{2}$



Il diagramma delle ampiezze è una retta di pendenza “-1” (cioè -20 db/dec) con guadagno unitario in corrispondenza della pulsazione $\omega = 1$.

- **Polo reale:**

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s} \quad \rightarrow \quad G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

- Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi:

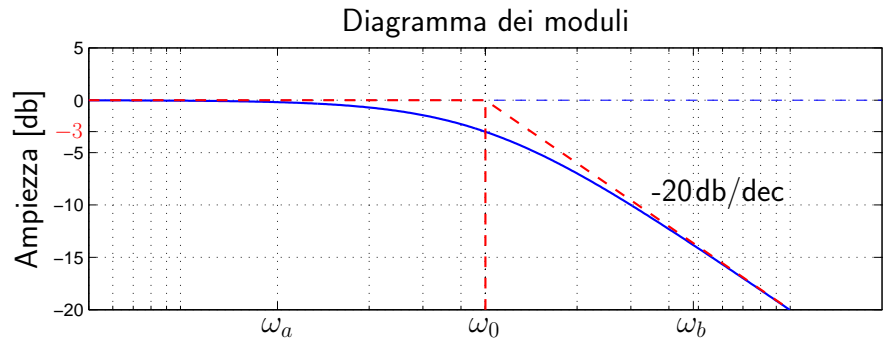
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}, \quad \arg G(j\omega) = -\arctan \omega\tau$$

a) Alle basse frequenze:

$$G(j\omega)|_{\omega \simeq 0} \simeq 1$$

Modulo iniziale: $G_0 = 1$.

Fase iniziale: $\varphi_0 = 0$.

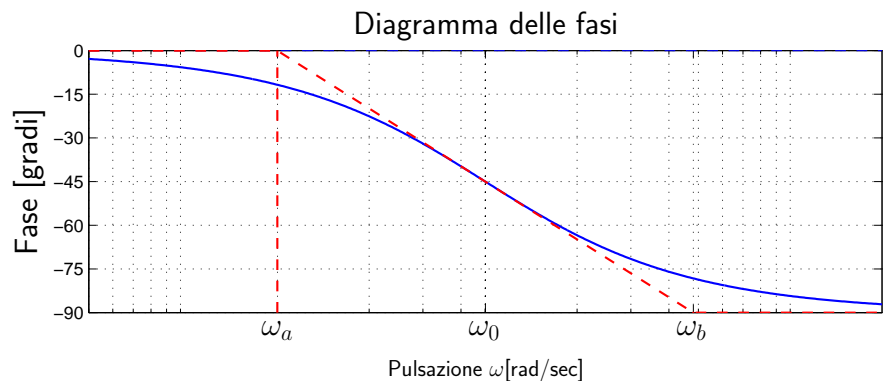


b) Alle alte frequenze:

$$G(j\omega)|_{\omega \simeq \infty} \simeq \frac{1}{j\omega\tau}$$

Modulo finale: $G_\infty = 0$.

Fase finale: $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$.



- È possibile dimostrare che vale la seguente relazione:

$$\frac{\omega_0}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_0} = e^{\frac{\pi}{2}} = 4,81$$

- I cambiamenti di pendenza dei diagrammi asintotici avvengono alle pulsazioni:

$$\omega_a = \frac{\omega_0}{4.81} = \frac{1}{4.81\tau}, \quad \omega_b = 4.81\omega_0 = \frac{4.81}{\tau}, \quad \text{dove} \quad \omega_0 = \frac{1}{\tau}.$$

- La massima distanza esistente tra la rappresentazione asintotica e l'andamento reale si ha per $\omega = \omega_0 = 1/\tau$ e vale $1/\sqrt{2} \simeq -3$ db.

- La pendenza -20 db/decade viene tipicamente indicata con il simbolo “-1”.

- I diagrammi di Bode della funzione $G(s) = (1 + \tau s)$ si ottengono ribaltando attorno all'asse delle ascisse quelli della funzione $G(s) = (1 + \tau s)^{-1}$.

- Quando τ è negativa, il diagramma delle ampiezze rimane immutato, mentre il diagramma delle fasi risulta ribaltato rispetto all'asse delle ascisse.

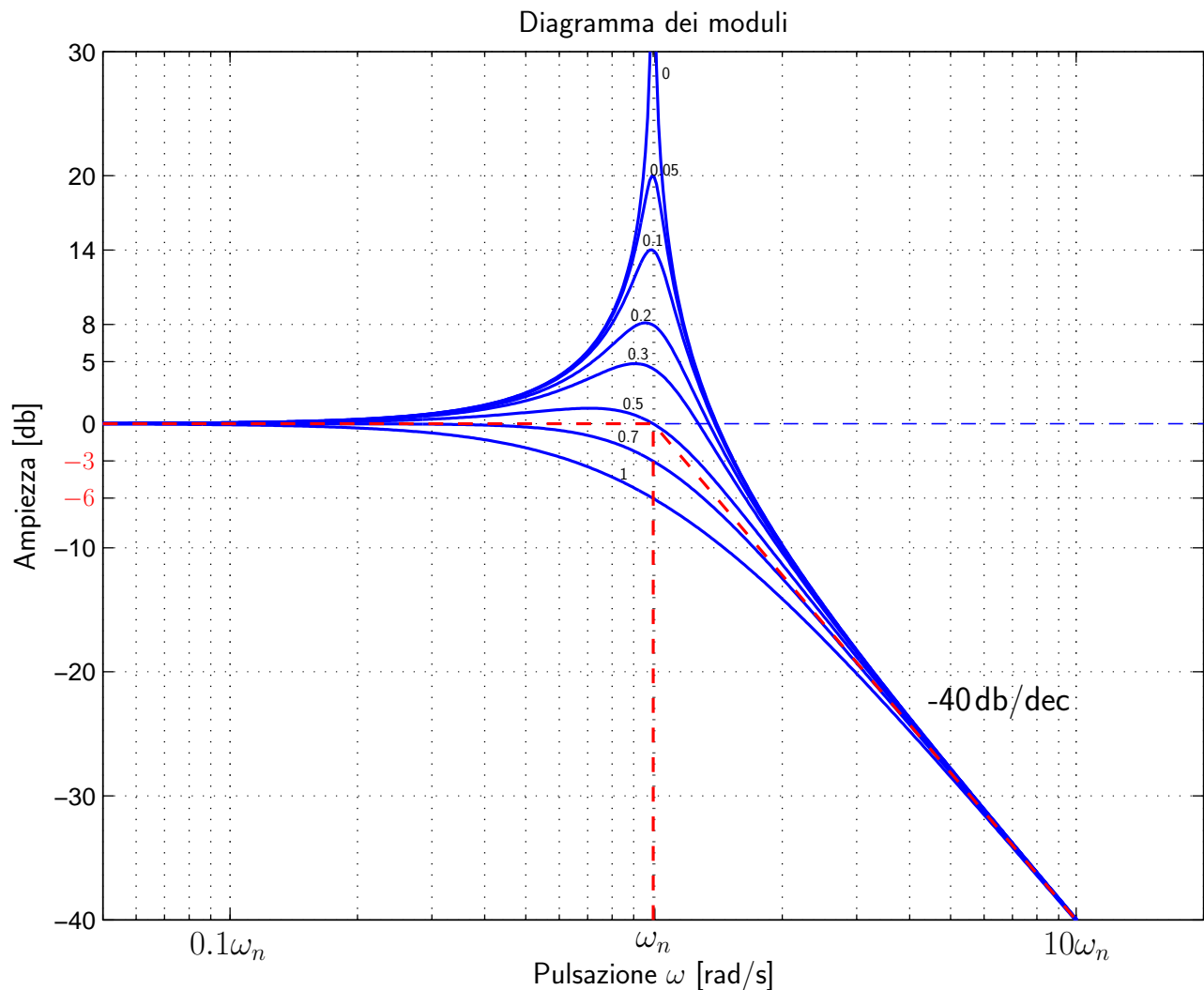
- Poli complessi coniugati ($0 \leq \delta < 1$):

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\delta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \quad \rightarrow \quad G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\delta\frac{\omega}{\omega_n}}$$

- Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\delta^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}, \quad \arg G(j\omega) = -\arctan \frac{2\delta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

- Diagramma di Bode delle ampiezze per $\delta \in \{0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.7, 1\}$:



- La pendenza -40 db/decade viene tipicamente indicata con il simbolo “-2”.

- Per piccoli valori di δ il diagramma reale si discosta sensibilmente da quello asintotico. In particolare per $\delta=0$ lo scostamento è infinito.
- Il diagramma delle ampiezze ha le seguenti proprietà:
 - 1) per $0 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2}$ il diagramma ha un massimo;
 - 2) per $0 \leq \delta \leq 1/2$ il diagramma interseca l'asse a destra del punto $\omega = \omega_n$;
 - 3) per $1/2 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2}$ il diagramma interseca l'asse a sinistra del punto $\omega = \omega_n$;
 - 4) per $1/\sqrt{2} \leq \delta \leq 1$ il diagramma non interseca l'asse delle ascisse ed è pertanto tutta al di sotto della sua approssimazione asintotica.
- **Pulsazione di risonanza** ω_R . Posto $u = \omega/\omega_n$, il massimo dell'ampiezza corrisponde ad un minimo della funzione

$$(1 - u^2)^2 + 4\delta^2 u^2$$

Derivando e uguagliando a zero la derivata, si ottiene

$$-4(1 - u^2)u + 8\delta^2 u = 0$$

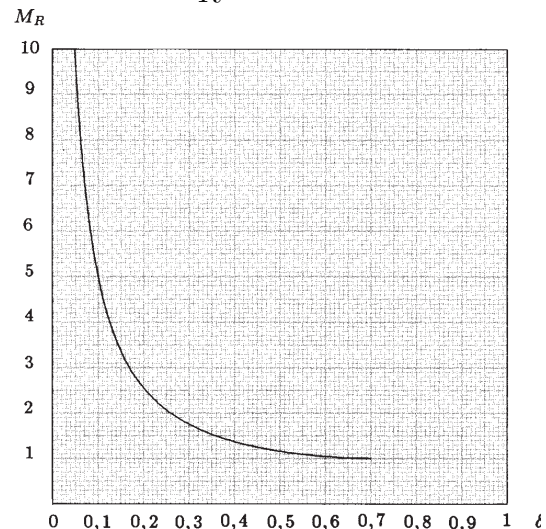
Trascurando la soluzione nulla si ottiene

$$u_R = \sqrt{1 - 2\delta^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2}}$$

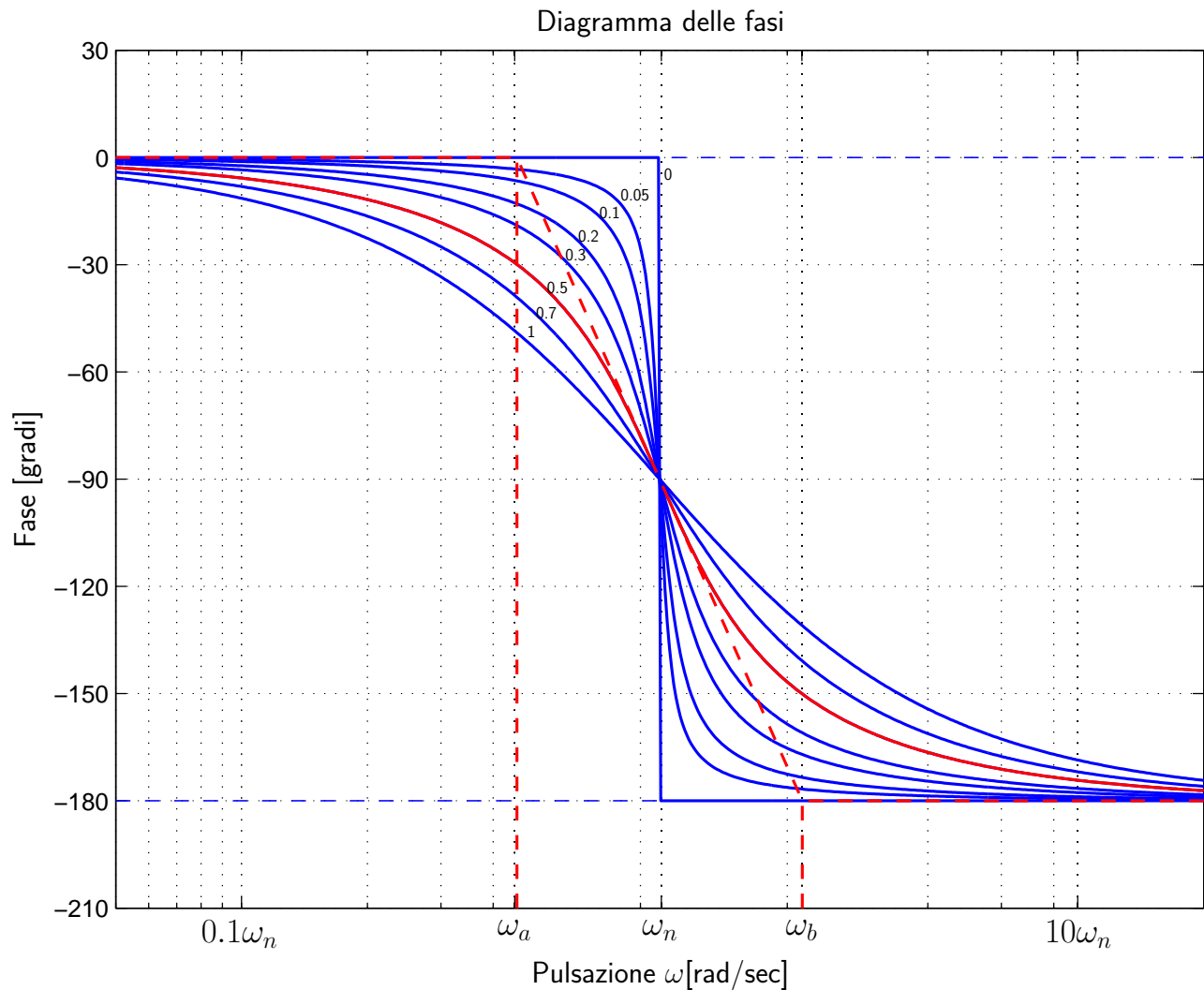
- **Picco di risonanza** M_R : si calcola come modulo della funzione di risposta armonica in corrispondenza della pulsazione ω_R :

$$M_R = \frac{1}{\sqrt{(1 - 1 - 2\delta^2)^2 + 4\delta^2(1 - 2\delta^2)}}$$

$$\boxed{M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1 - \delta^2}}}$$



- Diagramma di Bode delle fasi:



- Le pulsazioni ω_a e ω_b sono legate alla pulsazione ω_n dalla relazione:

$$\frac{\omega_n}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_n} = e^{\frac{\pi}{2}\delta} = 4,81^\delta$$

- I cambiamenti di pendenza del diagramma asintotico delle fasi avviene alle pulsazioni:

$$\omega_a = \frac{\omega_n}{4.81^\delta}, \quad \omega_b = 4.81^\delta \omega_n$$

- Il coefficiente di smorzamento δ può essere calcolato a partire:

1) dal picco di risonanza M_R :

$$M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}} \rightarrow$$

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{M_R^2}} \right)}$$

2) dalle pulsazioni critiche ω_a e ω_b :

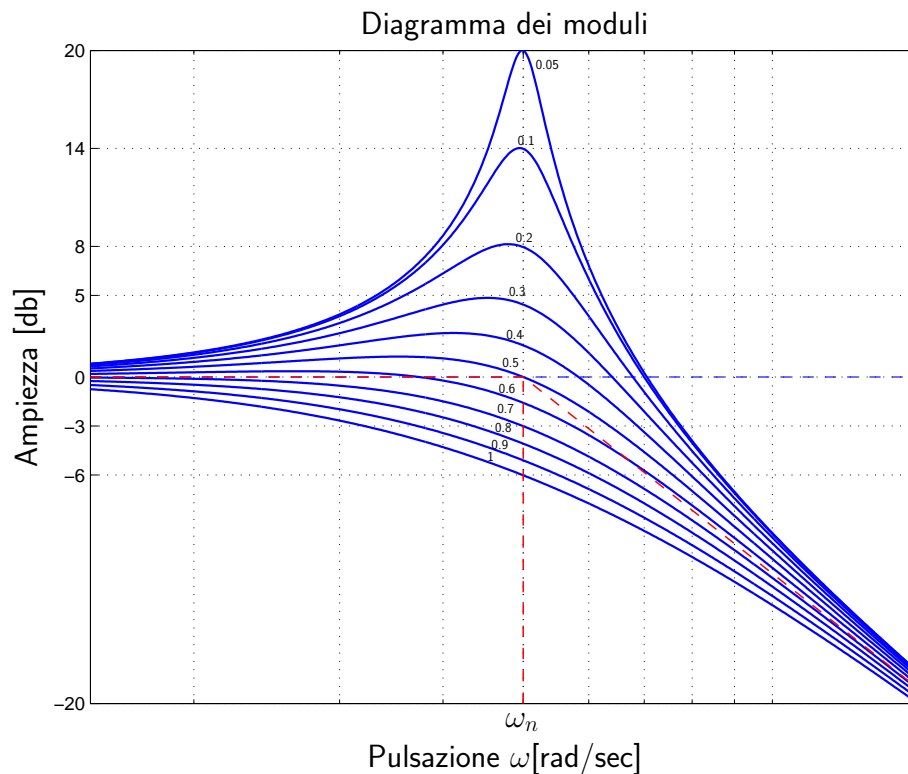
$$\frac{\omega_b}{\omega_a} = e^{\pi\delta} \rightarrow$$

$$\delta = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\omega_b}{\omega_a}$$

3) dal guadagno M_{ω_n} della funzione $G(j\omega)$ alla pulsazione $\omega = \omega_n$:

$$M_{\omega_n} = G(j\omega)|_{\omega=\omega_n} = \frac{1}{2\delta} \rightarrow$$

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}}$$

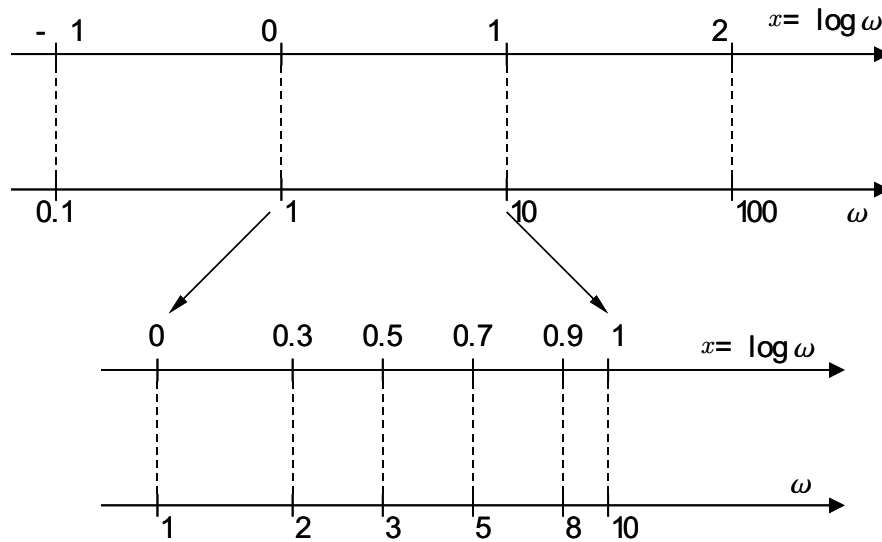


- Nel caso in cui il guadagno statico $G(0)$ non sia unitario, il picco di risonanza M_R è definito come il rapporto tra il valore massimo M_{max} e il guadagno statico $M_0 = G(0)$:

$$M_R = \frac{M_{max}}{M_0}$$

Assi nei diagrammi di Bode

- I Diagrammi di Bode usano l'asse orizzontale in scala logaritmica. Considerando l'asse reale R e fissata una origine, una pulsazione ω corrisponde ad un punto sull'asse con coordinata $x = \log_{10} \omega$. Accanto all'asse si possono quindi indicare o i valori della coordinata x oppure direttamente i valori di ω ; questa seconda soluzione è la più comoda.



- Per il disegno qualitativo dei diagrammi conviene memorizzare alcuni valori: $\log_{10} 2 \simeq 0.3$, $\log_{10} 3 \simeq 0.5$, $\log_{10} 5 \simeq 0.7$, $\log_{10} 8 \simeq 0.9$
- L'asse verticale nei diagrammi di ampiezza è graduato in decibel (db):

$$A|_{\text{db}} \stackrel{\text{def}}{=} 20 \log_{10} A$$

Con questa scala, le pendenze caratteristiche dei diagrammi di Bode sono ± 20 db/decade, ± 40 db/decade, ecc. Per comodità tali pendenze vengono indicate rispettivamente con i simboli ± 1 , ± 2 , ecc.

N.B.: se la scala verticale fosse semplicemente logaritmica ($y = \log_{10} A$) le pendenze caratteristiche dei diagrammi di Bode sarebbero ± 1 e ± 2 .

- L'asse verticale nei diagrammi di fase può essere graduato sia in radianti sia in gradi. In ogni caso il diagramma delle fasi può essere traslato verso l'alto o verso il basso di multipli interi di 2π , o di 360° , mantenendo inalterato il suo significato.

Graficazione “qualitativa” dei diagrammi asintotici di Bode

Primo metodo: somma dei singoli contributi

a) La funzione $G(s)$ viene messa nella forma “a costanti di tempo”:

$$G(s) = \frac{10(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25)} \quad \rightarrow \quad G(s) = -\frac{10}{25} \frac{(1-s)}{s(1+s)(1+\frac{8s}{25}+\frac{s^2}{25})}$$

b) Si tracciano i diagrammi asintotici di Bode delle singole componenti:

$$K = -\frac{10}{25}, \quad G_1(s) = (1-s), \quad G_2(s) = \frac{1}{s}, \quad G_3(s) = \frac{1}{(1+s)}, \quad G_4(s) = \frac{1}{(1+\frac{8s}{25}+\frac{s^2}{25})}$$

c) Si sommano i contributi delle singole componenti.

Il contributo del termine K è costante: $|K| = -7.96$ db e $\arg K = -\pi$.

Lo zero instabile $(1-s)$ e il polo stabile $(1+s)^{-1}$ agiscono alla pulsazione $\omega = 1$ e forniscono due contributi uguali e contrari nel diagramma delle ampiezze. Il loro contributo nel diagramma delle fasi si somma: l'ampiezza complessiva per $\omega \rightarrow \infty$ è $-\pi$.

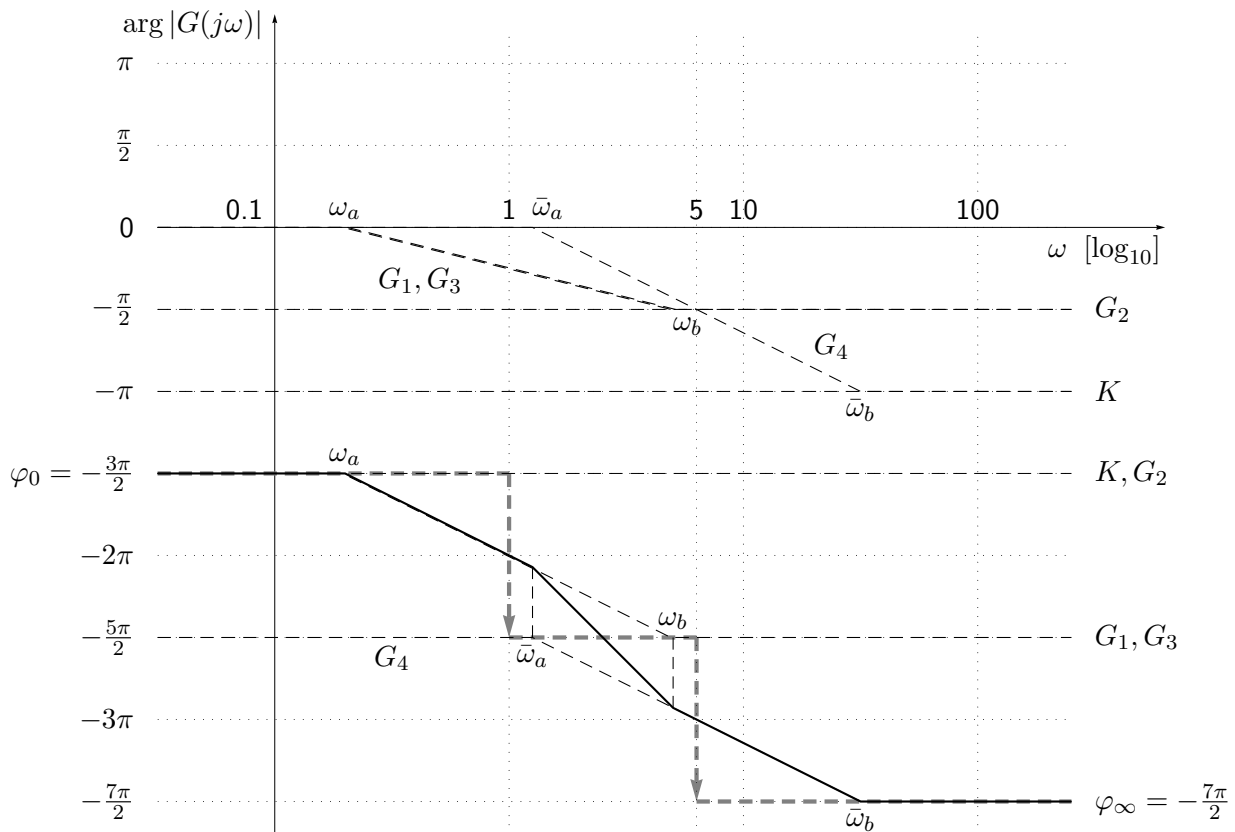
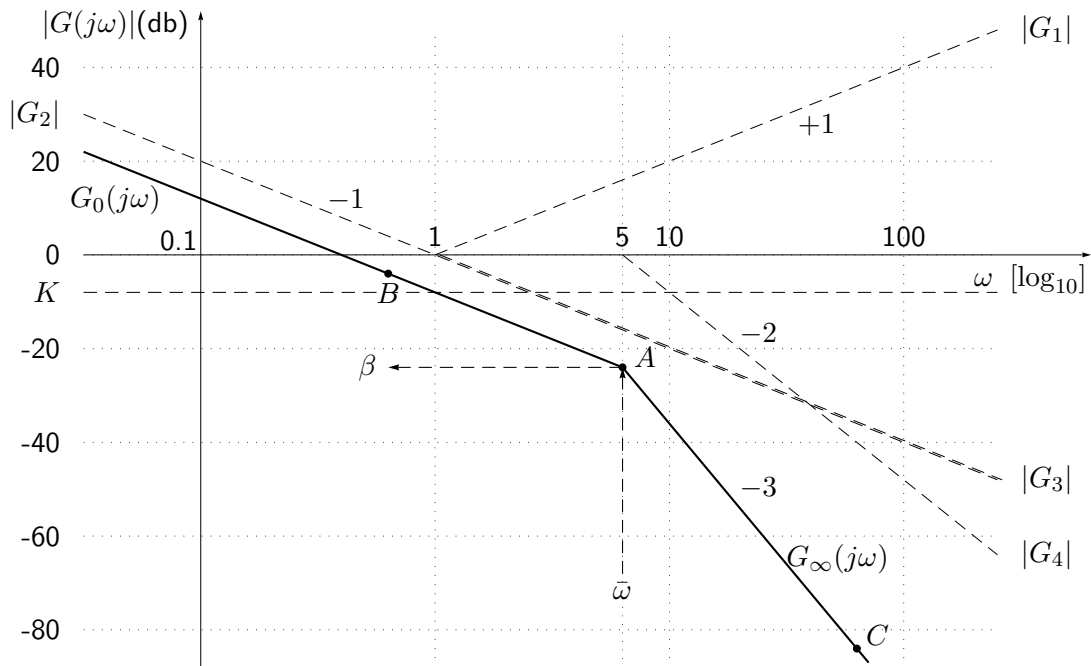
La coppia di poli complessi coniugati $(1+\frac{8s}{25}+\frac{s^2}{25})^{-1}$ determina sul diagramma asintotico delle ampiezze una attenuazione di -40 db/dec a partire dalla pulsazione $\omega_n = 5$. Il contributo al diagramma delle fasi è negativo di ampiezza complessiva $-\pi$ al variare di ω . Le pulsazioni alle quali si ha un cambiamento di pendenza del diagramma asintotico delle fasi sono le seguenti

$$\omega_a = \frac{1}{4.81}, \quad \omega_b = 4.81, \quad \bar{\omega}_a = \frac{\omega_n}{4.81^\delta}, \quad \bar{\omega}_b = \omega_n 4.81^\delta$$

dove $\delta = 0.8$ è il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati.

La difficoltà nell'utilizzare questo metodo sta nel fatto che la somma dei singoli contributi non è sempre agevole.

Diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$



Funzioni approssimanti

- Nei diagrammi di Bode e di Nyquist il comportamento frequenziale di una generica funzione $G(s)$ per $s \rightarrow 0^+$ e per $s \rightarrow \infty$ si può studiare facendo riferimento alle funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$.
- Consideriamo, per esempio, la seguente funzione:

$$G(s) = \frac{10(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25)}$$

- La funzione approssimante $G_0(s)$ si ottiene dalla $G(s)$ per $s \simeq 0$, cioè trascurando tutti i termini in s ad esclusione dei poli o degli zeri nell'origine:

$$G_0(s) = G(s)|_{s \simeq 0} = \frac{10(\cancel{s}-1)}{s(\cancel{s}+1)(\cancel{s}^2+8\cancel{s}+25)} \Big|_{s \simeq 0} = \frac{-10}{25s}$$

- In generale si ottiene una funzione del tipo $G_0(s) = \frac{K_0}{s^h}$, dove h è il numero di poli di $G(s)$ nell'origine, cioè il "tipo" di sistema in oggetto.
- La funzione approssimante $G_\infty(s)$ si ottiene dalla $G(s)$ per $s \simeq \infty$, cioè considerando all'interno di ogni fattore della funzione $G(s)$ solo il termine in s a grado più elevato:

$$G_\infty(s) = G(s)|_{s \simeq \infty} = \frac{10(s-\cancel{1})}{s(s+\cancel{1})(s^2+8\cancel{s}+25)} \Big|_{s \simeq \infty} = \frac{10}{s^3}$$

- In generale si ottiene una funzione del tipo $G_\infty(s) = \frac{K_p}{s^r}$, dove $r = n - m$ è il grado relativo della $G(s)$.
- Per le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ è immediato calcolare i moduli e le fasi delle corrispondenti funzioni di risposta armonica:

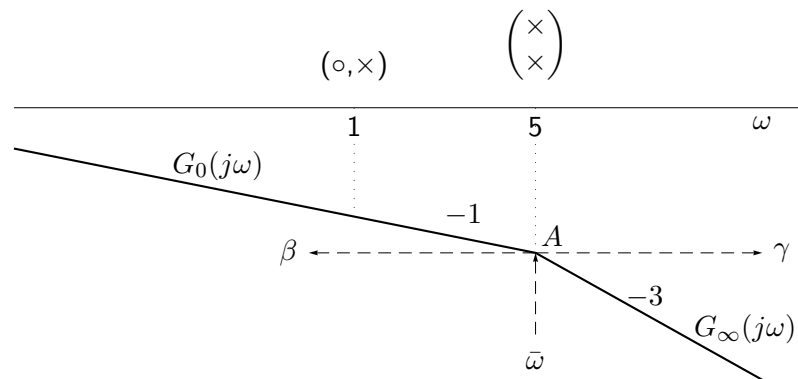
$$G_0(s) = \frac{-10}{25s} \quad \Rightarrow \quad G_0(j\omega) = \begin{cases} |G_0(j\omega)| = \frac{10}{25\omega} \\ \varphi_0 = -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$G_\infty(s) = \frac{10}{s^3} \quad \Rightarrow \quad G_\infty(j\omega) = \begin{cases} |G_\infty(j\omega)| = \frac{10}{\omega^3} \\ \varphi_\infty = -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Secondo metodo: graficazione “rapida”

Diagramma delle ampiezze

- a) Si individua nella funzione $G(s)$ tutte le pulsazioni in corrispondenza delle quali si ha un cambiamento di pendenza. Tali pulsazioni coincidono con gli zeri reali, i poli reali e le pulsazioni naturali ω_n delle coppie di poli e zeri complessi coniugati della funzione $G(s)$. Nel caso in esame si ha $\omega = 1$ e $\omega = 5$. Tali pulsazioni vengono ordinate in ordine crescente di modulo.
- b) Tenendo conto del fatto che gli zeri (reali o complessi coniugati) determinano un incremento di pendenza (rispettivamente di $+1$ e di $+2$) e che, viceversa, i poli (reali o complessi coniugati) determinano un decremento della pendenza (rispettivamente di -1 e di -2), risulta chiaro che la “forma” del diagramma asintotico è già nota a priori. Nel caso in esame si ha:



In corrispondenza della pulsazione $\omega = 1$ non si ha cambiamento di pendenza perchè in quel punto agisce sia un polo che uno zero.

- c) La posizione “verticale” del diagramma si determina nel seguente modo:
- 1) Se la funzione $G(s)$ è di tipo 0, il posizionamento verticale è determinato dal calcolo del guadagno statico $G(0)$.
 - 2) Se il sistema è di tipo 1, o in generale di tipo h , il posizionamento verticale viene fatto calcolando l’esatta posizione di un qualsiasi punto A appartenente al diagramma asintotico a spezzata. Tale calcolo può essere fatto in modo agevole utilizzando le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$.

Per calcolare la coordinata β del punto A di ascissa $\bar{\omega} = 5$ è infatti possibile utilizzare la funzione approssimante $G_0(s)$:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=j\bar{\omega}} = \left| \frac{-10}{25s} \right|_{s=j5} = \frac{2}{25} = -21.94 \text{ db.}$$

In questo caso è possibile utilizzare anche la funzione approssimante $G_\infty(s)$:

$$\gamma = |G_\infty(s)|_{s=j\bar{\omega}} = \left| \frac{10}{s^3} \right|_{s=j5} = \frac{2}{25} = -21.94 \text{ db.}$$

d) È ora possibile tracciare il diagramma asintotico complessivo tracciando, a partire dal punto A , i vari tratti della “spezzata”, ognuno con la propria pendenza.

Nel caso in esame, per esempio, il tratto di spezzata che precede il punto A si determina individuando il punto B . Questo punto si calcola a partire da A diminuendo la pulsazione di una decade ed aumentando di 20 db l'ampiezza: $B = (0.5, \beta + 20)$.

Allo stesso modo si procede per determinare la pendenza del tratto che segue il punto A . In questo caso la pendenza è -3 e quindi il punto C si determina aumentando la pulsazione di una decade e diminuendo l'ampiezza di 60 db: $C = (50, \beta - 60)$.

Diagramma delle fasi

Anche la graficazione del diagramma asintotico delle fasi può essere fatta “rapidamente” se si procede nel modo seguente.

1) Si individua la fase di partenza φ_0 del diagramma asintotico calcolando la fase iniziale della funzione approssimante $G_0(s)$:

$$\varphi_0 = \arg G_0(j\omega) = \arg \left(\frac{-10}{25s} \right)_{s=j\omega} = -\frac{3\pi}{2}.$$

La fase iniziale φ_0 è comprensiva del segno negativo della costante K e della fase costante $-\frac{\pi}{2}$ introdotta dal polo nell'origine.

2) A partire da φ_0 si costruisce un *diagramma a gradoni* i cui punti di

discontinuitá coincidono con le pulsazioni critiche ω_c di tutti i poli e zeri della funzione $G(s)$. L'ampiezza di ciascuna discontinuitá è pari alla variazione di fase $\Delta\varphi_i$ introdotta dal termine dinamico che ha generato la discontinuitá.

Le variazioni di fase $\Delta\varphi_i$ sono sempre un multiplo di $\frac{\pi}{2}$ e possono essere sia positive che negative in funzione del fatto che il termine dinamico considerato sia un polo, uno zero, sia stabile o instabile.

Nel caso in esame i primi due termini da prendere in considerazione sono il polo stabile $(s + 1)^{-1}$ e lo zero instabile $(s - 1)$ alla pulsazione $\omega = 1$. Ciascuno di essi introduce uno sfasamento pari a $-\frac{\pi}{2}$ per cui il loro contributo complessivo è $-\pi$ che va disegnata verso il basso a partire dalla fase iniziale $\varphi = -\frac{3\pi}{2}$. I due poli complessi coniugati stabili $(1 + \frac{8s}{25} + \frac{s^2}{25})^{-1}$ introducono uno sfasamento di ampiezza $-\pi$ in corrispondenza della pulsazione $\omega_n = 5$. Il loro contributo va disegnato verso il basso nella fascia $[-\frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}]$.

3) Il diagramma asintotico delle fasi si ottiene infine dal *diagramma a gradoni* sostituendo ad ogni discontinuitá l'interpolazione asintotica specifica dell'elemento dinamico che agisce in quel punto $\bar{\omega}$: a) nel caso di poli o zeri reali si utilizzano i valori $\omega_a = \bar{\omega}/4.81$ e $\omega_b = 4.81\bar{\omega}$; b) nel caso di poli o zeri complessi coniugati si utilizzano i valori $\omega_a = \bar{\omega}/4.81^\delta$ e $\omega_b = 4.81^\delta \bar{\omega}$.

