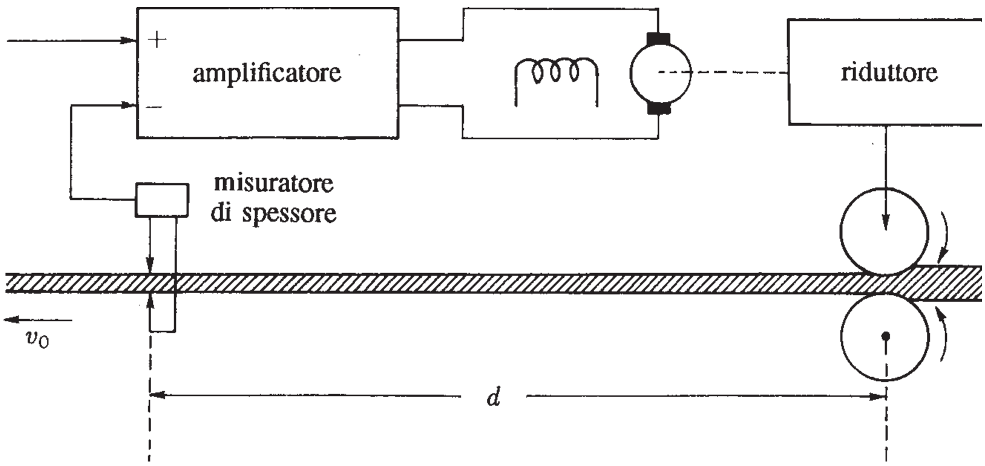
Sistemi con ritardi finiti

Nell'enunciato del criterio di Nyquist si è fatto implicitamente riferimento a sistemi aventi la funzione di guadagno di anello $F(s)$ razionale fratta. Questi sistemi sono caratterizzati dal fatto che l'uscita o una sua derivata rispondono immediatamente all'applicazione dell'ingresso.

In molti sistemi di controllo, con trasmissioni pneumatiche, idrauliche o meccaniche si possono presentare ritardi finiti: l'uscita e le sue derivate rispondono dopo un tempo finito dall'applicazione dell'ingresso. Esempio di sistema per la regolazione dello spessore di un laminato:



Un modello matematico spesso accettabile per la rappresentazione di tali sistemi è dato dalla funzione di trasferimento trascendente

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} e^{-t_0 s}$$

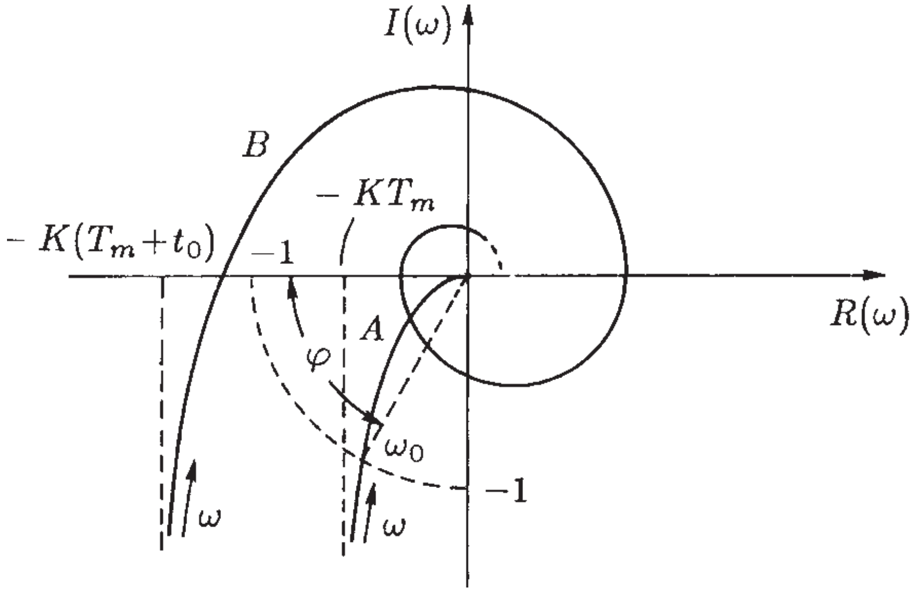
in cui $P(s)$ e $Q(s)$ sono polinomi in s, mentre $e^{-t_0 s}$ è la funzione di trasferimento di un ritardo finito di entità t_0.

Il criterio di Nyquist si può estendere, senza modifiche dell'enunciato, a tali sistemi con un ritardo finito entro l'anello.

Esempio. Nell'esempio mostrato sopra, la misura dello spessore del laminato avviene ad una certa distanza d dai cilindri, per cui, se la velocità di trasporto v_0 del laminato è costante, si ha un ritardo finito di valore $t_0 = d/v_0$. La funzione di trasferimento $G(s)$ del gruppo misuratore-amplificatore-motore-riduttore e quella d'anello $F(s)$ sono:

$$G(s) = \frac{K}{s\,(1 + T_m\, s)}, \qquad F(s) = \frac{K\, e^{-t_0 s}}{s\,(1 + T_m\, s)}$$

Se non vi fosse il ritardo finito, il diagramma di Nyquist della funzione $F(s)$ sarebbe del tipo indicato con A nella figura seguente:



Per la presenza del ritardo finito, ogni vettore viene sfasato in ritardo dell'angolo $\omega\, t_0$, proporzionale alla pulsazione, e il diagramma assume l'andamento a spirale indicato con B nella figura precedente.

Nota. Si indichi con ω_0 la pulsazione per cui il diagramma A interseca il cerchio a modulo è unitario. Il sistema retroazionato è stabile anche in presenza del ritardo finito t_0 se e solo se vale la relazione $\omega_0\, t_0 < \varphi$, cioè se

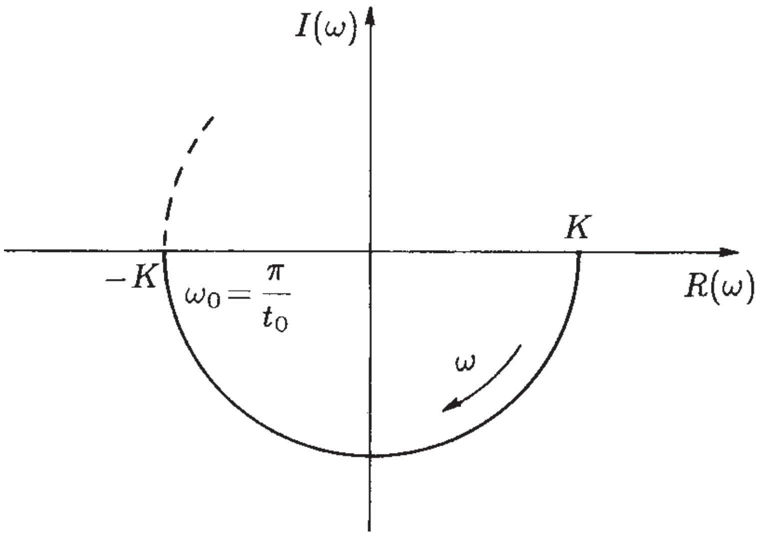
$$t_0 < \frac{\varphi}{\omega_0}$$

dove φ non è altro che il margine di fase del sistema in assenza del ritardo puro.

Esempio. Un sistema di tipo 0 avente la funzione di trasferimento di anello

$$F(s) = \frac{K\, e^{-t_0\, s}}{(1+\tau_1\, s)\,(1+\tau_2\, s)\, \ldots}$$

con $t_0 \gg \tau_1, \tau_2\, \ldots$ ha il seguente diagramma di Nyquist



Pur essendo ancora a forma di spirale, nel tratto iniziale si può approssimare con una circonferenza, dato che lo sfasamento dovuto al ritardo si manifesta prima dell'attenuazione e dello sfasamento dovuti ai termini del primo ordine.

In base al criterio di Nyquist, per la stabilità asintotica del sistema $F(s)$ retroazionato deve essere soddisfatta la condizione: $K < 1$. Un valore così basso per il guadagno statico di anello è inaccettabile in quanto determina un l'errore a regime nella risposta ad un gradino di ampiezza R_0 non inferiore ad $R_0/2$.

In questi casi conviene utilizzare un dispositivo di controllo di *tipo integrale*, cioè introdurre artificialmente un polo nell'origine. La nuova funzione di trasferimento diventa:

$$F(s) = \frac{K\, e^{-t_0 s}}{s\,(1+\tau_1\, s)\,(1+\tau_2\, s)\,\ldots}$$

Assumendo $t_0 \gg \tau_1, \tau_2 \ldots$, la funzione $F(s)$ può essere approssimata nel seguente modo:

$$F(s) \simeq \frac{K\, e^{-t_0 s}}{s}$$

La pulsazione ω_0 in corrispondenza della quale la funzione di risposta armonica $F(j\omega)$ interseca il cerchio unitario in un punto $B = e^{j(-\pi+M_F)}$ corrispondente ad un margine di fase M_F, si determina nel seguente modo:

$$\text{Arg}\left[\frac{K\, e^{-t_0 s}}{s}\right]_{s=j\omega_0} = -\pi + M_F \qquad \Rightarrow \qquad -t_0\omega_0 - \frac{\pi}{2} = -\pi + M_F$$

da cui si ricava:

$$\omega_0 = \frac{1}{t_0}\left(\frac{\pi}{2} - M_F\right)$$

Il valore del guadagno K a cui corrisponde un margine di fase M_F si determina imponendo che il modulo della funzione $F(j\omega)$ in corrispondenza della pulsazione ω_0 sia unitario:

$$\left|\frac{K\, e^{-t_0 s}}{s}\right|_{s=j\omega_0} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad K = \omega_0$$

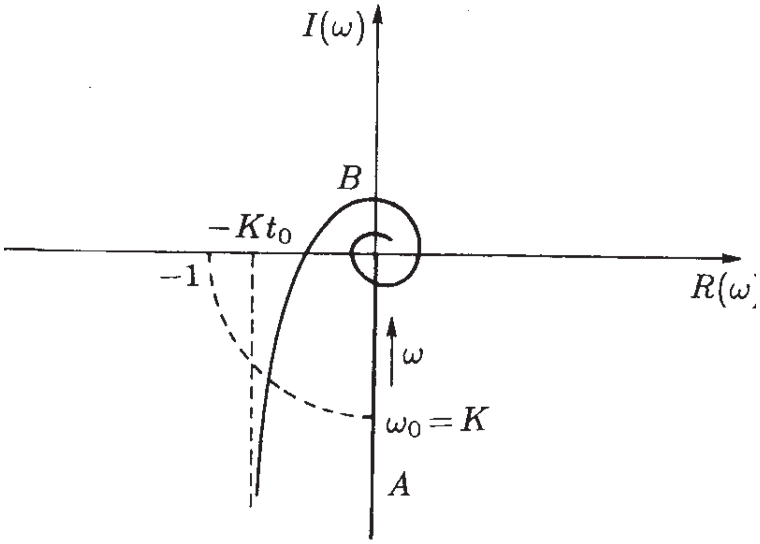
Per imporre un margine di di fase M_F al sistema $F(s)$ occorre quindi scegliere K nel seguente modo:

$$\boxed{K = \omega_0 = \frac{1}{t_0}\left(\frac{\pi}{2} - M_F\right)}$$

Il valore massimo K^* che può assumere il parametro K e che garantisce la stabilità del sistema retroazionato si determina imponendo $M_F = 0$ nella precedente equazione:

$$\boxed{K^* = \omega_0 = \frac{\pi}{2t_0}}$$

$$K = \frac{1}{t_0}\left(\frac{\pi}{2} - M_F\right) .$$



L'introduzione del polo nell'origine consente di ridurre a zero l'errore a regime nella risposta al gradino e costituisce, nella pratica, un accorgimento frequentemente adottato per la stabilizzazione dei sistemi in retroazione che presentino ritardi finiti di notevole entità.