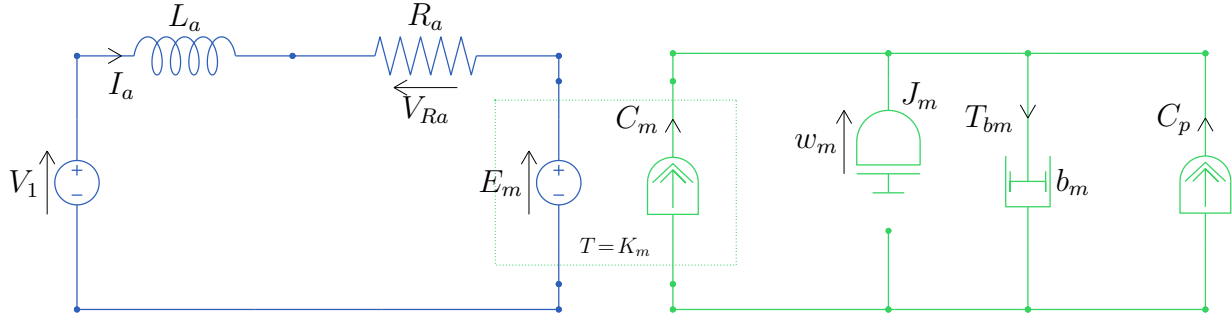
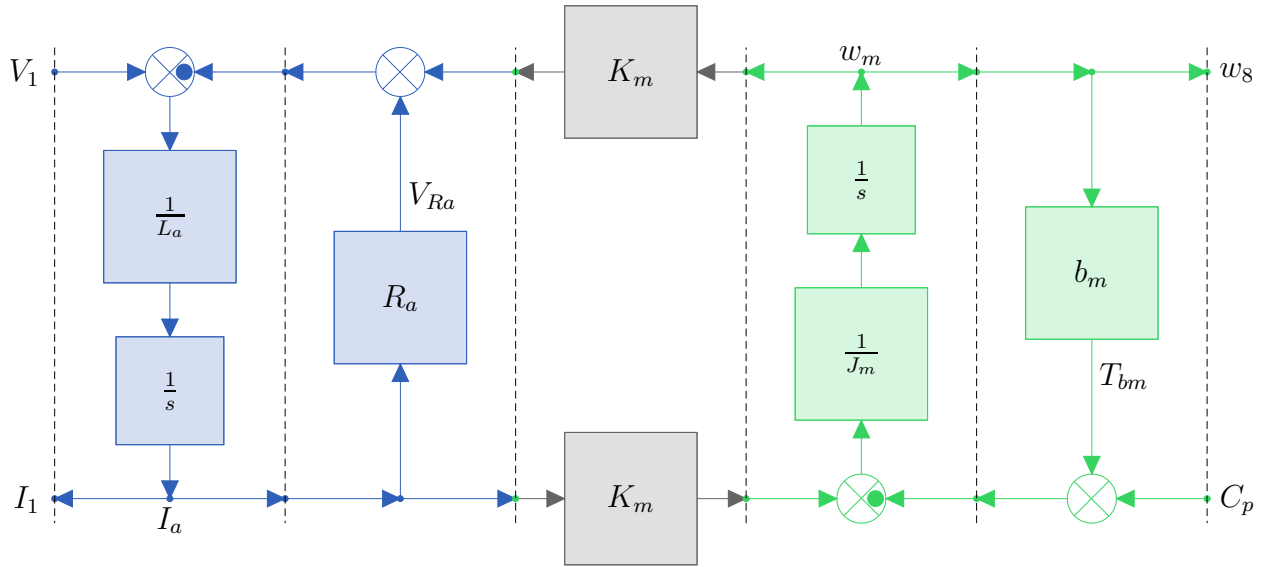


1 POG Relation: Electrical_DC_Motor

Consider the following physical physical system:



The corresponding POG block scheme is:



The state space equations of the considered system have the following structure:

$$\begin{cases} \mathbf{L} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} \end{cases}$$

where the state vector \mathbf{x} , the input vector \mathbf{u} and the output vector \mathbf{y} are defined as follows:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} I_a \\ w_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} V_1 \\ C_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} I_1 \\ w_8 \end{bmatrix}.$$

The state space equations of the considered system are the following:

$$\begin{bmatrix} L_a & 0 \\ 0 & J_m \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -R_a & -K_m \\ K_m & -b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ w_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ C_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ w_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

The characteristic polynomial $\Delta(s)$ of the considered system is:

$$\Delta(s) = (J_m L_a) s^2 + (L_a b_m + J_m R_a) s + K_m^2 + R_a b_m.$$

The transfer function $\mathbf{H}(s)$ which links the input vector $\mathbf{u}(s)$ to the output vector $\mathbf{y}(s)$, $\mathbf{y}(s) = \mathbf{H}(s) \mathbf{u}(s)$, is the following:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} b_m + J_m s & -K_m \\ K_m & R_a + L_a s \end{bmatrix}.$$

1.1 Numerical and simulation results

System parameters, input values and initial conditions:

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
SYSTEM PARAMETERS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
L_a = 0.003*H;      % 2. Inductance L_a . Internal parameter .
R_a = 1*Ohm;       % 3. Resistance R_a . Internal parameter .
K_m = 0.5;         % 5. Parameter. Transformer/Gyrator .
J_m = 0.01*kg*m^2; % 6. Inertia J_m . Internal parameter .
b_m = 0.002*N/(m/sec); % 7. Angular Friction b_m . Internal parameter .
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
INPUT VALUES %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
V_1_0 = 100*V;     % 1. Voltage V_1_0. Input value .
C_p_0 = 0*Nm;      % 8. Torque C_p_0. Input value .
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
INITIAL CONDITIONS XO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
I_a_0 = 0*A;       % 2. Current I_a_0. Initial condition .
w_m_0 = 0*rad/sec; % 6. Angular Velocity w_m_0. Initial condition .

```

The numerical value of the transfer function $H(s)$ which links the input $V_1(s)$ to the output $I_1(s)$ is:

$$H(s) = \frac{I_1(s)}{V_1(s)} = \frac{0.01s + 0.002}{0.00003s^2 + 0.010006s + 0.252}.$$

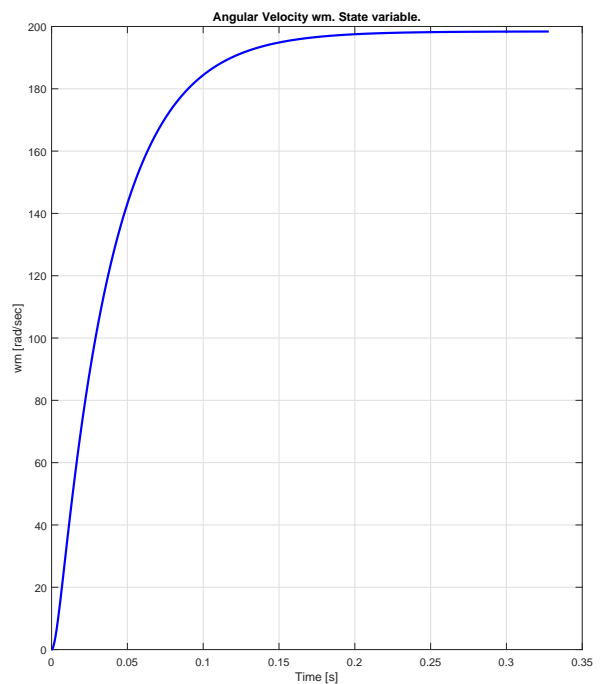
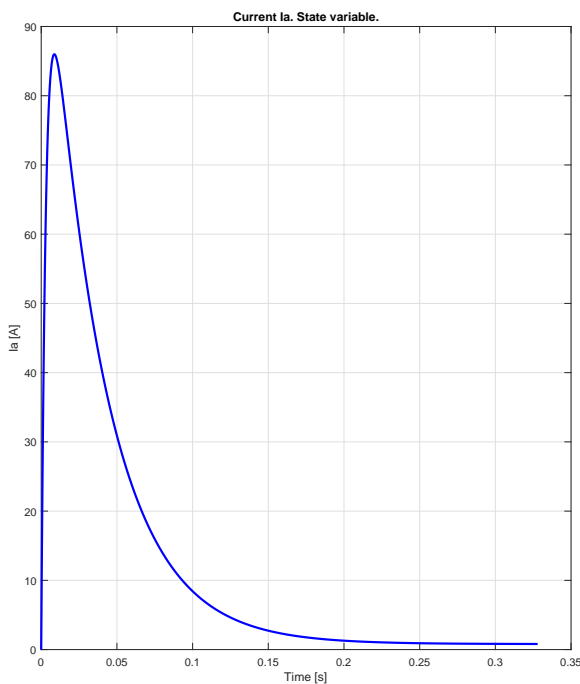
The poles of the system are the following:

$$\text{Poles} = \begin{bmatrix} -27.443 \\ -306.09 \end{bmatrix}.$$

The settling time T_s of the system is:

$$T_s = \frac{-3}{-27.443} = 0.10932 \text{ s}.$$

The time behavior of the components of the state vector \mathbf{x} obtained in simulation are the following:



Transfer function $G_V^\omega(s)$ which links the input $V_1(s)$ to the output $\omega_m(s)$ is:

$$G_V^\omega(s) = \frac{I_1(s)}{\omega_m(s)} = \frac{0.5}{0.00003.0 s^2 + 0.01001 s + 0.252}.$$

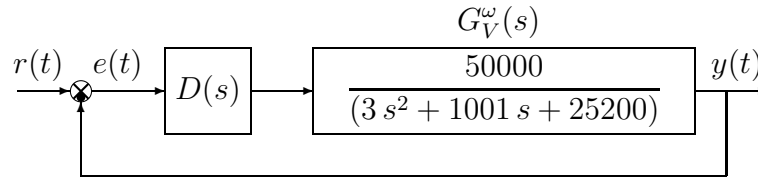
I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_V^\omega(s)$ sono mostrati in Fig. 1. Il diagramma statico $G_V^\omega(0)$ della funzione $G_V^\omega(s)$ é:

$$G_V^\omega(0) = G_V^\omega(0)|_{s=0} = 1.9841.$$

Il diagramma di Nyquist della funzione $G_V^\omega(s)$ è mostrato in Fig. 2.

2 Progetto di rete correttrice

Sia dato il seguente sistema retroazionato:



Si consideri un regolatore proporzionale $D(s) = K$.

2.1 Criterio di Routh

I valori di K per cui il sistema retroazionato è stabile si determinano con il criterio di Routh. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K \frac{50000}{(3s^2 + 1001s + 25200)} = 0 \quad \rightarrow \quad 3s^2 + 1001s + (50000K + 25200) = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 3 & 50000K + 25200 \\ 1 & 1001 & \\ 0 & 50000K + 25200 & \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna siano positivi si ricava che il sistema è stabile per:

$$K > -0.504 = -\frac{1}{G_V^\omega(0)}.$$

Questo risultato é evidente anche guardando il digramma di Nyquist della funzione $G_V^\omega(s)$ mostrato in Fig. 2.

2.2 Luogo delle radici

Il luogo delle radici puó essere utilizzato per vedere se un regolatore proporzionale é sufficiente o meno per poter ottenere le prestazioni desiderata dal sistema retroazionato. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G_V^\omega(s)$ per $K > 0$ é mostrato in Fig. 3. Il luogo delle radici é caratterizzato da due asintoti. La posizione degli asintoti é mostrata in Fig. 3. Il centro degli asintoti σ_a é il seguente:

$$\sigma_a = \frac{1}{2} (-27.42 - 306.23) = -166.83.$$

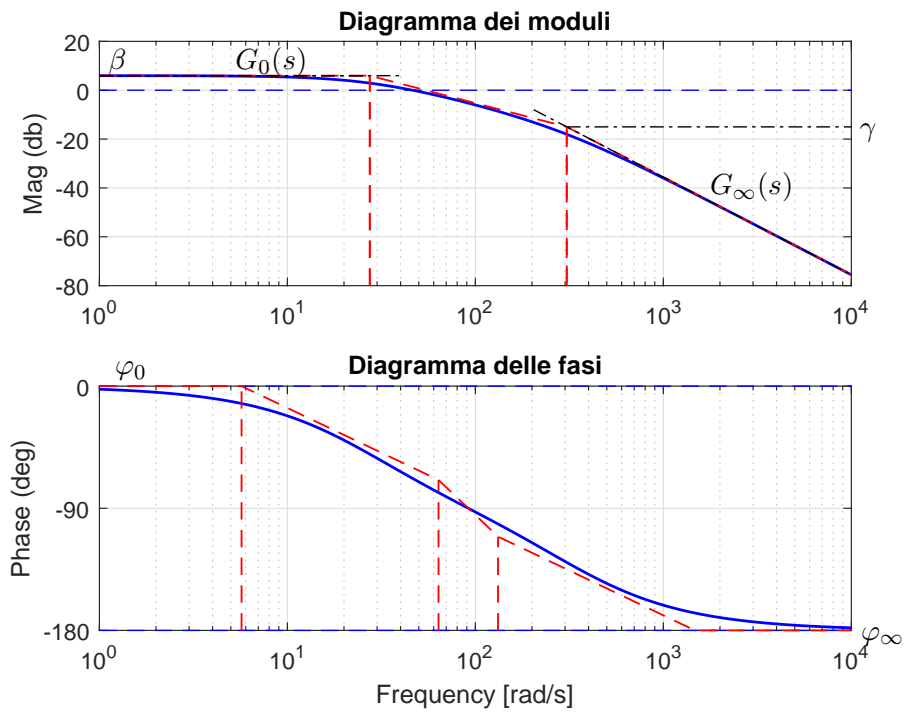


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G_V^\omega(s)$.

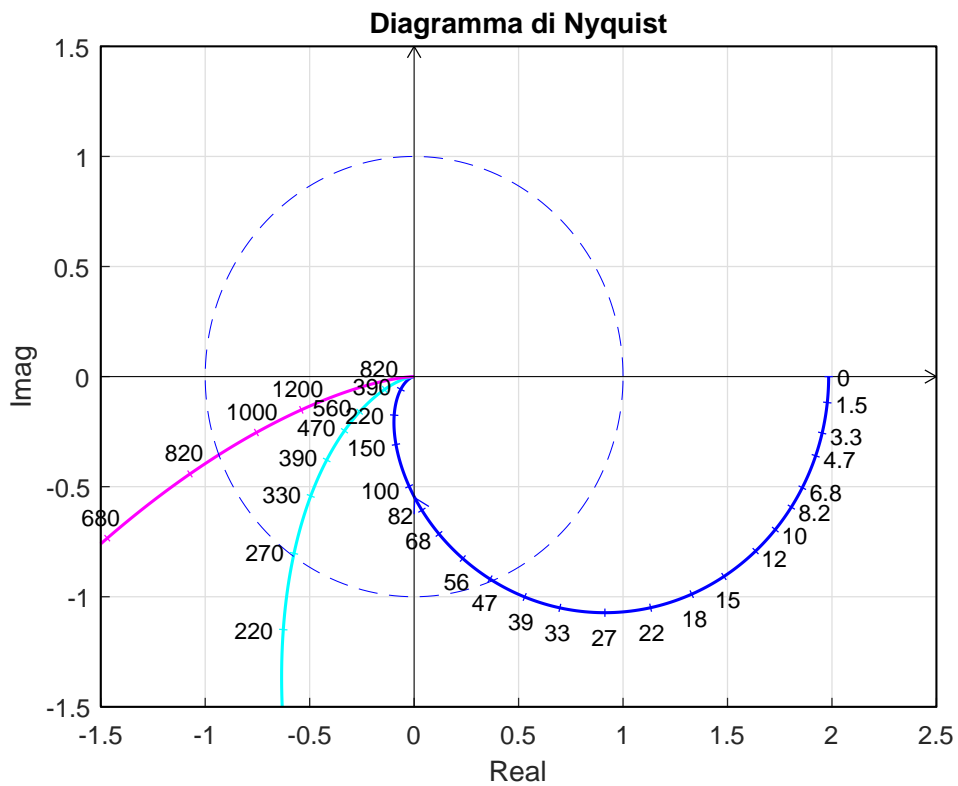


Figura 2: Il diagramma di Nyquist della funzione $G_V^\omega(s)$.

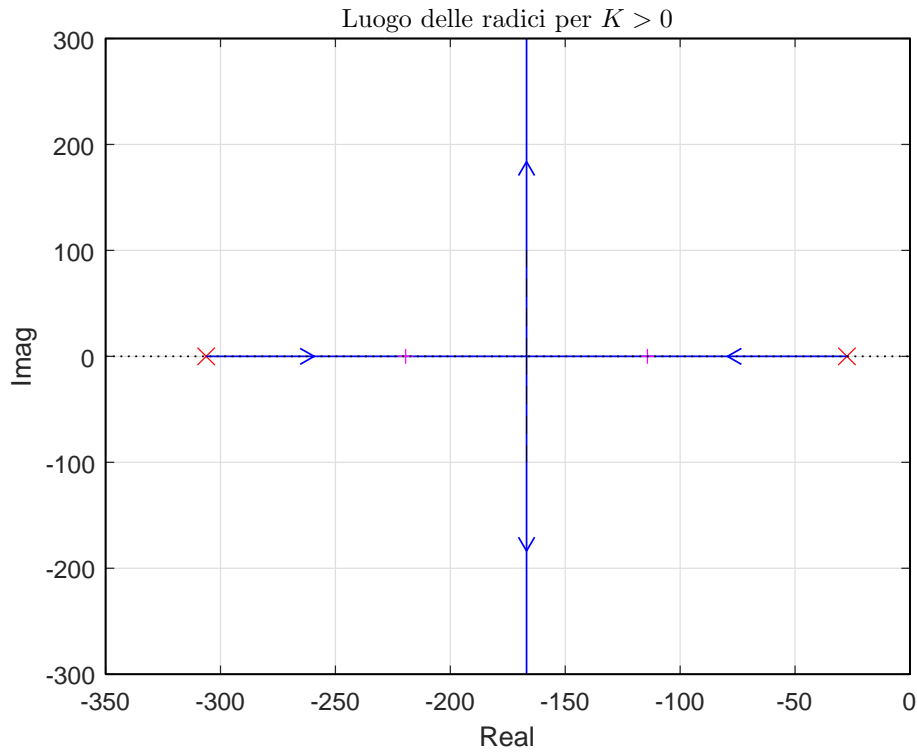


Figura 3: Luogo delle radici del sistema $G_V^\omega(s)$ al variare di $K > 0$

Un buon transitorio nella risposta al gradino del sistema retroazionato si ottiene posizionando, grossomodo, i poli dominanti del sistema retroazionato nel seguente punto del luogo delle radici:

$$p_{1,2} = -166.83 \pm j 300.$$

Il corrispondente valore di K si determina utilizzando la seguente formula:

$$K_s = - \frac{1}{G_V^\omega(s)} \Big|_{s=-166.83+j 300} = 6.57.$$

Il sistema retroazionato che si ottiene utilizzando un guadagno proporzionale $K_s = 6.57$ può essere calcolato usando la formula di Mason:

$$G_{\omega_{ref}}^\omega(s) = \frac{K_s G_V^\omega(s)}{1 + K_s G_V^\omega(s)}.$$

Il diagramma di Nyquist della funzione $K_s G_V^\omega(s)$ è mostrato in ciano in Fig. 2. La risposta al gradino del sistema ad anello aperto $G_V^\omega(s)$ e del sistema retroazionato $G_{\omega_{ref}}^\omega(s)$ sono mostrati in Fig. 4, rispettivamente graficati in blue e in ciano.

Utilizzando un controllore proporzionale $D(s) = K_s$ si ottiene un buon transitorio, ma si ottiene un errore a regime e_p troppo elevato:

$$e_p = \frac{R_0}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + 6.57 \cdot 1.984} = 0.0713 = 7.13 \%.$$

where R_0 , $K_p = K_s G_V^\omega(0)$ and $G_V^\omega(0) = 1.9841$. Per ottenere un errore a regime più piccolo, $e_p = 0.01$, occorre utilizzare un guadagno K_e che soddisfa la seguente relazione:

$$e_p = \frac{R_0}{1 + K_p} = \frac{R_0}{1 + K_e G_V^\omega(0)} = 0.01 \quad \rightarrow \quad K_e = \frac{\frac{R_0}{e_p} - 1}{G_V^\omega(0)} \simeq 50$$

Se si utilizza un guadagno $K_e = 50$ si ottiene la risposta al gradino mostrata in magenta in figura Fig. 5. In questo caso il valore a regime è $y_\infty \simeq 0.99$. Il diagramma di Nyquist della funzione

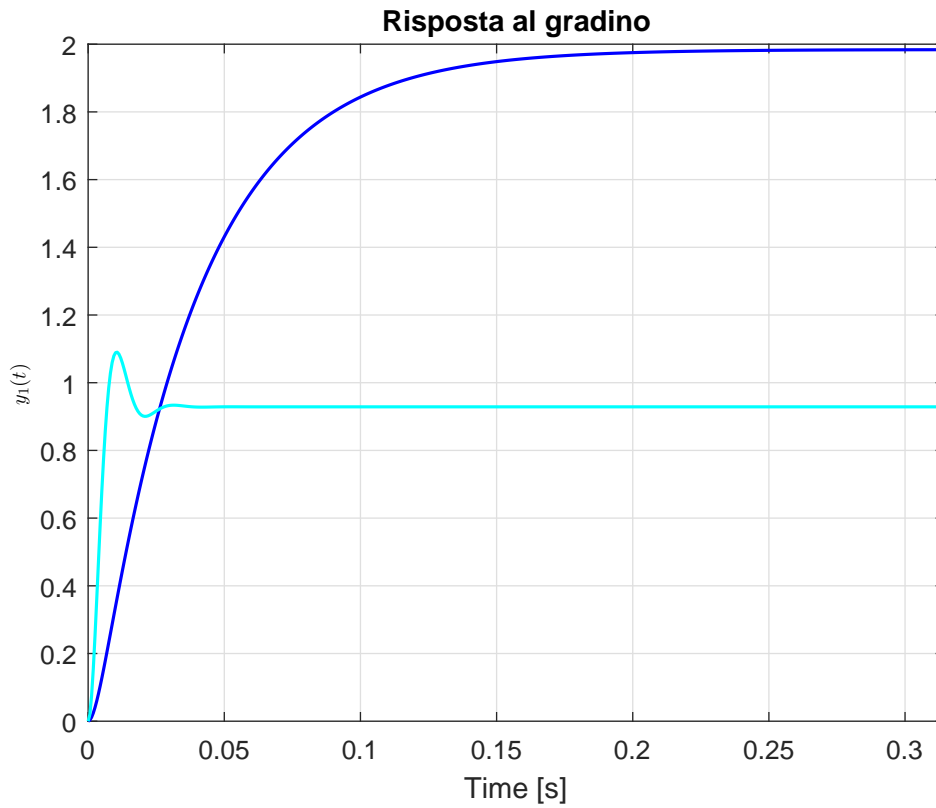


Figura 4: Risposta al gradino del sistema ad anello aperto $G_V^\omega(s)$ e del sistema retroazionato $G_{\omega_{ref}}^\omega(s)$.

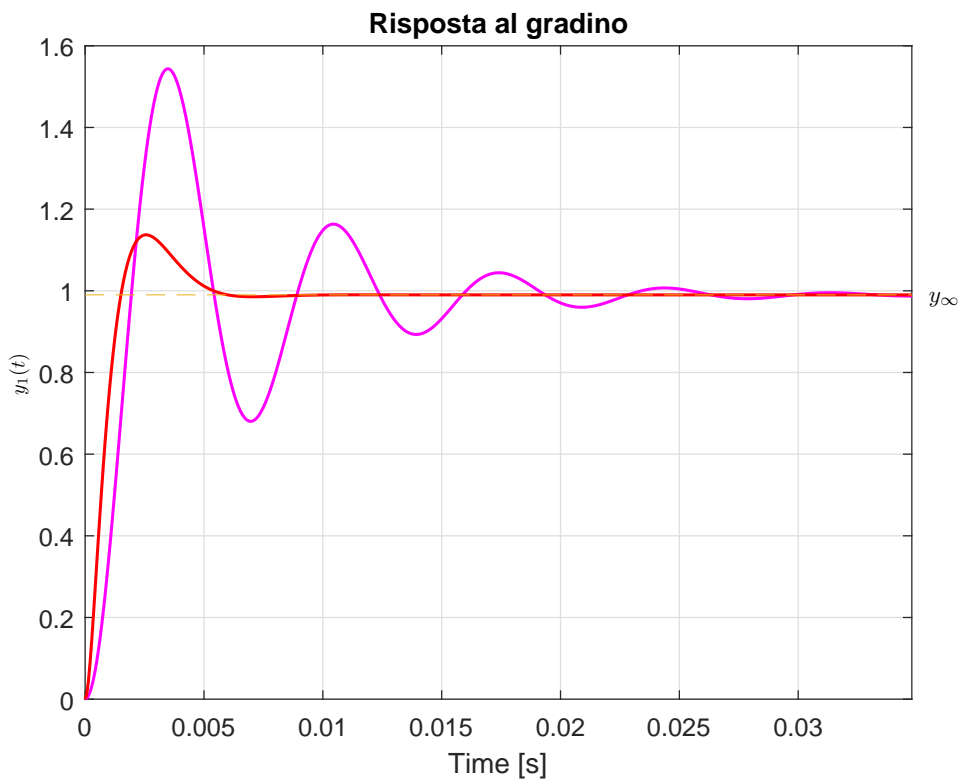


Figura 5: Risposta al gradino del sistema retroazionato $G_0(s)$ utilizzando un guadagno $K_e = 50$.

$K_e G_V^\omega(s)$ è mostrato in magenta in Fig. 2. Utilizzando il guadagno $K_e = 50$ si ottiene il valore a regime desiderato, ma una massima sovraelongazione troppo elevata. Si può ovviare a questo problema mettendo in cascata al guadagno K_e una rete correttrice.

2.3 Sintesi di una rete anticipatrice

Si progetti una rete anticipatrice in modo da imporre un margine di fase $M_\varphi = 60^\circ$. Soluzione. La posizione del punto B è completamente determinata dalla specifica di progetto $B = M_B e^{j\varphi_B}$: $M_B = 1$ e $\varphi_B = 240^\circ$. La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 6. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 1200$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.5606, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 195.6^\circ.$$

Sostituendo i valori di M , φ e ω all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 0.001274$ e $\tau_2 = 0.0001837$ della rete correttrice $C_1(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 1.784, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 44.37^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 0.001274s)}{(1 + 0.0001837s)}.$$

I diagrammi di Nyquist delle funzioni $K_e G_V^\omega(s)$ e $K_e C_1(s) G_V^\omega(s)$ sono mostrati in Fig. 6. La

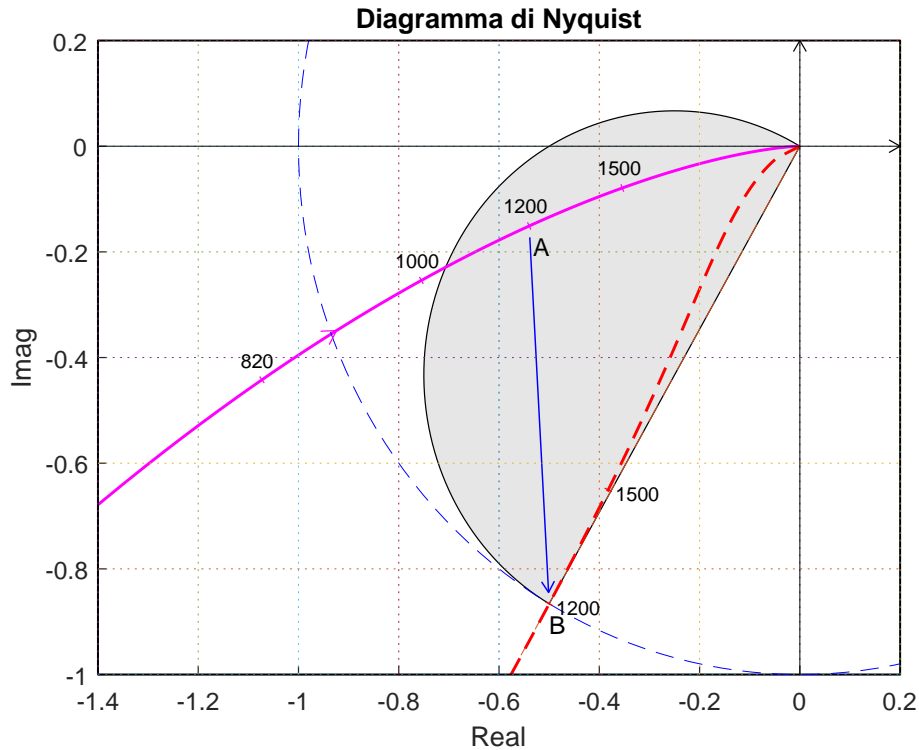


Figura 6: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $K_e G_V^\omega(s)$ e $K_e C_1(s) G_V^\omega(s)$.

risposta al gradino del sistema con rete correttrice $K_e C_1(s) G_V^\omega(s)$ chiuso in retroazione è mostrata in rosso in Fig. 5. I poli e il tempo di assestamento del sistema retroazionato $K_e G_V^\omega(s)$ senza rete correttrice sono:

$$p_{1,2} = -166.77 + 901.22j, \quad T_a = \frac{3}{166.77} = 0.0180.$$

I poli e il tempo di assestamento del sistema retroazionato $K_e C_1(s) G_V^\omega(s)$ con rete correttrice sono:

$$p_{1,2} = -771.6 \pm 697.7j, \quad p_3 = -4195.5, \quad T_a = \frac{3}{4195.5} = 0.000715.$$

Il tempo di assestamento che si ottiene utilizzando una rete correttrice C_1 è molto più breve di quello che si ottiene senza rete correttrice.

2.4 Sintesi di un regolatore con azione integrale per avere un errore a regime nullo

Se si desidera avere un errore a regime nullo allora si deve inserire un'azione integrale nel regolatore. Sia $G_I(s)$ il sistema di partenza $G_V^\omega(s)$ con in cascata un integratore:

$$G_I(s) = \frac{G_V^\omega(s)}{s} = \frac{50000}{s(3s^2 + 1001s + 25200)}.$$

Il diagramma di Nyquist delle funzione $G_I(s)$ è mostrato in blu in Fig. 7. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G_I(s)$ per $K > 0$ è mostrato in Fig. 8. Il luogo delle radici è caratterizzato dalla presenza di 3 asintoti. La posizione degli asintoti è mostrata in figura. Il miglior transitorio nella risposta al gradino si ottiene posizionando i poli sul punto doppio σ_0 . Il valore del punto doppio e il corrispondente tempo di assestamento sono i seguenti:

$$\sigma_0 = -13.396, \quad T_a = \frac{3}{13.396} = 0.2239.$$

Il corrispondente valore K_I del guadagno K si determina utilizzando la seguente formula:

$$K_I = - \left. \frac{1}{G_I(s)} \right|_{s=-13.396} \simeq 3.3.$$

In questo caso non conviene utilizzare solo un'azione integrale e il guadagno K_I perché il tempo di assestamento che si ottiene in questo caso ($T_a = 0.2239$) è peggiore di quello che si è ottenuto nella sezione precedente ($T_a = 0.000715$). In questo conviene aumentare il guadagno K_I fino portare il diagramma di Nyquist della funzione $K_I G_I(s)$ in una zona utile per poter poi progettare una adeguata rete anticipatrice. Se si utilizza un guadagno $K_I = 40$ si ottiene il diagramma di Nyquist mostrato in ciano in Fig. 7. Per la nuova funzione è agevole progettare una rete anticipatrice che imponga al sistema retroazionato un margine di fase $M_\varphi = 60^\circ$.

Soluzione. La posizione del punto B è completamente determinata dalla specifica di progetto $B = M_B e^{j\varphi_B}$: $M_B = 1$ e $\varphi_B = 240^\circ$. La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 9. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 68$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.4262, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 189.4^\circ.$$

Sostituendo i valori di M , φ e ω all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 0.03258$ e $\tau_2 = 0.003983$ della rete corretttrice $C_2(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 2.346, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 50.55^\circ \quad \rightarrow \quad C_2(s) = \frac{(1 + 0.03258s)}{(1 + 0.003983s)}.$$

I diagrammi di Nyquist delle funzioni $K_I G_I(s)$ e $K_I C_2(s) G_I(s)$ sono mostrati in Fig. 9.

La risposta al gradino unitario dei sistemi $G_I(s)$ (blu), $K_I G_I(s)$ (magenta) e $K_I C_2(s) G_I(s)$ (rosso) sono mostrati in Fig. 10. I poli e il tempo di assestamento del sistema retroazionato con rete corretttrice $K_I C_2(s) G_I(s)$ sono:

$$p_{1,2} = -76.91 \pm 83.77j, \quad p_3 = -398.28, \quad p_4 = -32.49, \quad T_a = \frac{3}{32.49} = 0.0923.$$

Il tempo di assestamento che si è ottenuto in questo caso ($T_a = 0.0923$) è comunque notevolmente superiore a quello ottenuto in precedenza ($T_a = 0.000715$) senza l'azione integrale e utilizzando un guadagno $K_e = 50$.

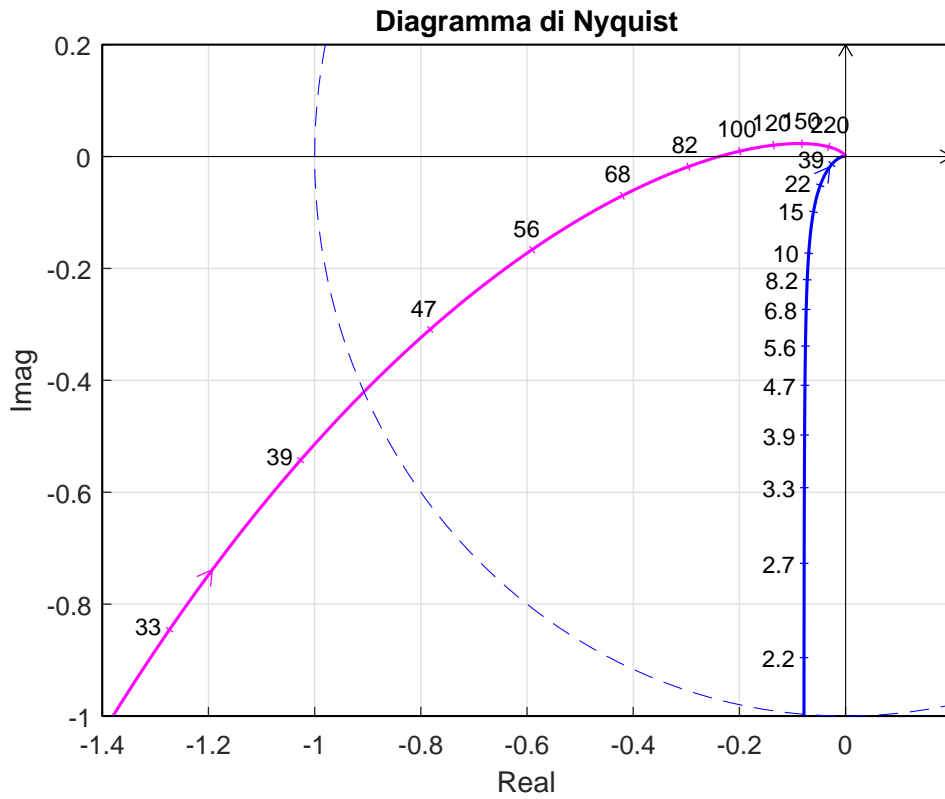


Figura 7: Diagrammi di Nyquist della funzione $G_I(s)$ (blu) e della funzione $K_I G_I(s)$ (magenta).

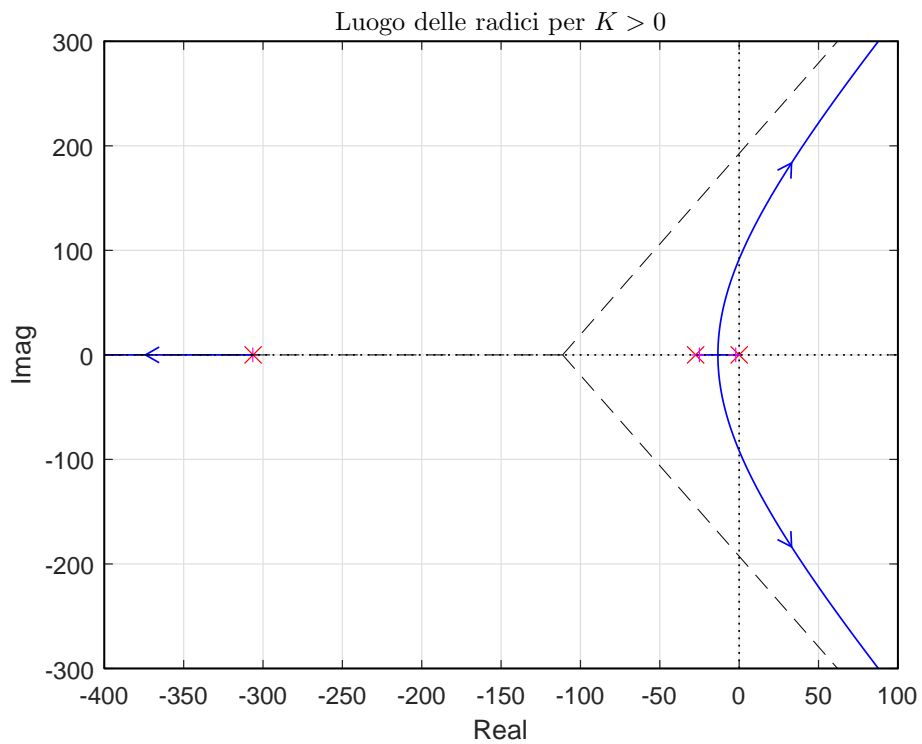


Figura 8: Luogo delle radici del sistema $G_I(s)$ al variare di $K > 0$

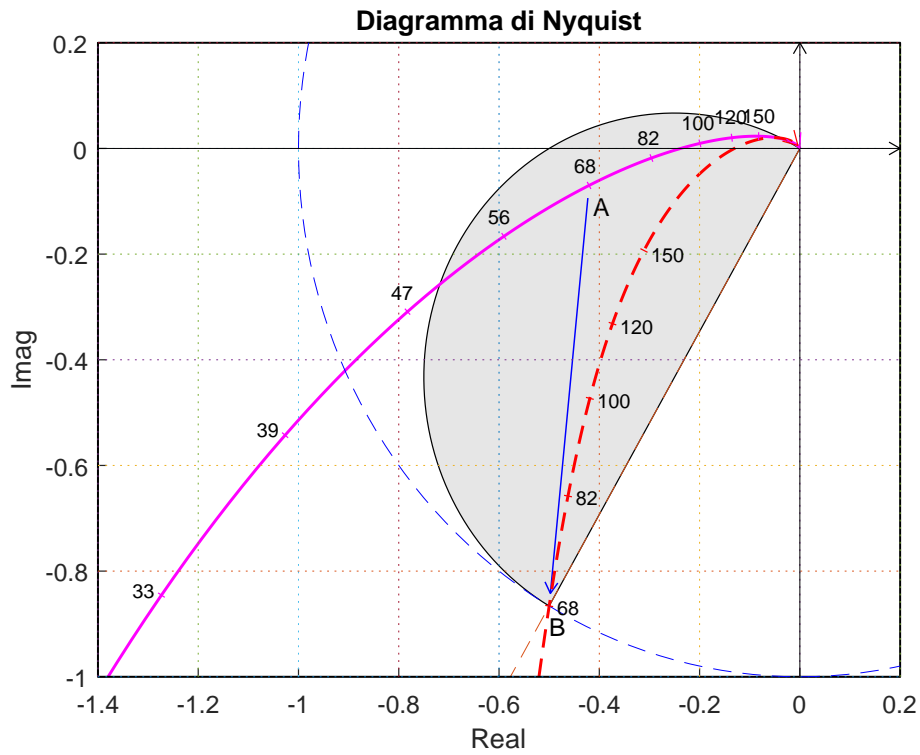


Figura 9: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $K_I G_I(s)$ e $K_I C_2(s) G_I(s)$.

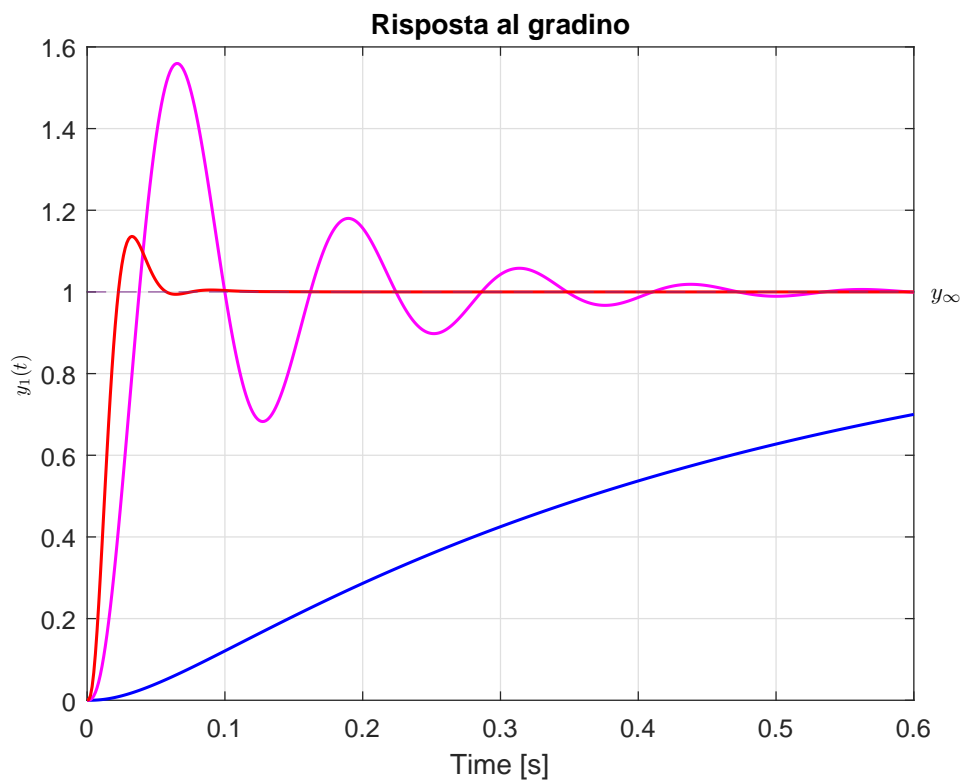


Figura 10: Risposta al gradino dei sistemi retroazionati $G_I(s)$ (blu), $K_I G_I(s)$ (magenta) e $K_I C_2(s) G_I(s)$ (rosso).

2.5 Controllo in cascata di un motore elettrico in corrente continua

Se si hanno a disposizione anche le misure della corrente del motore I_1 e della posizione angolare del motore Th_m , é possibile realizzare un controllo “in cascata” del motore elettrico utilizzando lo schema mostrato in Fig. 11. Questo tipo di controllo in cascata prevede un primo controllo di corrente interno, un secondo controllo di velocità centrale e infine un controllo di posizione piú esterno.

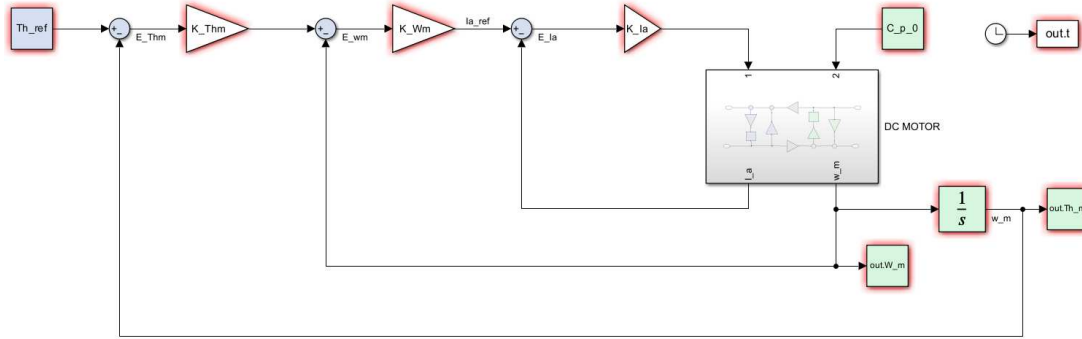


Figura 11: Controllo in cascata di un motore elettrico.

2.5.1 Controllo in corrente

Nel sistema in esame, la funzione di trasferimento $G_{V_1}^{I_1}(s)$ che lega la tensione V_1 alla corrente I_1 é la seguente:

$$G_{V_1}^{I_1}(s) = \frac{0.01s + 0.002}{0.00003s^2 + 0.01001s + 0.252}$$

Il sistema $G_{V_1}^{I_1}(s)$ ha grado relativo $r = 1$, per cui il corrispondente controllore puó essere realizzato semplicemente utilizzando un controllo proporzionale molto elevato, eventualmente saturato se la tensione a disposizione é limitata. Il sistema $G_{V_1}^{I_1}(s)$ ha un guadagno statico $G_0 = 0.0079$. L'errore a regime e_p per ingresso a gradino assume il valore $e_p = 0.01$ solo se si utilizza il seguente guadagno:

$$K_{I_1} = \frac{\frac{R_0}{e_p} - 1}{G_0} = \frac{99}{0.0079} = 12532.$$

Utilizzando un guadagno $K_{I_1} = 12532$ si ottiene il seguente sistema retroazionato

$$G_{I_{ref}}^{I_1}(s) = \frac{K_{I_1} G_{V_1}^{I_1}(s)}{1 + K_{I_1} G_{V_1}^{I_1}(s)} = \frac{4.177e06s + 8.355e05}{s^2 + 4.178e06s + 8.439e05}$$

I poli e gli zeri del sistema $G_{I_{ref}}^{I_1}(s)$ sono i seguenti:

$$p_1 = -4177333, \quad p_2 = -0.2020, \quad z_1 = -0.2.$$

Si noti che il polo p_2 si cancella quasi perfettamente con lo zero z_1 , per cui il polo dominante del sistema $G_{I_{ref}}^{I_1}(s)$ risulta essere il polo $p_1 = -4177333$. A tale polo corrisponde un tempo di assestamento $T_a = \frac{3}{|p_1|} = 0.718 \cdot 10^{-6}$. La risposta al gradino del sistema $G_{I_{ref}}^{I_1}(s)$ é mostrata in Fig. 12.

2.5.2 Controllo di velocità

Dopo aver messo a punto il controllo di corrente si deve ora calcolare la nuova funzione di trasferimento $G_{I_{ref}}^{w_m}(s)$ che lega il riferimento di corrente I_{ref} alla velocità angolare ω_m del motore. Tale

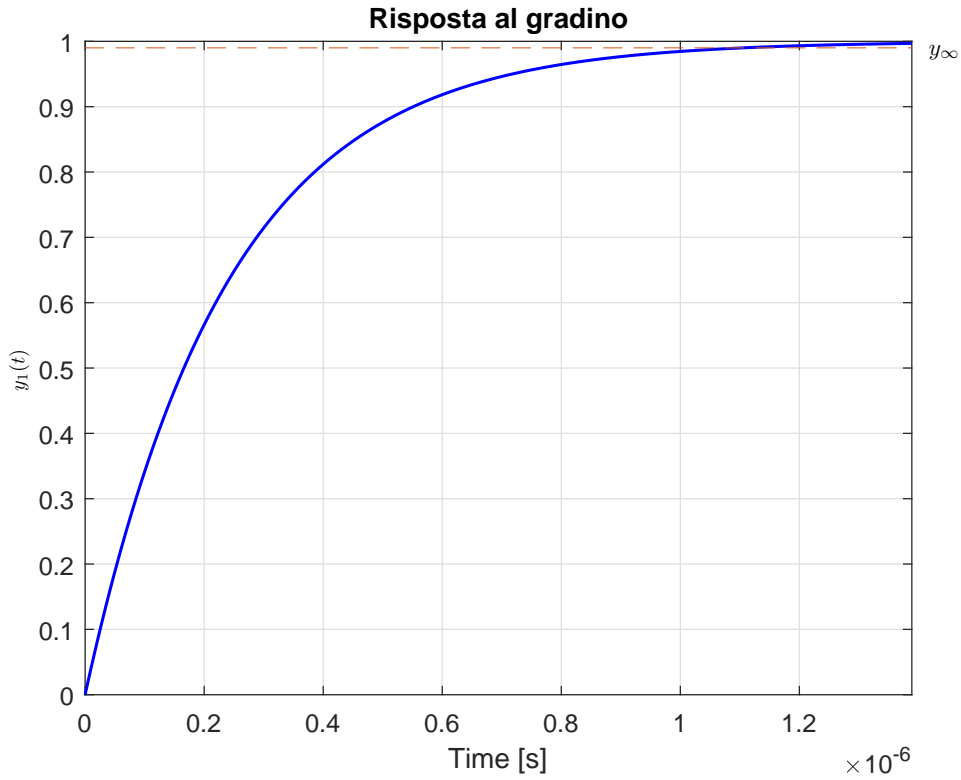


Figura 12: Risposta al gradino del sistema $G_{I_{ref}}^{I_1}(s)$. Tempo di assestamento $T_a = 0.718 \cdot 10^{-6}$.

funzione si determina applicando il controllo di corrente al sistema originario:

$$V_1 = K_I(I_{ref} - I_1)$$

e poi calcolando la funzione di trasferimento che lega il riferimento di corrente I_{ref} alla velocità angolare ω_m del motore. Tale funzione di trasferimento $G_{I_{ref}}^{w_m}(s)$ può essere calcolata utilizzando la formula di Mason, oppure applicando direttamente la legge di controllo $V_1 = K_I(I_{ref} - I_1)$ nello spazio degli stati:

$$G_{I_{ref}}^{w_m}(s) = \frac{2.089e08}{s^2 + 4.178e06s + 8.439e05}$$

La funzione di trasferimento $G_{I_{ref}}^{w_m}(s)$ è caratterizzata da un guadagno statico $G_0 = 247.51$, da un grado relativo $r = 2$ e dai seguenti due poli:

$$p_1 = -4.1777e^6, \quad p_2 = -0.2020.$$

Il polo p_1 è il polo elettrico del motore che si è diventato molto veloce (cioè a parte reale molto negativa) per l'azione del controllo di corrente. Il polo p_2 , invece, descrive sostanzialmente il polo meccanico del motore elettrico. Tale polo coincide con il polo dominante della precedente funzione $G_{I_{ref}}^{I_1}(s)$. Essendo il polo p_1 praticamente trascurabile, perché è a parte reale molto negativa, il nuovo sistema da controllare $G_{I_{ref}}^{w_m}(s)$ è sostanzialmente un sistema del primo ordine, per cui il controllo di velocità potrà essere fatto, anche in questo caso, con un semplice controllore proporzionale K_{w_m} che imponga un errore a regime e_p sufficientemente piccolo, come ad esempio $e_p = 0.001$:

$$K_{w_m} = \frac{\frac{R_0}{e_p} - 1}{G_0} = \frac{999}{247.51} \simeq 4.$$

Utilizzando il guadagno $K_{w_m} = 4$, si ottiene il seguente sistema retroazionato:

$$G_{w_{ref}}^{w_m}(s) = \frac{K_{w_m} G_{I_{ref}}^{w_m}(s)}{1 + K_{w_m} G_{I_{ref}}^{w_m}(s)} = \frac{8.43e08}{s^2 + 4.178e06s + 8.439e08}$$

che ha un guadagno statico $G_0 = 0.999$ e i seguenti due poli:

$$p_1 = -4.1777e06, \quad p_2 \simeq -202.$$

Al polo dominante p_2 corrisponde un tempo di assestamento $T_a = \frac{3}{p_2} = 0.0149$. La risposta al gradino unitario del sistema $G_{w_{ref}}^{w_m}(s)$ é mostrata in Fig. 13.

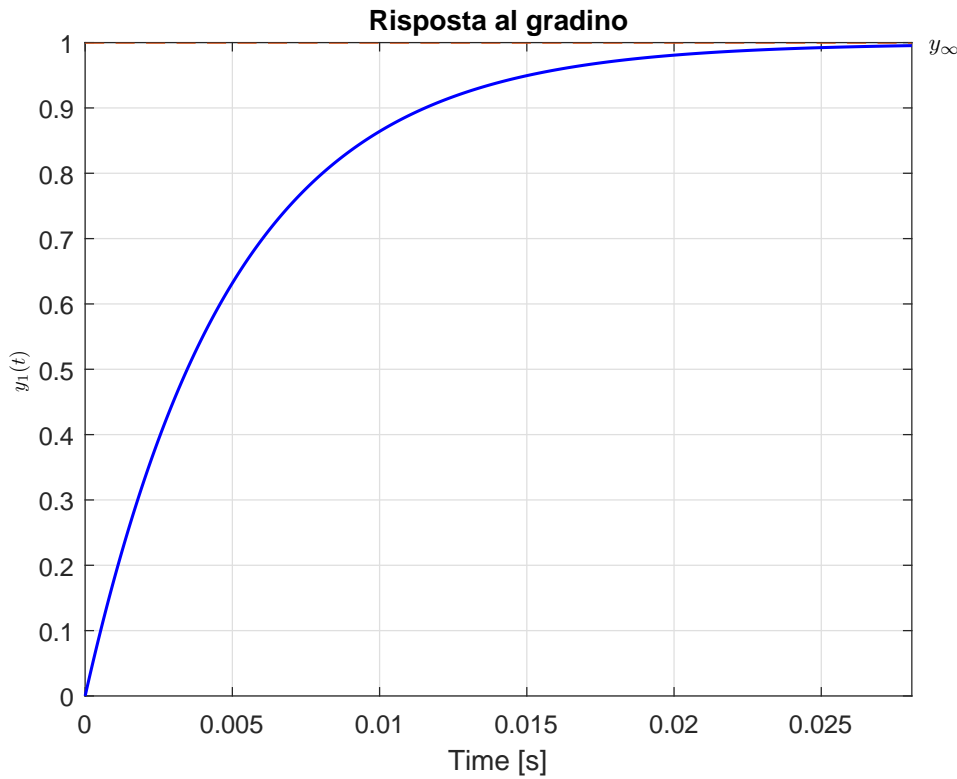


Figura 13: Risposta al gradino unitario del sistema $G_{w_{ref}}^{w_m}(s)$.

2.5.3 Controllo di posizione

Per il controllo di posizione si deve fare ora riferimento alla seguente funzione di trasferimento $G_{w_{ref}}^{Th_m}(s)$ che lega w_{ref} alla posizione angolare Th_m del motore:

$$G_{w_{ref}}^{Th_m}(s) = \frac{G_{w_{ref}}^{w_m}(s)}{s} = \frac{8.43e08}{s(s^2 + 4.178e06s + 8.439e08)}$$

Il controllore da utilizzare in questo caso non deve contenere l'azione integrale perché il sistema $G_{w_{ref}}^{Th_m}(s)$ é già di tipo 1. In questo caso basterá utilizzare un controllore proporzionale con in cascata, eventualmente, una rete anticipatrice. I diagrammi di Nyquist delle funzioni $100 G_{w_{ref}}^{Th_m}(s)$ (in blu) e $2000 G_{w_{ref}}^{Th_m}(s)$ (in ciano) sono mostrate in Fig. 14. Se si preferisce utilizzare solo il controllo proporzionale $K_{Th_m} = 100$, il margine di fase del sistema retroazionato risulterà comunque sufficientemente ampio, si veda il digramma blu in Fig. 14. Se invece si decidesse di utilizzare il controllo proporzionale $K_{Th_m} = 2000$, allora occorrerà progettare anche una rete anticipatrice da porre in cascata al sistema da controllare.

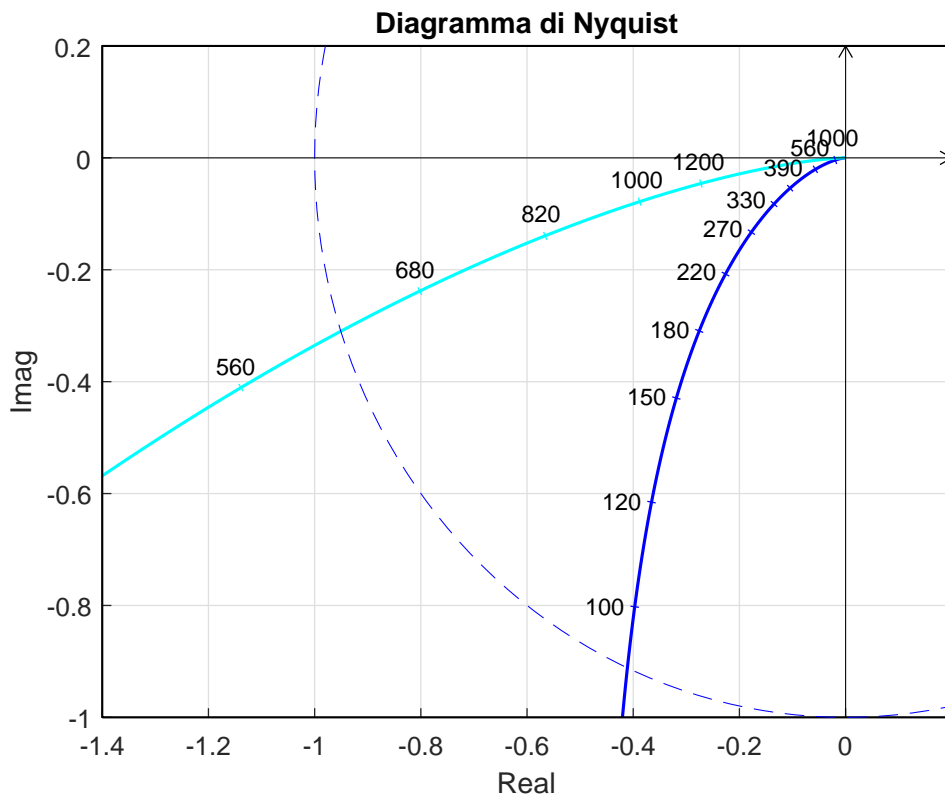


Figura 14: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $100 G_{wref}^{Thm}(s)$ e $2000 G_{wref}^{Thm}(s)$.