

Esercizi sull'utilizzo delle Trasformate di Laplace

1. Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali $x(t)$:

$$x_1(t) = 2(1 + t^2) e^{5t}, \quad x_2(t) = 4 + 3e^{-3t} \sin(7t)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{2}{(s-5)} + \frac{4}{(s-5)^3}, \quad X_2(s) = \frac{4}{s} + \frac{21}{(s+3)^2 + 7^2}$$

2. Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali $x(t)$:

$$x_1(t) = 2e^{5t} \sin(8t), \quad x_2(t) = 2t^2 e^{-4t}$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{16}{(s-5)^2 + 64}, \quad X_2(s) = \frac{4}{(s+4)^3}$$

3. Scrivere, in funzione dei segnali $x(t)$ e $y(t)$, l'equazione differenziale corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3s^2 + b}{s(s^2 + 2s + a)}$$

Soluzione:

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + ay(t) = 3\ddot{x}(t) + bx(t)$$

4. Calcolare la trasformata $Y(s)$ del segnale di uscita corrispondente all'equazione differenziale $3\dot{y}(t) + 4y(t) = 0$ con condizione iniziale $y(0)$. Soluzione. Si trasforma secondo Laplace l'equazione differenziale:

$$\mathcal{L}[3\dot{y}(t) + 4y(t) = 0] \quad \rightarrow \quad 3[sY(s) - y(0)] + 4Y(s) = 0$$

da cui si ricava:

$$Y(s) = \frac{3y(0)}{3s + 4} = \frac{y(0)}{s + \frac{4}{3}} \quad \rightarrow \quad y(t) = y(0) e^{-\frac{4}{3}t}$$

5. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+}$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{bs + 3}{(s+b)(s-a) + 2} \quad \rightarrow \quad y_0 = b$$

6. Calcolare il valore il valore finale $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty}$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s-a}{(bs+3)s} \quad \rightarrow \quad y_\infty = -\frac{a}{3}$$