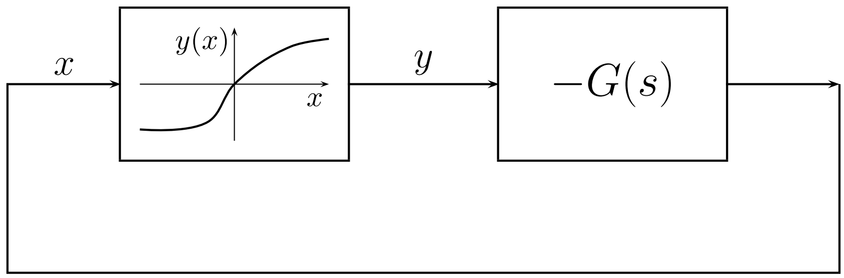
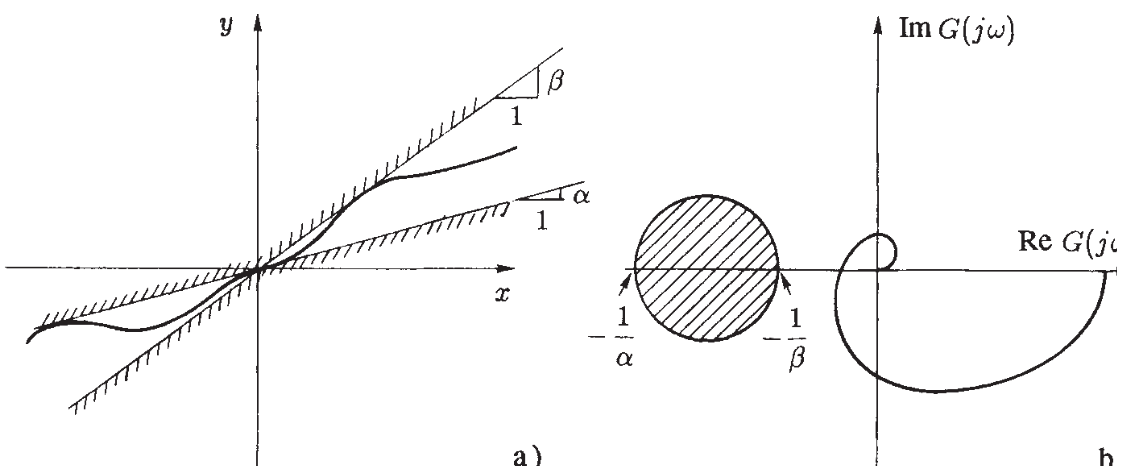
# Il criterio del cerchio

• Il criterio del cerchio fornisce condizioni sufficienti per la stabilità asintotica globale dei sistemi in retroazione non lineari autonomi del seguente tipo:




• A tale schema ci si riconduce quando il segnale di riferimento $r$ si possa considerare costante.

• Ipotesi per poter applicare il criterio del cerchio: la caratteristica dell'elemento non lineare deve essere ad un sol valore e contenuta in un settore delimitato da due rette passanti per l'origine e aventi rispettivamente pendenze $\alpha$ e $\beta$, che si suppongono entrambe positive.

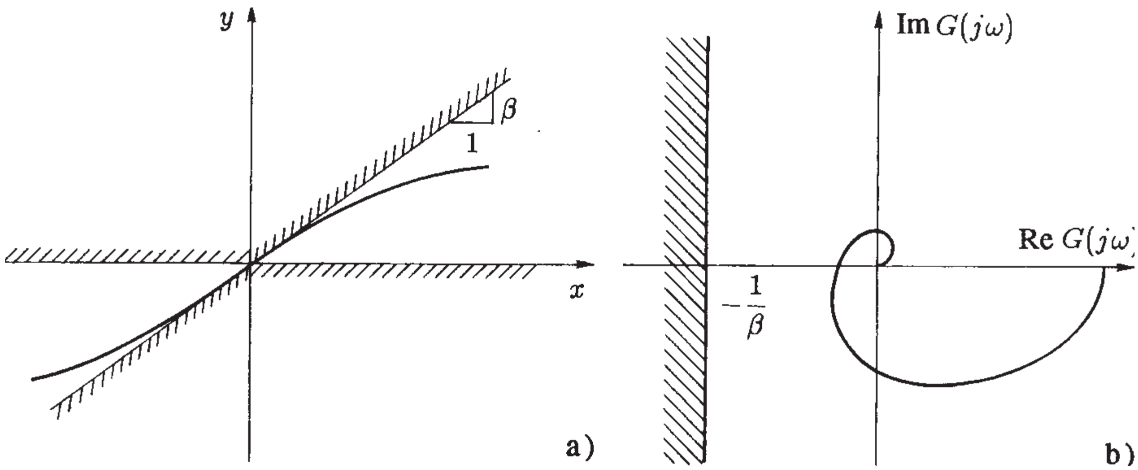



• Noti i parametri $\alpha$ e $\beta$, si può costruire il "cerchio critico" (vedi figura).

• **Criterio del cerchio.** *Nell'ipotesi che la funzione di trasferimento della parte lineare del sistema $G(s)$ abbia tutti i poli a parte reale negativa, eccezion fatta per un eventuale polo nell'origine semplice o doppio, condizione sufficiente perché il sistema in retroazione sia globalmente asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $G(j\omega)$ non circondi né tocchi il cerchio critico.*

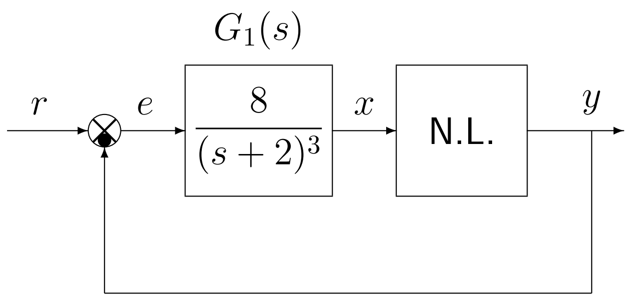
• Il criterio del cerchio, almeno nella sua enunciazione semplificata sopra riportata, risulta di applicazione molto semplice e si presenta come un'estensione del criterio di Nyquist.

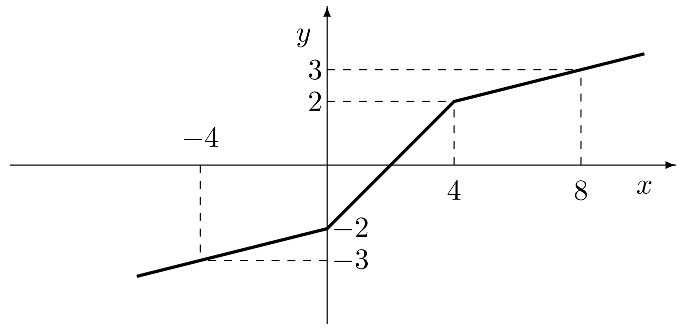
• È frequente il caso in cui, tendendo la caratteristica dell'elemento non lineare ad un asintoto orizzontale, come ad esempio in presenza di saturazione netta, occorre assumere $\alpha = 0$:




In questo caso il cerchio degenera nel semipiano a sinistra della retta verticale per il punto $-1/\beta$ .

**Esempio.** Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:



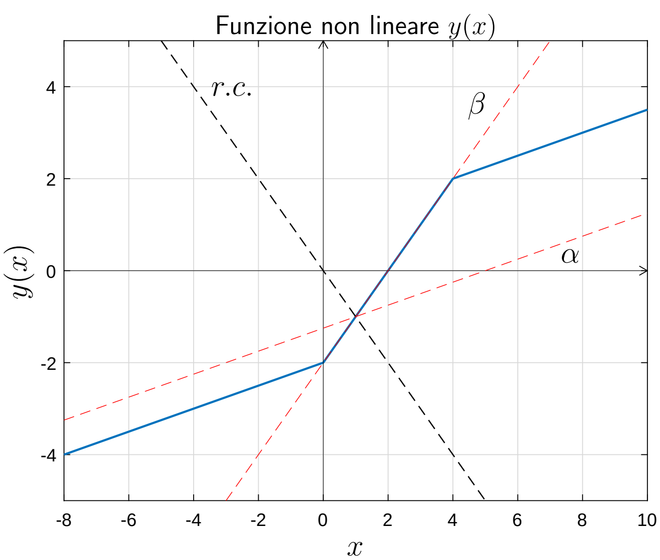



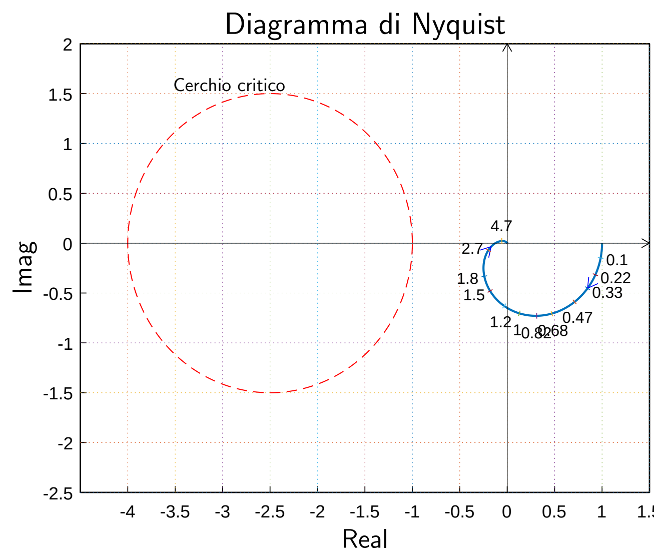

Utilizzando il criterio del cerchio, determinare se il punto di lavoro corrispondente all'ingresso costante $r = 0$ è asintoticamente stabile.

**Soluzione.** Il guadagno statico della funzione $G_1(s)$ è $K_1 = 1$. Essendo nullo l'ingresso, la retta di carico passa per l'origine ed ha pendenza -1

$$y = -x$$

Il punto di lavoro del sistema risulta quindi essere $(1, -1)$:




Facendo riferimento a questo punto di lavoro, le pendenze $\alpha$ e $\beta$ che caratterizzano il criterio del cerchio valgono

$$\alpha = \frac{1}{4}, \qquad \beta = 1$$

Il sistema $G_1(s)$ ha un diagramma di Nyquist regolare che interseca il semiasse negativo in

$$\sigma_0 = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{8}, \qquad \omega_0 = \sqrt{12} = 2\tan\frac{\pi}{3}$$

Infatti, applicando il criterio di Routh

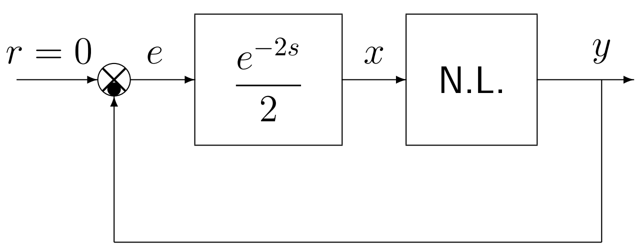
$$1 + K\frac{8}{(s+2)^3} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad s^3 + 6s^2 + 12s + 8 + 8K = 0$$

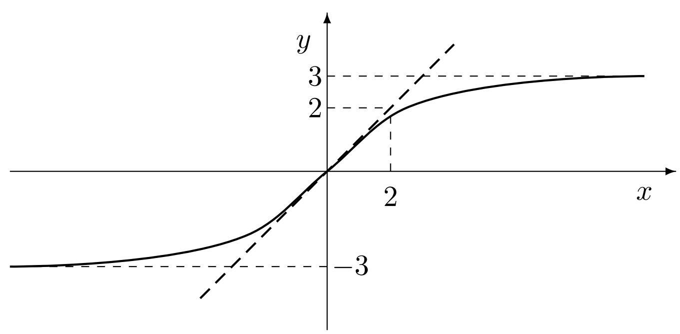
si ottiene:

$$
\begin{array}{c|lll}
3 & 1 & 12 & \to \ \omega^* = \sqrt{12} \\
2 & 6 & 8+8K & \\
1 & 64-8K & & \to \ K < 8 = K^* \\
0 & 8+8K & & \to \ K > -1
\end{array}
$$

Essendo $K^* > \beta$, non vi è intersezione tra il cerchio critico e il diagramma di Nyquist per cui si può affermare che il punto di lavoro $(1,\ -1)$ è globalmente asintoticamente stabile.

**Esempio.** Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:




Utilizzando il criterio del cerchio, determinare se il sistema retroazionato è stabile o meno.

**Soluzione.** Il sistema retroazionato è stabile. Infatti il diagramma polare del ritardo puro interseca il semiasse negativo in $-0.5$, mentre il cerchio limite, in questo caso, degenera in un semipiano delimitato da una retta verticale passante per $-1$.

La posizione relativa della funzione di risposta armonica del ritardo puro e del cerchio critico è la seguente: