

Contorno delle radici

- Si faccia riferimento alla seguente equazione caratteristica:

$$1 + \frac{4(1 + 5\tau s)}{s(1 + \tau s)(1 + 0.2s)} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + G_2(s, \tau) = 0$$

Tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\tau > 0$.

- Si ha un problema di *contorno delle radici* tutte le volte che nell'equazione caratteristica il parametro che varia non è il guadagno K del sistema ma un qualunque altro parametro del sistema.
- Molto spesso, un problema di contorno delle radici può essere ricondotto ad un semplice problema di luogo delle radici procedendo nel seguente modo:

- 1) Si riscrive l'equazione caratteristica in forma polinomiale:

$$s(1 + \tau s)(1 + 0.2s) + 4(1 + 5\tau s) = 0$$

- 2) Si raccolgono tutti i termini che "moltiplicano" il parametro τ :

$$s(1 + 0.2s) + 4 + \tau[s^2(1 + 0.2s) + 20s] = 0$$

- 3) Si divide l'equazione caratteristica per il gruppo di termini che "non moltiplicano" il parametro τ :

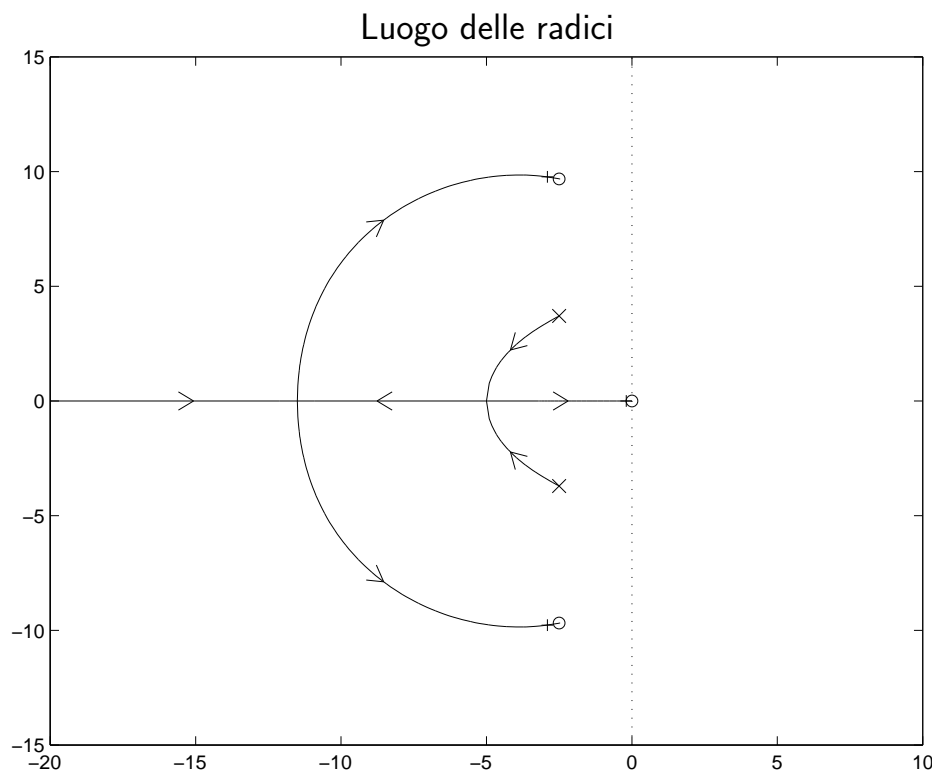
$$1 + \frac{\tau[s^2(1 + 0.2s) + 20s]}{s(1 + 0.2s) + 4} = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + \underbrace{\frac{\tau s[s^2 + 5s + 100]}{s^2 + 5s + 20}}_{1 + \tau G_3(s)} = 0$$

- 4) In questo modo ci si è ricondotti al semplice caso di studio del luogo delle radici della funzione $G_3(s)$ al variare del parametro τ .

- Questo procedimento mette in evidenza che *“un contorno delle radici può essere ricondotto ad un normale luogo delle radici tutte le volte che il parametro τ entra in modo lineare nell'equazione caratteristica del sistema retroazionato”*.
- La funzione $G_3(s)$ non ha un significato fisico diretto per cui può anche essere una funzione non fisicamente realizzabile, cioè il suo grado relativo può anche essere negativo: $n - m < 0$ (come ad esempio accade nel caso in esame).
- Si noti che il polinomio che compare a denominatore della funzione $G_3(s)$ coincide con il polinomio caratteristico del sistema retroazionato che sia ha quando $\tau = 0$, cioè i poli da cui parte il contorno delle radici fanno parte del luogo delle radici del sistema per $\tau = 0$ e al variare del guadagno K .
- Nel caso in esame, gli zeri e i poli della funzione $G_3(s)$ sono:

$$z_1 = 0, \quad z_{2,3} = -2.5 \pm j9.682, \quad p_{1,2} = -2.5 \pm j3.708$$

- Andamento qualitativo del contorno delle radici al variare del parametro $\tau > 0$:



Esempio. Calcolare il contorno delle radici del seguente sistema al variare di $\tau > 0$.

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + \tau s)}$$

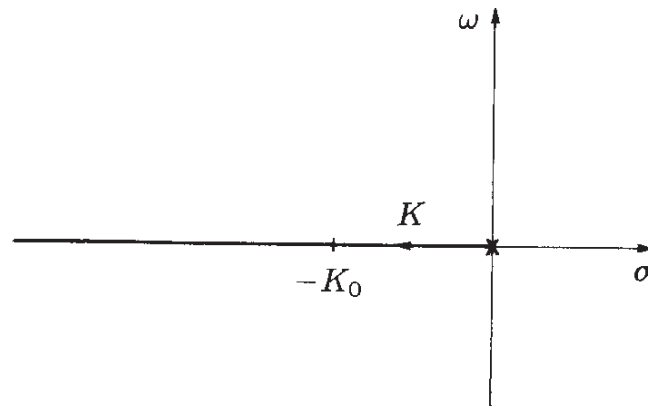
L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K}{s(1 + \tau s)} = 0 \quad \rightarrow \quad \tau s^2 + s + K = 0$$

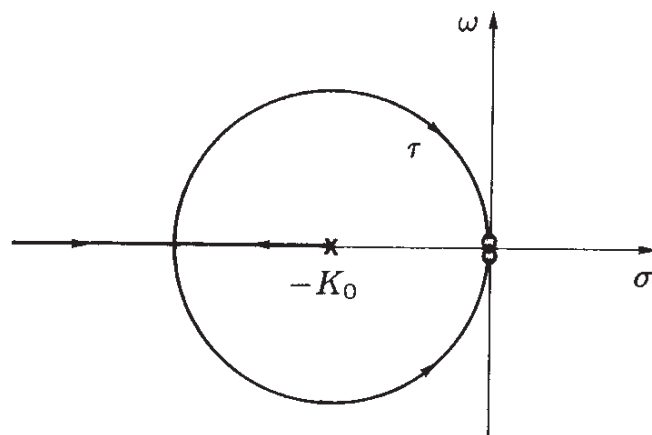
da cui si ottiene:

$$1 + \frac{\tau s^2}{s + K} = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + \tau G_3(s) = 0$$

Il luogo e il contorno delle radici del sistema $G(s)$ sono i seguenti:



a)



b)

Fissando un valore di K , che si indicherà con K_0 , si stabilisce il punto del luogo ($-K_0$) da cui si origina il contorno delle radici.

Si noti che in questo caso la funzione $G_3(s)$ è impropria: ha un solo polo e due zeri. In situazioni di questo tipo (cioè quando il grado relativo $n - m$ è negativo) il luogo delle radici presenta $|n - m|$ asintoti che sono percorsi in senso inverso, cioè dall'infinito al finito.

Esempio. Calcolare il contorno delle radici del seguente sistema $G(s)$ al variare di $\tau > 0$.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(1+\tau s)}$$

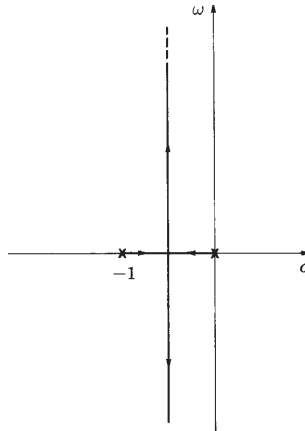
L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K}{s(s+1)(1+\tau s)} = 0 \quad \rightarrow \quad s(s+1) + K_0 + \tau s^2(s+1) = 0$$

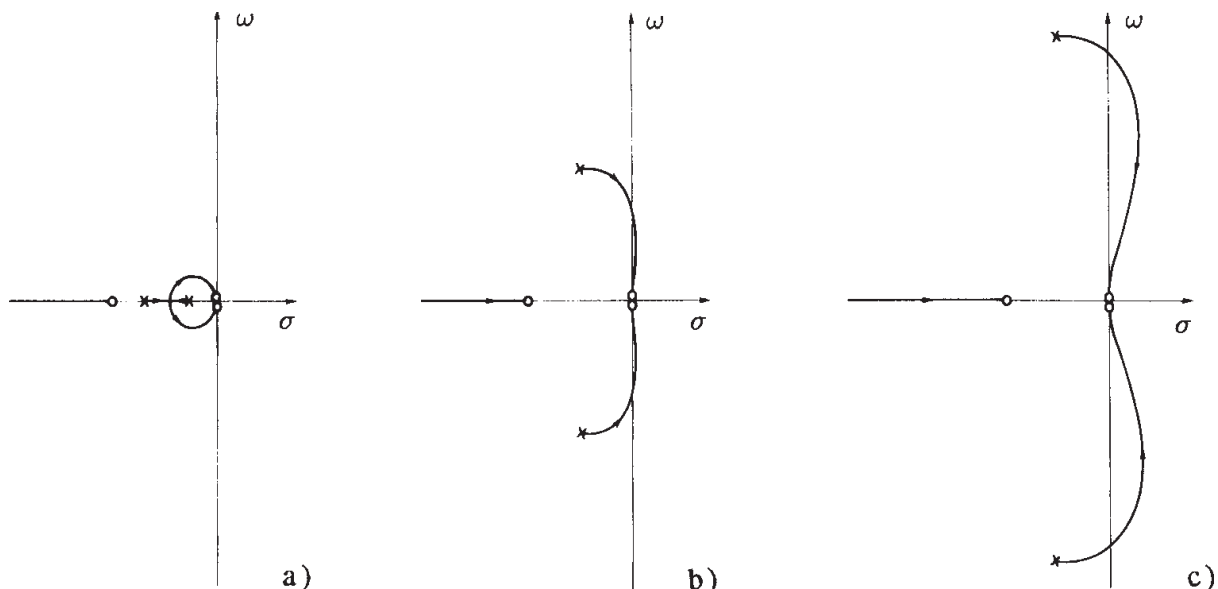
da cui si ottiene:

$$1 + \frac{\tau s^2(s+1)}{s(s+1) + K_0} = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + \tau G_3(s) = 0$$

Il luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare di K da 0 a ∞ :



I contorni delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $\tau > 0$ e per tre diversi valori del parametro K :



Il contorno delle radici a) corrispondente a radici reali, gli altri due a radici complesse coniugate.

Esempio. Calcolare il contorno delle radici del seguente sistema $G(s)$ al variare di $\tau > 0$.

$$G(s) = \frac{K_1(1 + \tau s)}{s(s+1)(s+2)}$$

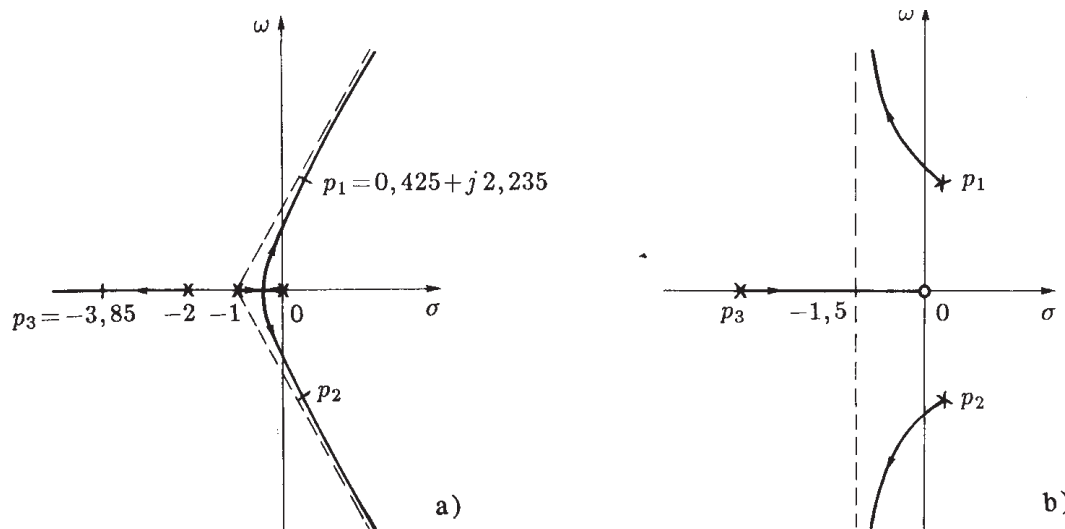
L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K_1(1 + \tau s)}{s(s+1)(s+2)} = 0 \quad \rightarrow \quad s(s+1)(s+2) + K_1 + \tau s K_1 = 0$$

da cui si ottiene:

$$1 + \frac{\tau s K_1}{s(s+1)(s+2) + K_1} = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + \tau G_3(s) = 0$$

Il luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare di K da 0 a ∞ e il corrispondente contorno delle radici sono i seguenti:



Il contorno delle radici riportato in b) corrispondente al caso $K_1 := 20$, e i poli p_1 , p_2 e p_3 da cui parte il contorno sono quelli mostrati in figura a).

Il contorno presenta due asintoti. Il punto d'incontro degli asintoti è sull'asse reale ed ha ascissa:

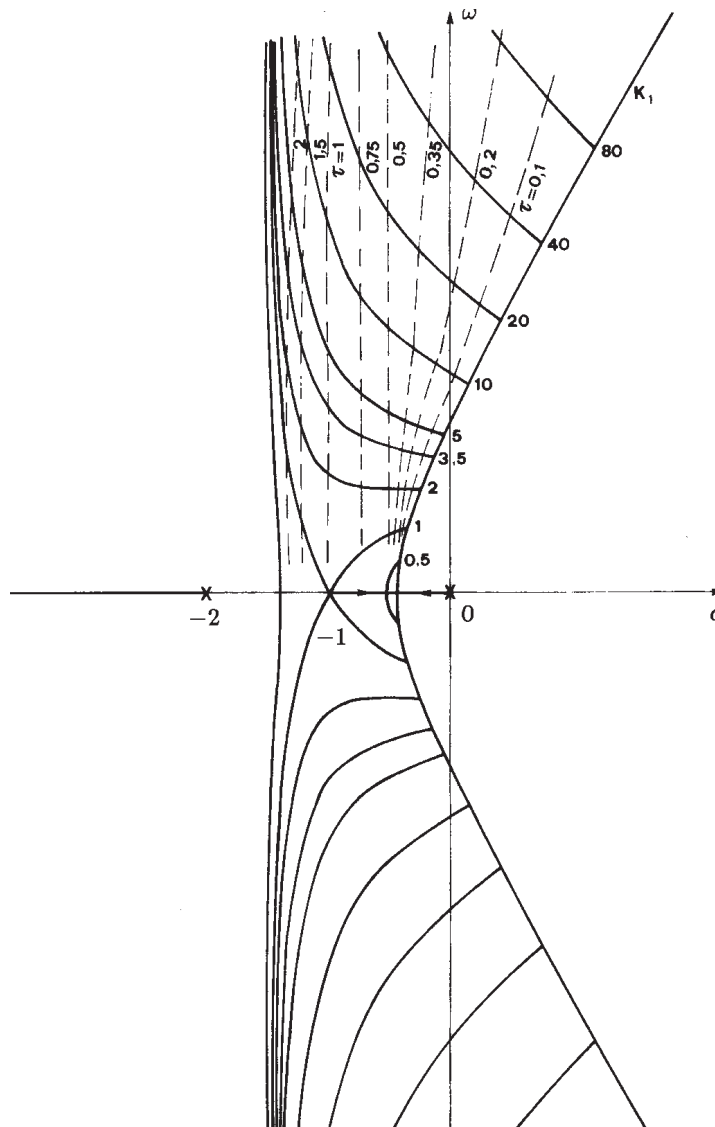
$$\sigma_a = \frac{p_1 + p_2 + p_3 - 0}{3 - 1} = -\frac{3}{2} = -1.5$$

Nota: nel caso in esame il punto di incontro degli asintoti del contorno delle radici è indipendente dal valore di K_1 per il quale il contorno è tracciato: tutti i contorni relativi a diversi valori di K_1 hanno gli stessi asintoti.

Teorema del baricentro

Teorema del baricentro del luogo delle radici. *La somma dei poli del sistema ottenuto chiudendo in retroazione un sistema dinamico descritto da una funzione di trasferimento razionale con polinomio a denominatore di grado superiore di almeno due a quello del polinomio a numeratore è indipendente dal valore del guadagno statico di anello e dalle posizioni degli zeri ed è uguale alla somma dei poli del sistema ad anello aperto.*

Contorno delle radici del sistema $G(s) = \frac{K_1(1+\tau s)}{s(s+1)(s+2)}$ tracciato per diversi valori della costante K_0 .



I rami principali del contorno delle radici (quelli relativi ai poli dominanti) sono tracciati per diversi valori di K_1 : si ottiene così una famiglia di curve appoggiate al luogo delle radici.