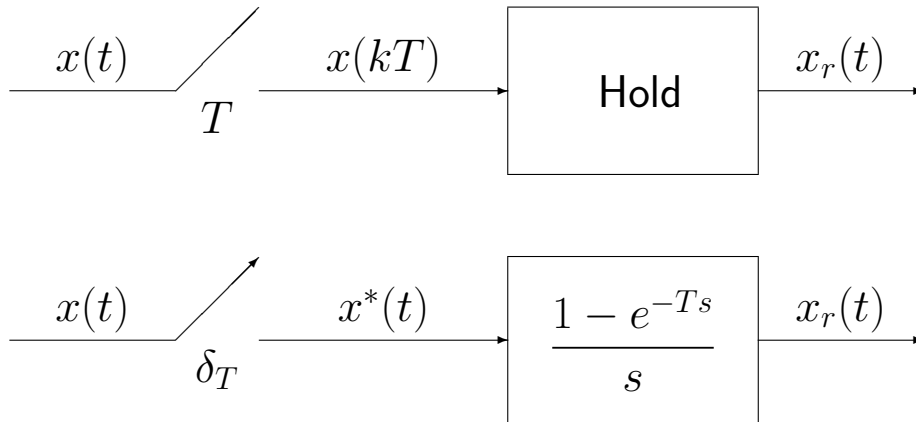


- CAMPIONAMENTO E RICOSTRUZIONE

- L'uscita del ricostruttore di ordine zero vale:

$$X_r(s) = H_0(s) X^*(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} X^*(s)$$



$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}$$

$$z = e^{sT}$$

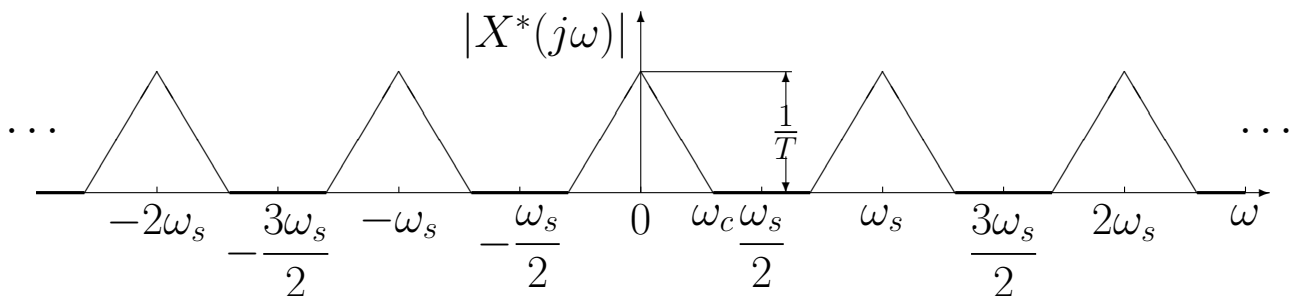
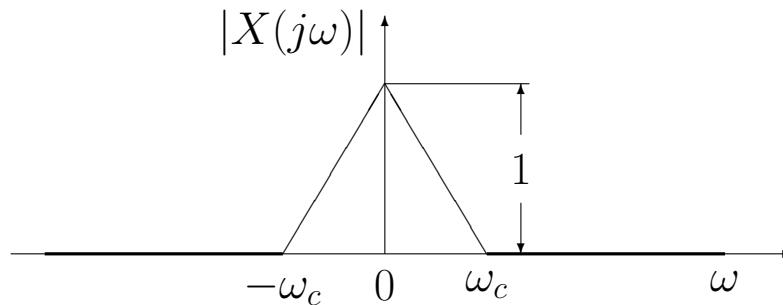
 \longleftrightarrow

$$s = \frac{1}{T} \ln z$$

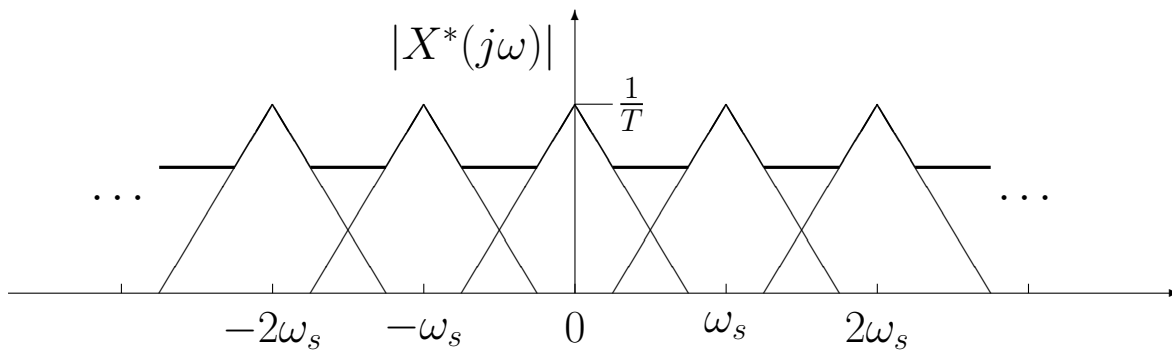
$$X^*(s) \Big|_{s = \frac{1}{T} \ln z} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} = X(z)$$

- L'andamento spettrale del segnale campionato vale:

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j\omega - j n\omega_s)$$



- La condizione $\omega_s > 2\omega_c$ mantiene distinto lo spettro originario dalle componenti complementari per cui, mediante filtraggio, è possibile ricostruire completamente il segnale $x(t)$
- Nel caso in cui la condizione $\omega_s > 2\omega_c$ non sia rispettata:



- Lo spettro originario è parzialmente sovrapposto alle componenti complementari contigue per cui mediante filtraggio non è più possibile ricavare il segnale originario a partire dal segnale campionato

Correspondence between s and z planes

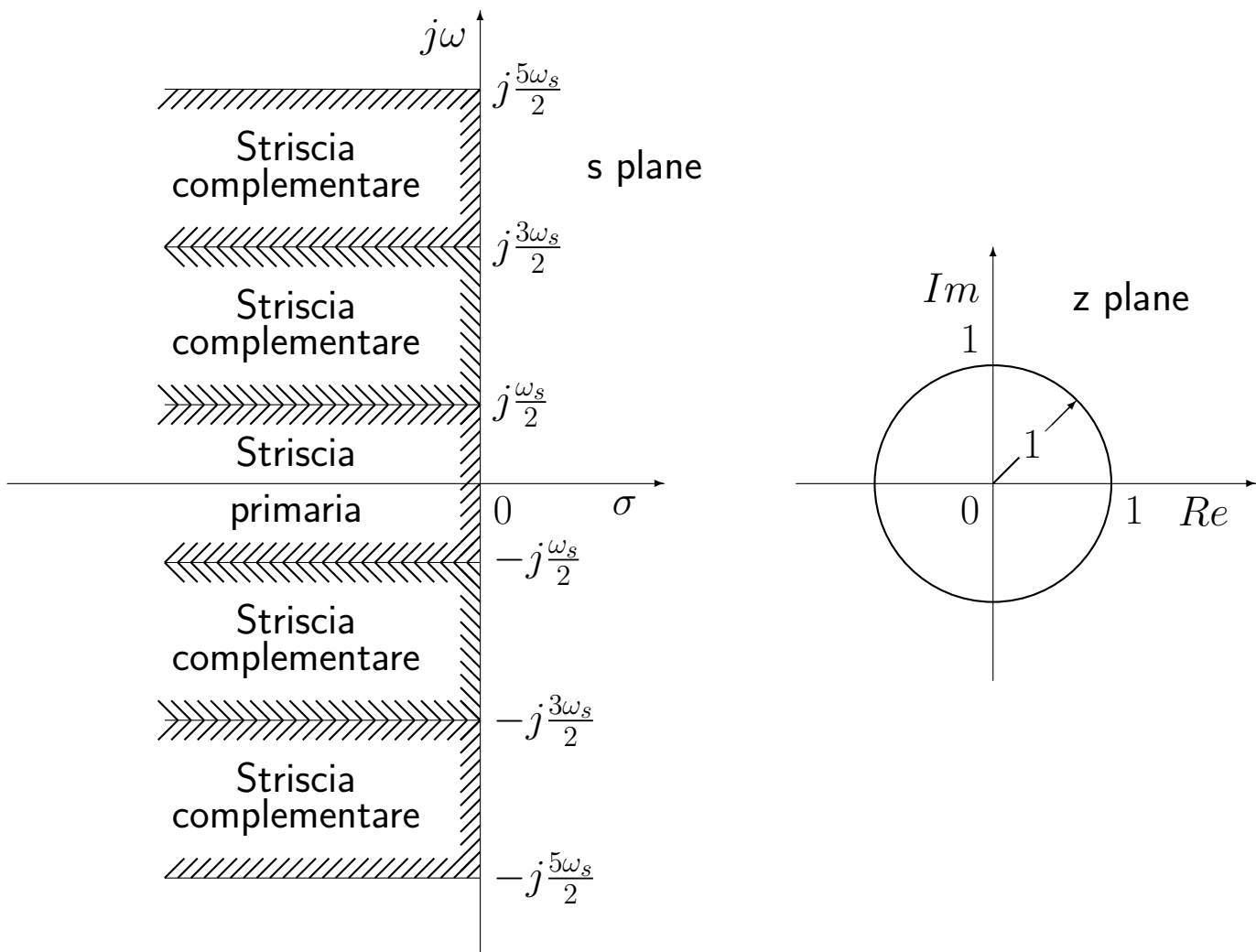
- Le variabili complesse s e z sono legate dalla relazione:

$$z = e^{sT}$$

- Posto $s = \sigma + j\omega$ si ha:

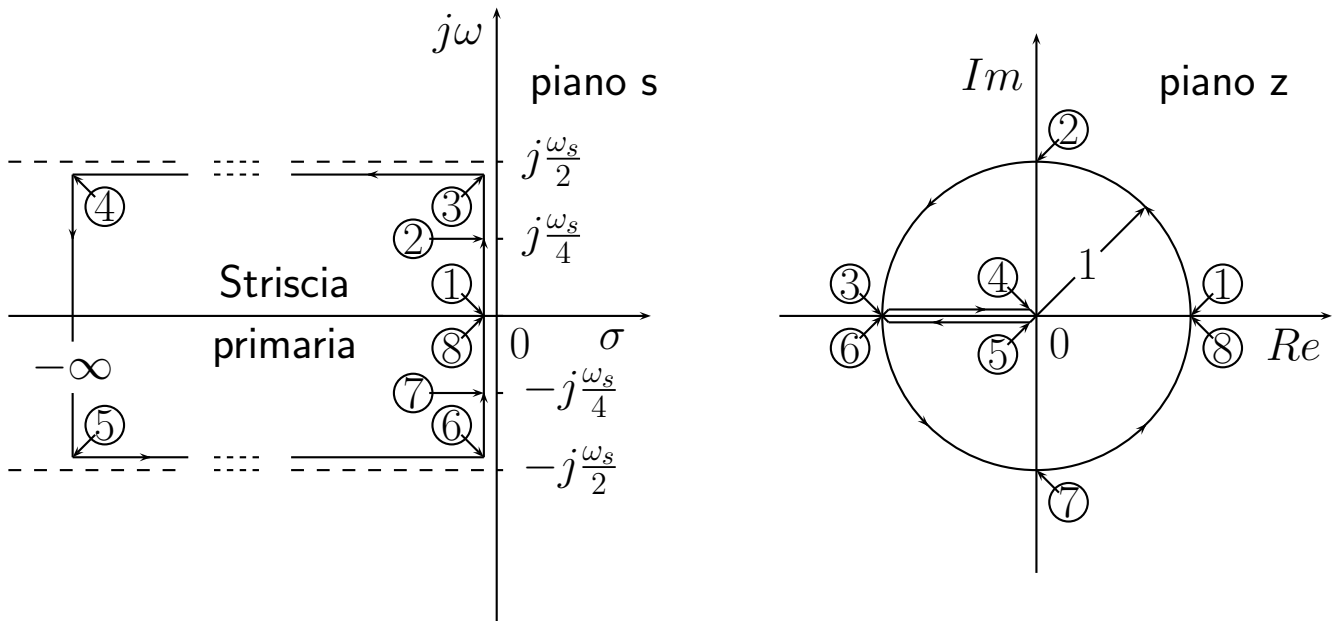
$$z = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{T\sigma} e^{jT\omega} = e^{T\sigma} e^{jT(\omega + \frac{2k\pi}{T})}$$

- Function $z = e^{sT}$ does NOT define a biunivocal correspondence between the s and z plane.
- Striscia primaria e strisce complementari:

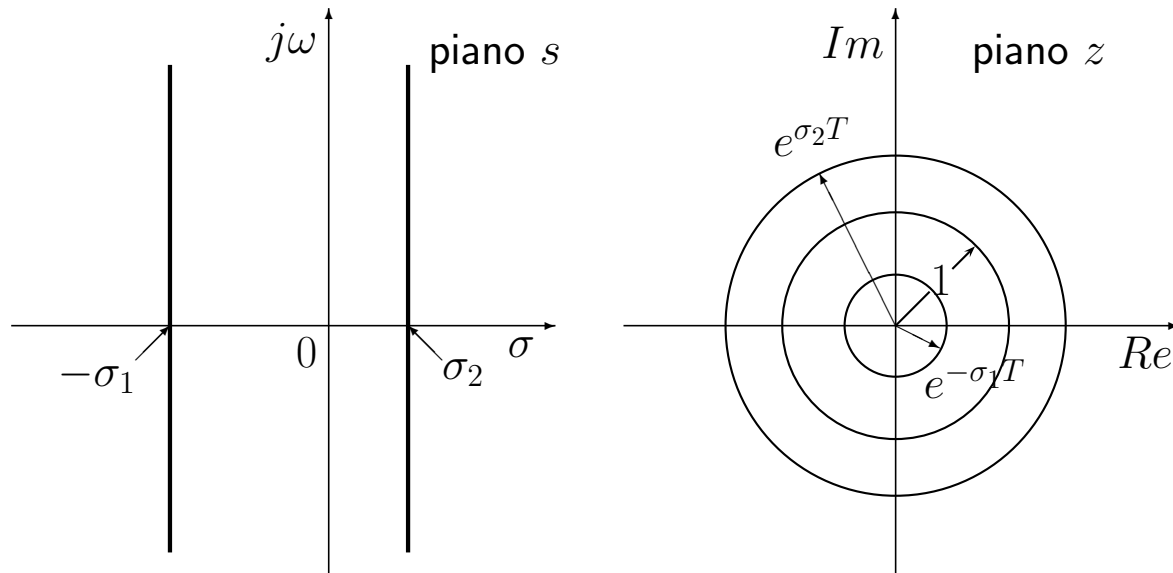


- The z plane is in biunivocal correspondence with the Primary Strip.

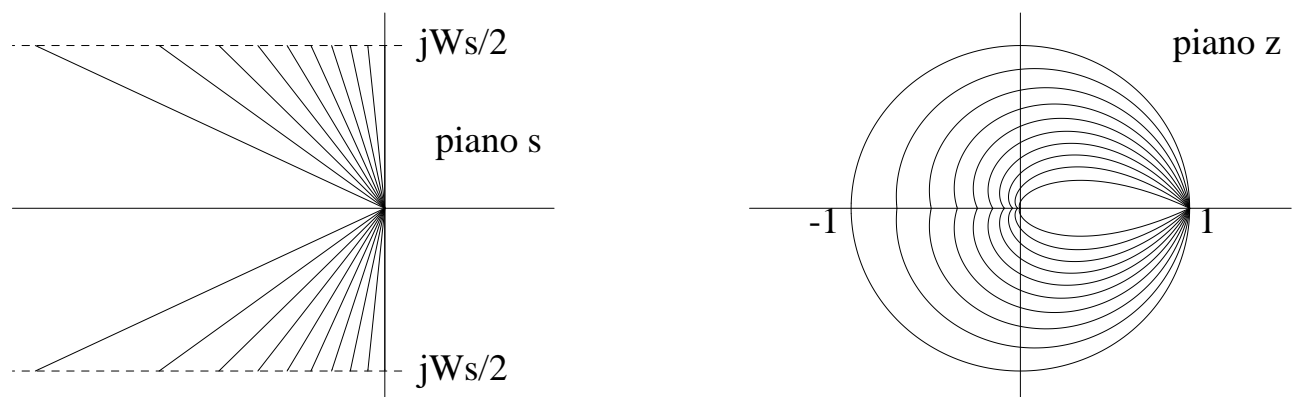
- Mapping tra striscia primaria e piano z :



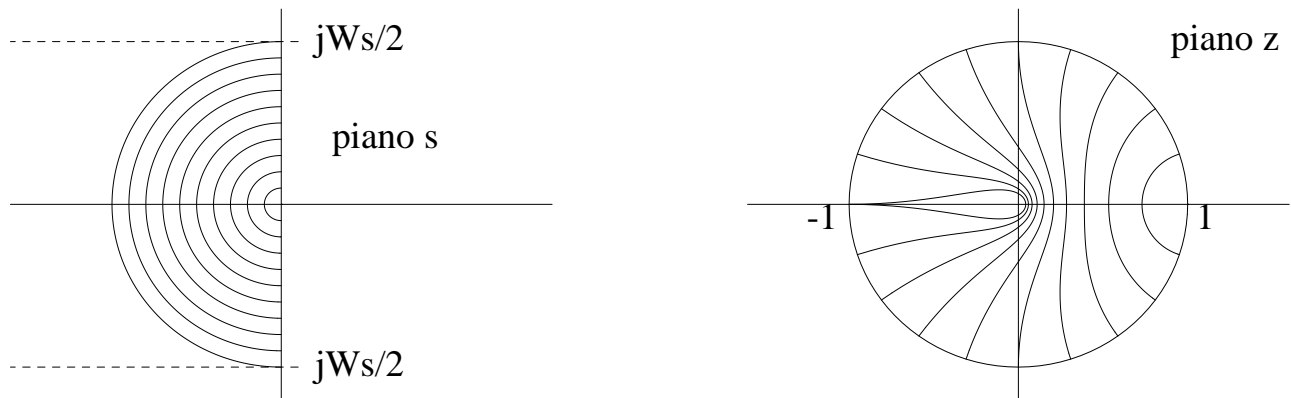
- Luoghi a decadimento esponenziale costante:



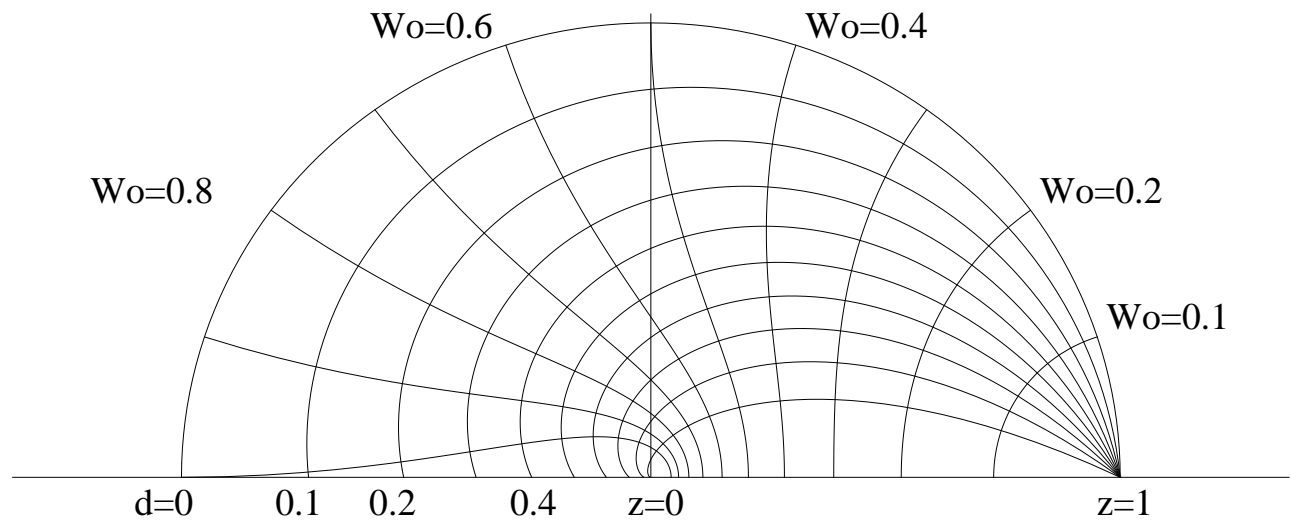
- Luoghi a coefficiente di smorzamento δ costante:



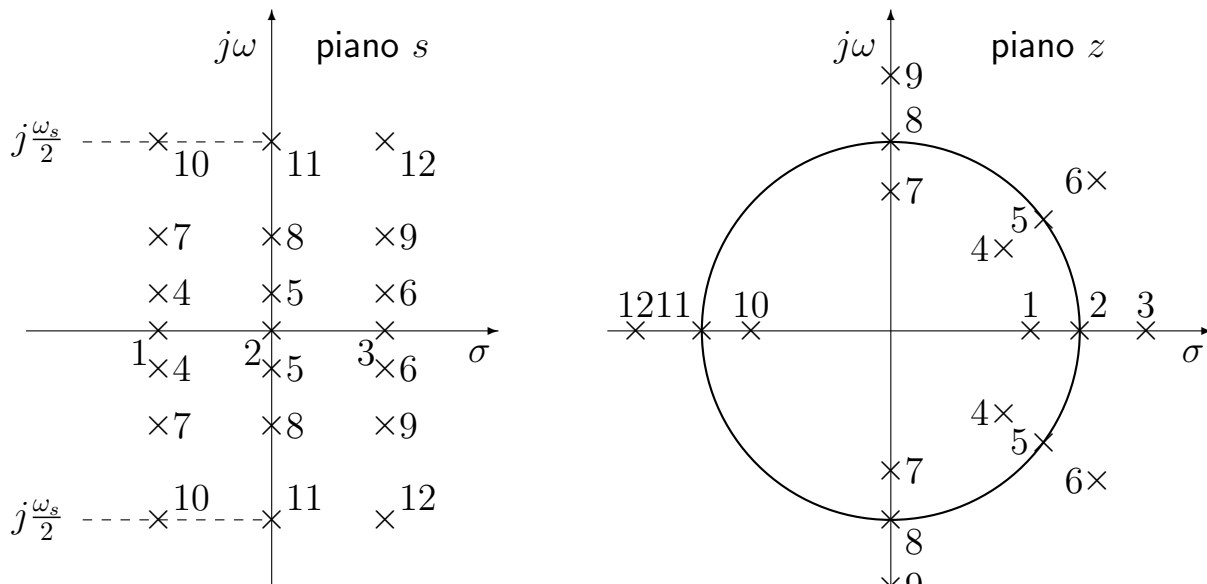
- Luoghi a pulsazione naturale ω_n costante:



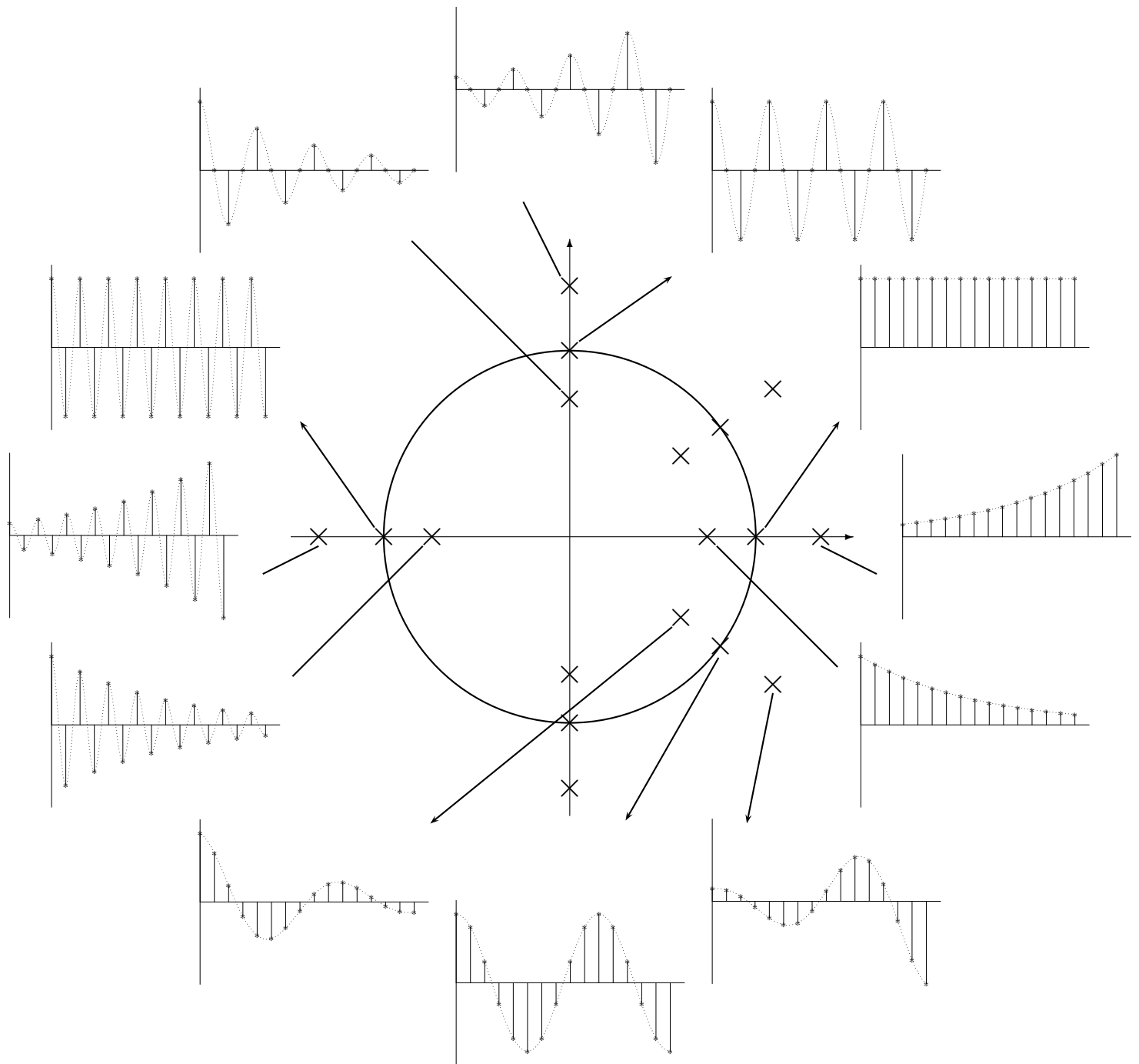
- Luoghi del piano z a δ e ω_n costanti:



- I punti del piano s e del piano z , posti in corrispondenza per mezzo della relazione $z = e^{sT}$, possono essere considerati come poli corrispondenti di trasformate $F(s)$ ed $F(z)$, con $F(z)$ calcolata campionando $F(s)$



POSIZIONE DEI POLI E RISPOSTE TRANSITORIE



Stability of discrete systems

- Stabilità dei sistemi discreti:

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

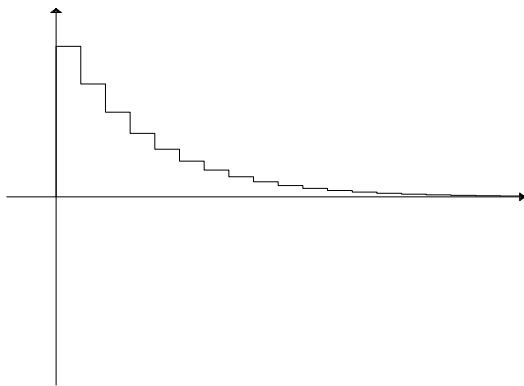
The poles of function $G(z)$ are the roots of the polynomial $A(z)$ at the denominator of function $G(z)$.

Stabilità asintotica: tutti i poli p_i della $G(z)$ devono essere interni al cerchio unitario: $|p_i| < 1$.

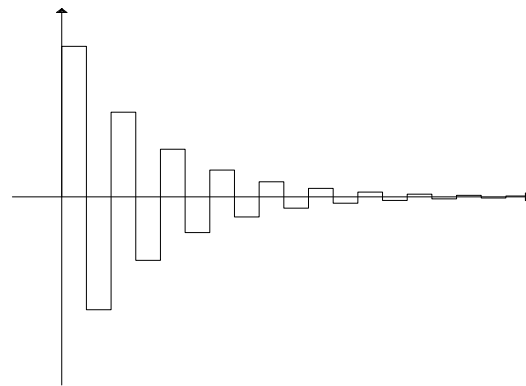
Stabilità semplice: tutti i poli p_i della $G(z)$ devono appartenere al disco unitario ($|p_i| \leq 1$) e quelli che si trovano sul cerchio unitario ($|p_i| = 1$) devono avere molteplicità unitaria.

- Andamenti temporali che si ottengono in corrispondenza dei valori $z = 0.75$, $z = -0.75$, $z = 1.25$ and $z = -1.25$:

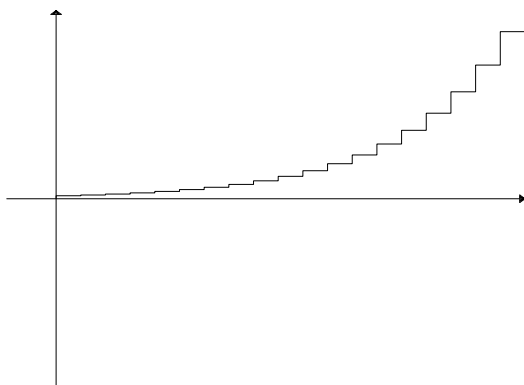
polo in $z=0.75$



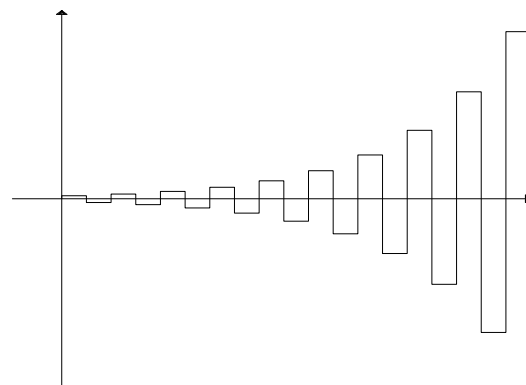
polo in $z=-0.75$



polo in $z=1.25$



polo in $z=-1.25$



- Il criterio di Nyquist permette di decidere circa la stabilità di sistemi in retroazione analizzando il comportamento frequenziale della risposta armonica di anello in rapporto al punto critico $(-1 + j0)$

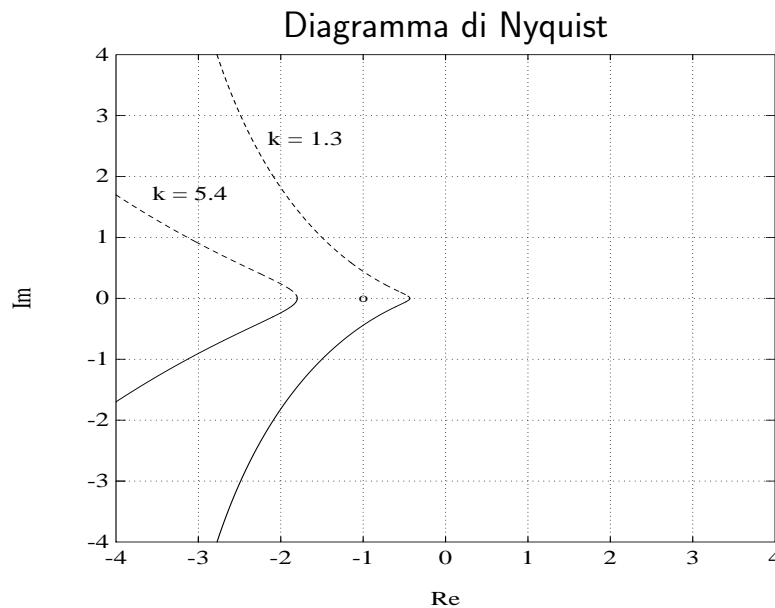
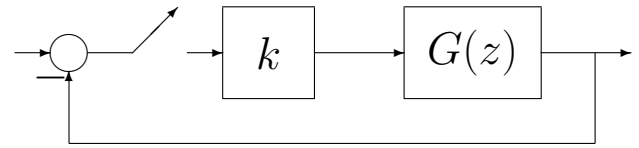
$$G(e^{j\omega T}) = G(z)|_{z=e^{j\omega T}} \quad \text{for} \quad -\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$$

- Criterio di Nyquist I

Sia data una funzione di guadagno d'anello $G(z)$ con tutti i poli stabili (a modulo minore di uno), con l'eventuale eccezione di un polo semplice o doppio in $z = 1$. Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $G(e^{j\omega T})$ tracciato per $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$ non circondi nè tocchi il punto critico $-1 + j0$.

- Esempio:

$$G(z) = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)}$$



Il sistema in retroazione è stabile per $k = 1.3$ ed instabile per $k = 5.4$

- Luogo delle radici. È il luogo descritto dagli zeri di una funzione

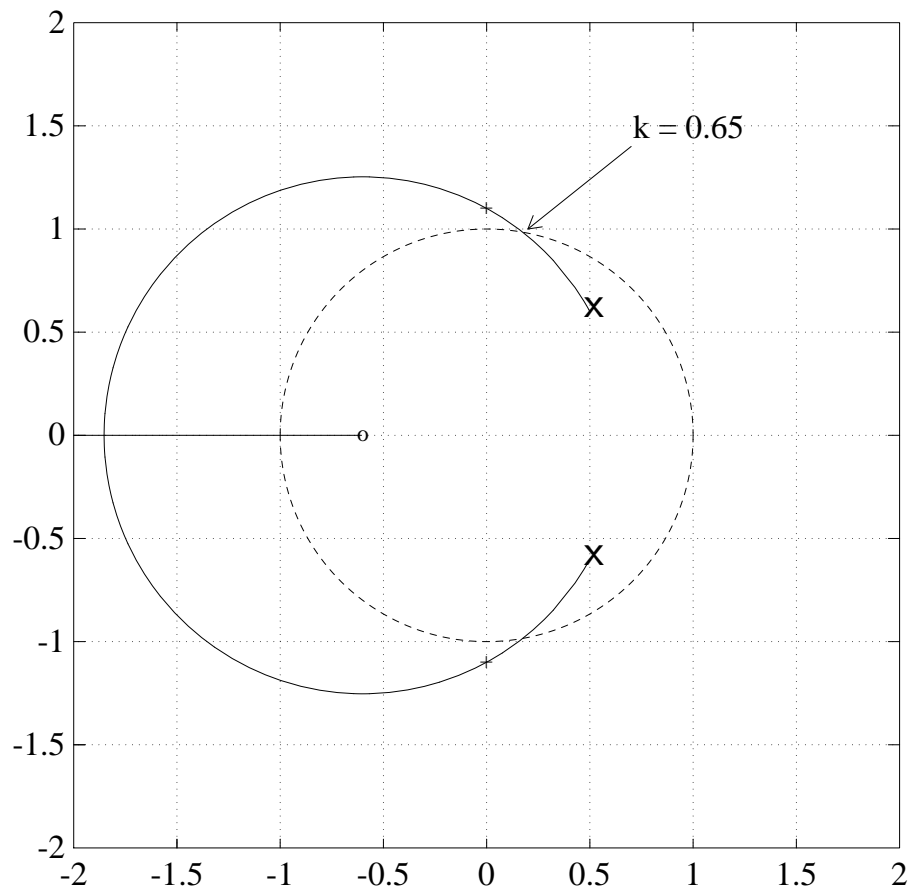
$$1 + k G(z) = 0$$

al variare del parametro k nell'intervallo $[0, +\infty]$.

- Esempio. Dato il seguente sistema in catena aperta con due poli in $z_{1,2} = 0.5 \pm j0.6$:

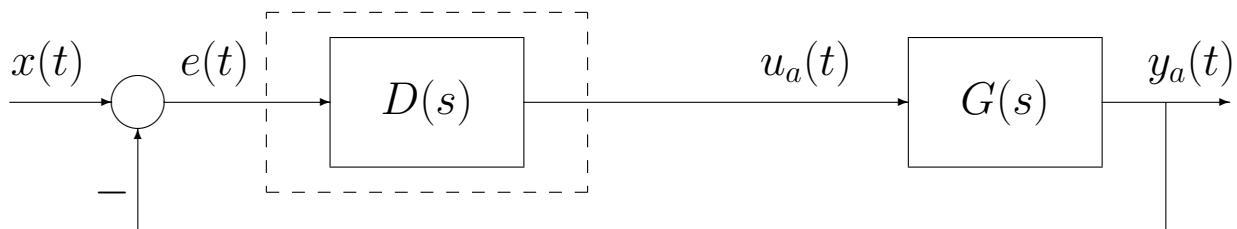
$$G(z) = k \frac{z + 0.6}{z^2 - z + 0.61}$$

Per il sistema in retroazione unitaria si ha:

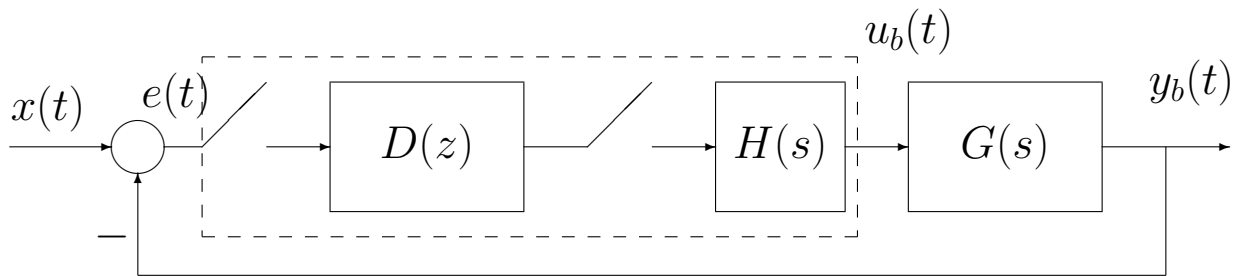


PROGETTO PER DISCRETIZZAZIONE

- Il regolatore $D(s)$ progettato in ambito “tempo continuo” (caso a) viene “discretizzato” ottenendo una funzione $D(z)$ che verrà inserita all’interno dell’anello di controllo discreto (caso b):



(a)



(b)

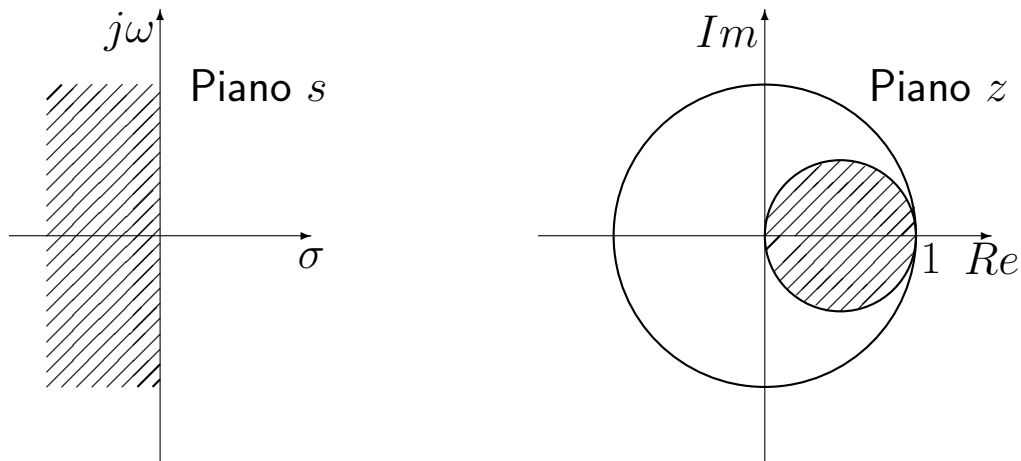
- TECNICHE DI DISCRETIZZAZIONE:
 1. Metodo delle differenze all’indietro
 2. Metodo delle differenze in avanti
 3. Trasformazione bilineare
- Tutti i metodi di discretizzazione che verranno presentati sono “approssimati”, cioè forniscono un sistema discreto $D(z)$ che riproduce bene, ma non esattamente, il comportamento dinamico del sistema $D(s)$.
- Più piccolo è il periodo di campionamento T , più il sistema $D(z)$ ha un comportamento dinamico simile a quello del sistema $D(s)$.

1. METODO DELLE DIFFERENZE ALL'INDIETRO

- Il metodo consiste nella seguente sostituzione:

$$D(z) = D(s) \Big|_{s = \frac{1 - z^{-1}}{T}}$$

- Legame fra il piano s e il piano z :



Esempio. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare la seguente rete anticipatrice:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{1 + s}{1 + 0.2s}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

[Soluzione.] Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(s) = \frac{1 + s}{1 + 0.2s} = 5 \frac{s + 1}{s + 5} \rightarrow D(z) = D(s) \Big|_{s = \frac{1 - z^{-1}}{T}} = \frac{5(1 + T - z^{-1})}{1 + 5T - z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{5(1 + T - z^{-1})}{1 + 5T - z^{-1}}$$

ottenendo

$$M(z)(1 + 5T - z^{-1}) = 5E(z)(1 + T - z^{-1}) \leftrightarrow M(z)(1.5 - z^{-1}) = E(z)(5.5 - 5z^{-1})$$

cioè

$$m(k) = \frac{1}{1.5} [m(k-1) + 5.5e(k) - 5e(k-1)]$$

da cui

$$m(k) = 0.666 m(k-1) + 3.666 e(k) - 3.333 e(k-1)]$$

Esempio. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare la seguente funzione:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = 2 \frac{s+2}{s+5}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

[Soluzione.] Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene

$$D(z) = D(s)|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = 2 \frac{1+2T-z^{-1}}{1+5T-z^{-1}} = 2 \frac{1.2-z^{-1}}{1.5-z^{-1}}$$

Il calcolo della corrispondente equazione alle differenze è immediato:

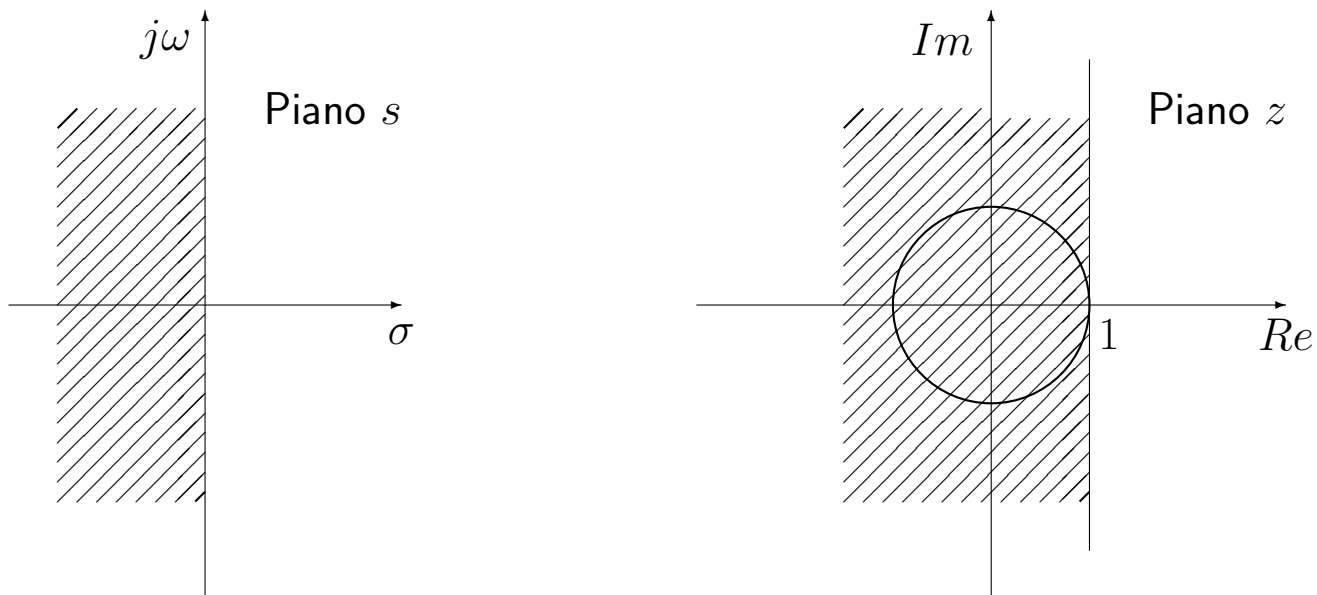
$$m(n) = \frac{1}{1.5} [m(n-1) + 2.4e(n) - 2e(n-1)]$$

2. METODO DELLE DIFFERENZE IN AVANTI

- Il metodo consiste nella seguente sostituzione:

$$D(z) = D(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{T}}$$

- Analizzando la corrispondenza piano-s piano-z si ha che:



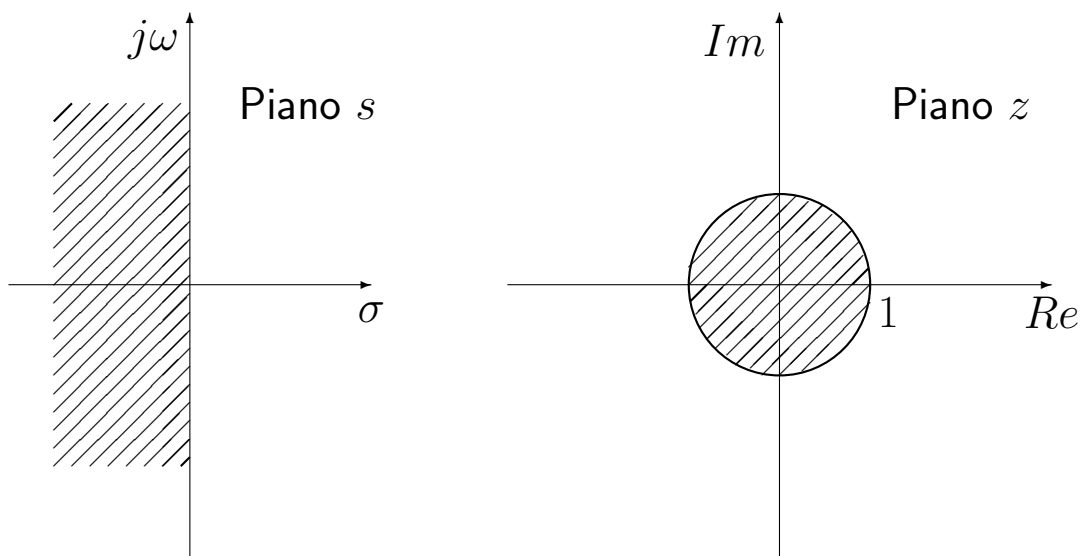
- This method can be used only if the poles of the $D(s)$ controller are mapped by relation $z = e^{sT}$ into the unitary circle of the plane z .

3. TRASFORMAZIONE BILINEARE (o di TUSTIN)

- The method consists in the following replacement:

$$D(z) = D(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

- L'analisi del legame s - z mostra che il semipiano negativo in s viene posto in corrispondenza biunivoca con i punti z del cerchio unitario:



Esempio. Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare, discretizzare il seguente regolatore PI:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{s + 1}{s}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.2$.

[Soluzione.] Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare si ottiene

$$D(z) = D(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}} = \frac{10(1 - z^{-1}) + (1 + z^{-1})}{10(1 - z^{-1})} = \frac{11 - 9z^{-1}}{10(1 - z^{-1})}$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$M(z)(1 - z^{-1}) = \frac{E(z)}{10}(11 - 9z^{-1})$$

da cui si ottiene

$$m(k) = m(k - 1) + 1.1e(k) - 0.9e(k - 1)$$

Esempio. Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare, discretizzare la seguente funzione di trasferimento:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = 2 \frac{(1 + 0.25s)}{(1 + 0.1s)}$$

Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.05$.

[Soluzione.] La funzione di trasferimento da discretizzare è la seguente:

$$D(s) = 2 \frac{(1 + 0.25s)}{(1 + 0.1s)} = 5 \frac{(s + 4)}{(s + 10)}$$

Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare si ottiene ($T = 0.05$)

$$D(z) = 5 \frac{(s + 4)}{(s + 10)} \Big|_s = \frac{2z - 1}{Tz + 1} = 4.4 \frac{z - \frac{9}{11}}{z - \frac{3}{5}} = 4.4 \frac{1 - 0.8182z^{-1}}{1 - 0.6z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$(1 - 0.6z^{-1})M(z) = 4.4(1 - 0.8182z^{-1})E(z)$$

da cui si ottiene

$$m(k) = 0.6m(k-1) + 4.4e(k) - 3.6e(k-1).$$

Campionamento ideale

- Si consideri il seguente sistema tempo continuo:

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 2s + 5}$$

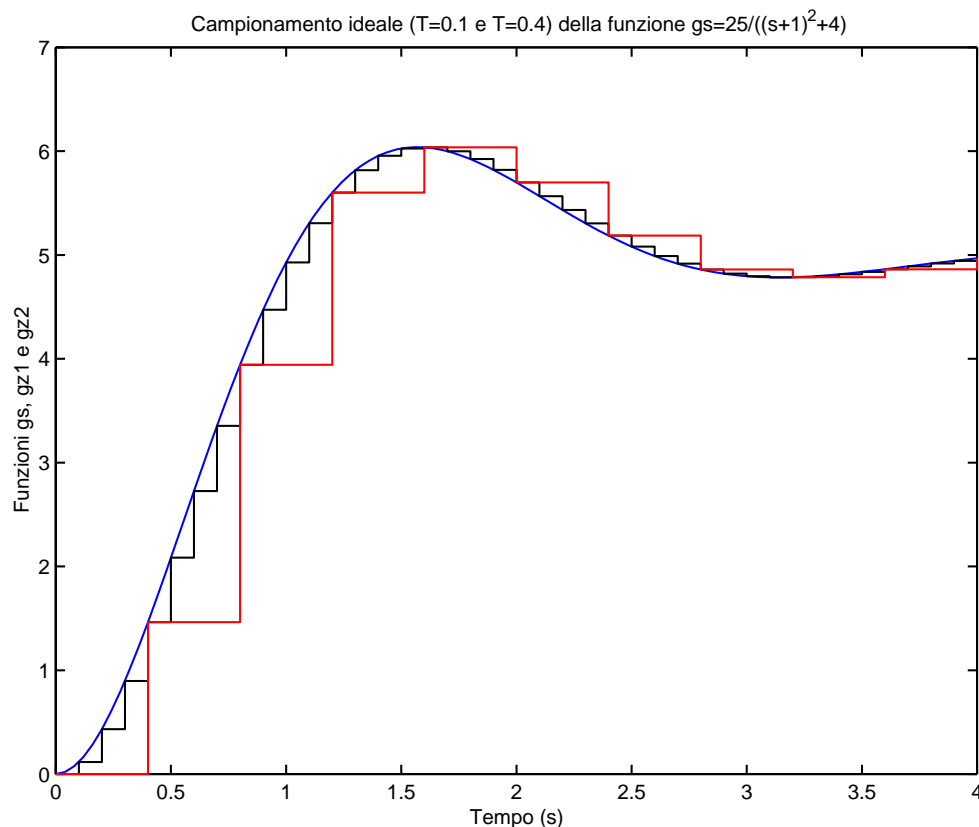
- Se si discretizza questa funzione utilizzando il periodo di campionamento $T = 0.1$ si ottiene la funzione:

$$G_1(z) = \mathcal{Z}[H_0(s)G(s)]_{T=0.1} = \frac{0.1166z + 0.1091}{z^2 - 1.774z + 0.8187}$$

- Utilizzando invece il periodo di campionamento $T = 0.4$ si ottiene la seguente funzione:

$$G_2(z) = \mathcal{Z}[H_0(s)G(s)]_{T=0.4} = \frac{1.463z + 1.114}{z^2 - 0.934z + 0.4493}$$

- Risposta al gradino unitario delle 3 funzioni $G(s)$, $G_1(z)$ e $G_2(z)$:



- Si noti l'esatta coincidenza delle 3 risposte al gradino negli istanti di campionamento.

- In Matlab, a continuous time function "gs" can be discretized using the following command: "gz=c2d(gs,T)".

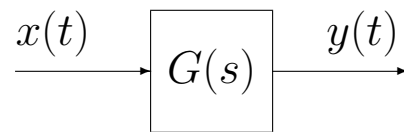
Regolatore discreto proporzionale

- Si consideri il seguente sistema:

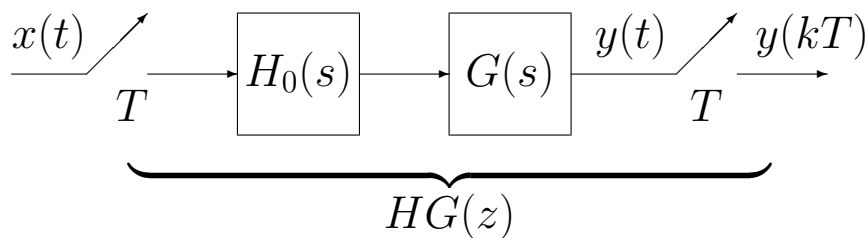
$$G(s) = \frac{25}{s(s+1)(s+10)}$$

Si metta a confronto funzione di risposta armonica dei seguenti 3 sistemi:

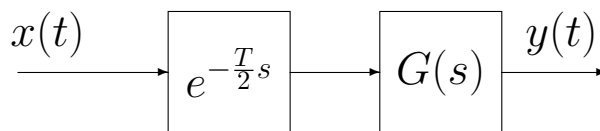
- 1) Il sistema $G(s)$:



- 2) Il sistema $HG(z) = \mathcal{Z}[H_0(s)G(s)]$ ottenuto inserendo un campionatore e un ricostruttore di ordine zero in cascata al sistema $G(s)$:

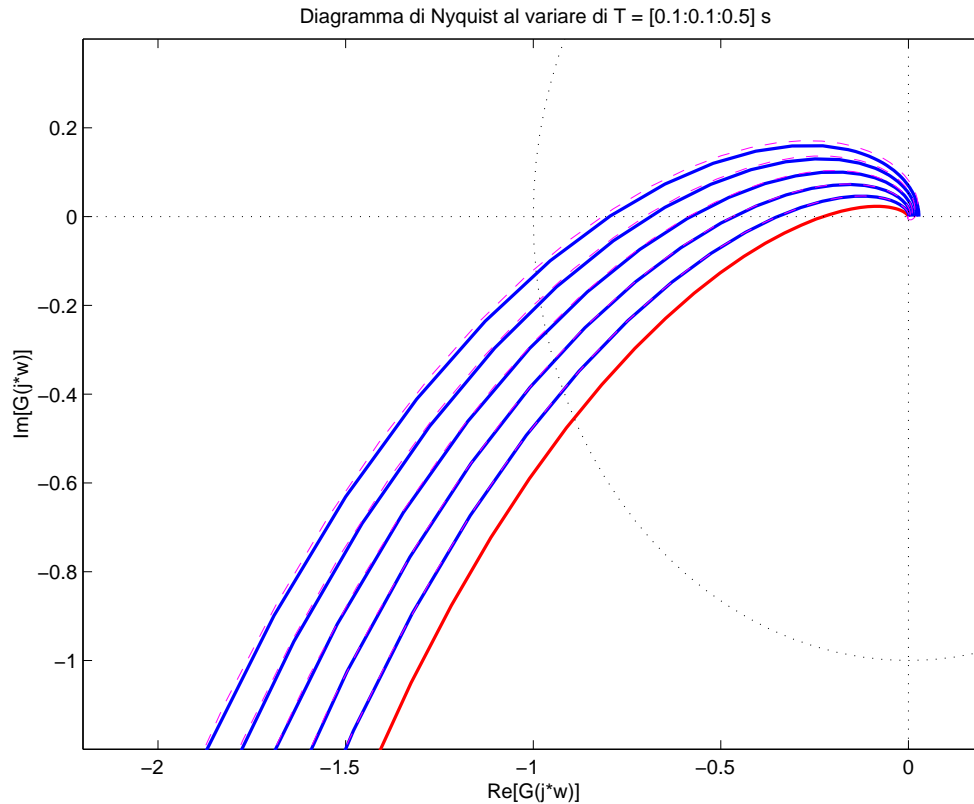


- 3) Il sistema $G(s)e^{-\frac{T}{2}s}$ ottenuto sostituendo la cascata del campionatore e del ricostruttore di ordine zero con un ritardo puro $e^{-\frac{T}{2}s}$ pari a metà del periodo di campionamento T :

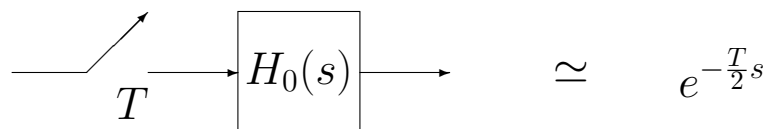


- La funzione $HG(z, T) = \mathcal{Z}[H_0(s)G(s)]$ che si ottiene discretizzando il sistema $G(s)$ posto in cascata con il ricostruttore di ordine zero $H_0(s)$ è funzione del periodo di campionamento T .

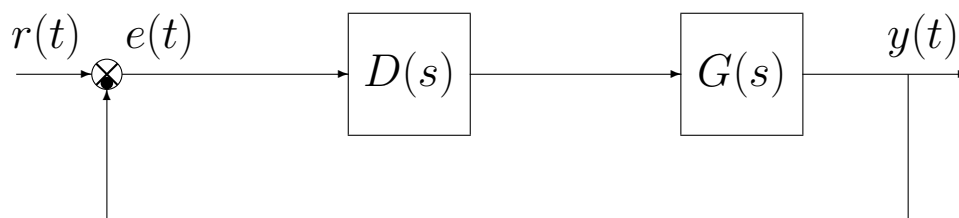
- Diagrammi di Nyquist dei sistemi $G(s)$, $HG(z, T)$ e $G(s)e^{-\frac{T}{2}s}$ per $T \in [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5]$:



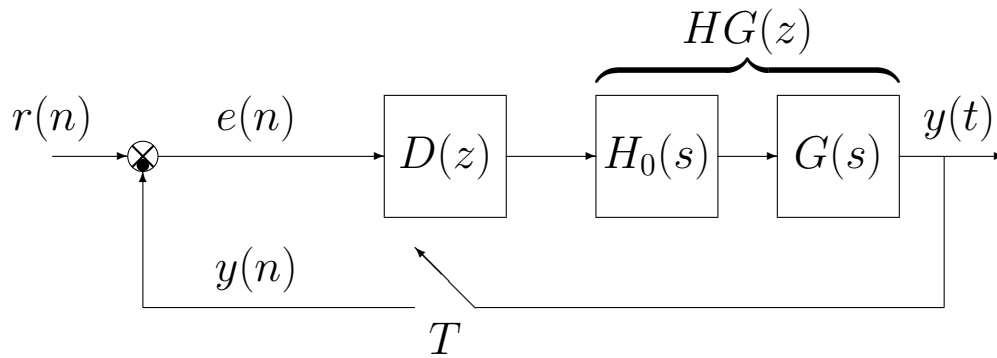
- Si noti come all'aumentare del periodo di campionamento T si ha un aumento dello sfasamento presente all'interno del sistema e quindi una riduzione dei margini di stabilità.
- Dai diagrammi di Nyquist sopra riportati è evidente che per basse pulsazioni la cascata del campionatore e del ricostruttore di ordine zero può essere ben approssimata da un ritardo puro:



- Si metta ora a confronto il sistema retroazionato tempo continuo:



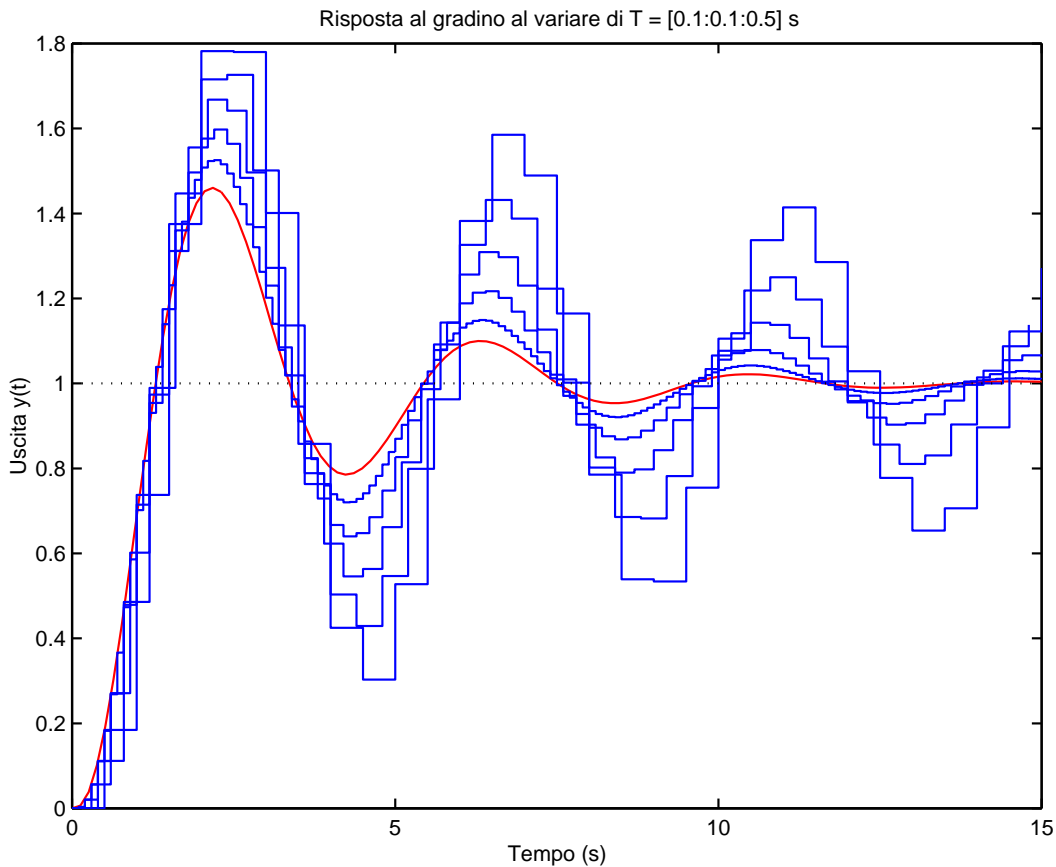
con il corrispondente sistema tempo discreto:



- Funzioni di trasferimento $G_0(s)$ e $G_0(z)$ dei due sistemi retroazionati:

$$G_0(s) = \frac{D(s)G(s)}{1 + D(s)G(s)}, \quad G_0(z) = \frac{D(z)HG(z)}{1 + D(z)HG(z)}$$

- Risposta al gradino dei sistemi $G(s)$ e $HG(z, T)$ posti in retroazione unitaria per $T \in [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5]$ quando $D(s) = D(z) = 1$:



- All'aumentare del periodo di campionamento si hanno risposte al gradino sempre meno smorzate e con una sovralongazione sempre più elevata.

Confronto tra diversi metodi di discretizzazione

- Si consideri il seguente sistema:

$$G(s) = \frac{25}{s(s+1)(s+10)}$$

e per esso si progetti una opportuna rete correttiva (anticipatrice):

$$D(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s} = \frac{1 + 0.806 s}{1 + 0.117 s}$$

- La funzione di trasferimento $D(s)$ può essere discretizzata utilizzando diversi metodi approssimati:

- 1) differenze all'indietro:

$$D_1(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{T + \tau_1 - \tau_1 z^{-1}}{T + \tau_2 - \tau_2 z^{-1}}$$

- 2) differenze in avanti:

$$D_2(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}} = \frac{\tau_1 + (T - \tau_1) z^{-1}}{\tau_2 + (T - \tau_2) z^{-1}}$$

- 3) trasformazione bilineare:

$$D_3(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{T + 2\tau_1 + (T - 2\tau_1) z^{-1}}{T + 2\tau_2 + (T - 2\tau_2) z^{-1}}$$

- 4) corrispondenza poli-zeri:

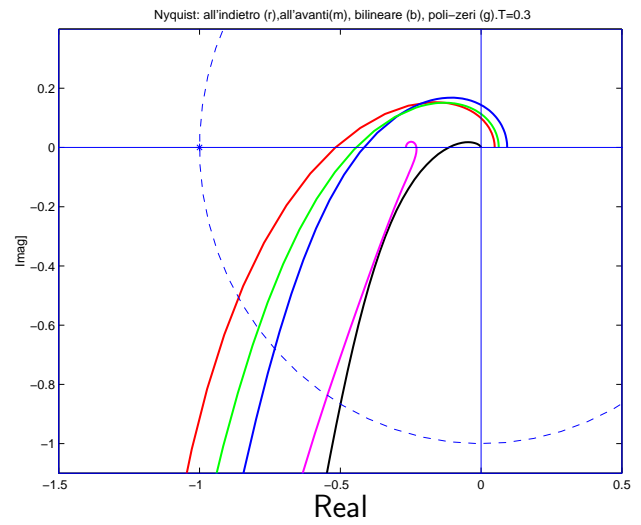
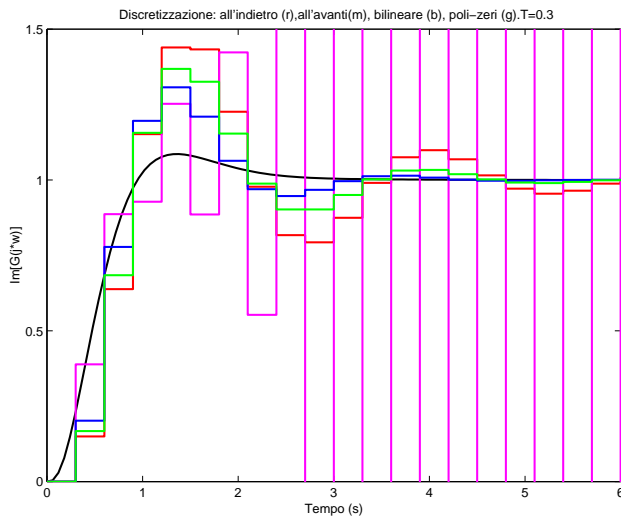
$$D(s) \quad \rightarrow \quad D_4(z) = \frac{(1 - \beta) - \alpha (1 - \beta) z^{-1}}{(1 - \alpha) - \beta (1 - \alpha) z^{-1}}$$

dove

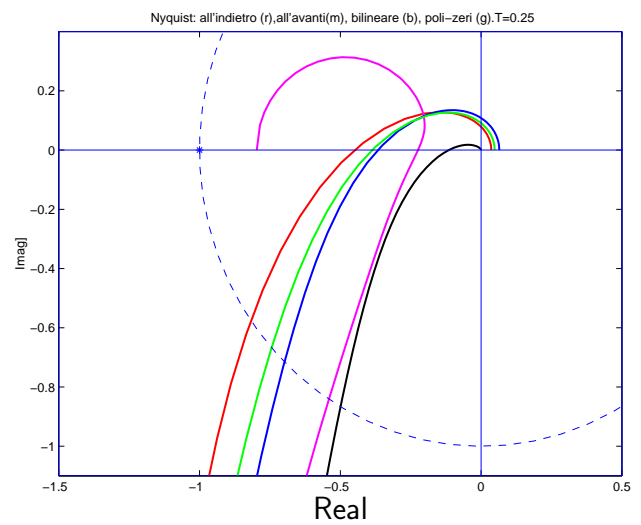
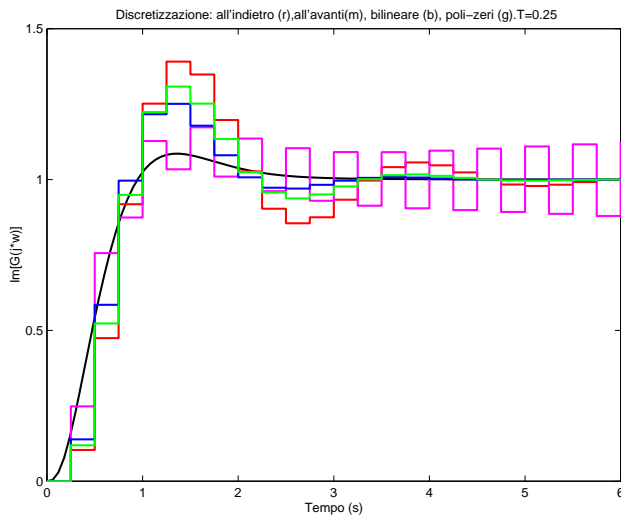
$$\alpha = e^{-\frac{T}{\tau_1}}, \quad \beta = e^{-\frac{T}{\tau_2}}$$

- Si noti che il regolatore $D_2(z)$ è stabile solo quando $T < 2\tau_2$ mentre gli altri 3 regolatori sono stabili per qualunque valore di $T > 0$.

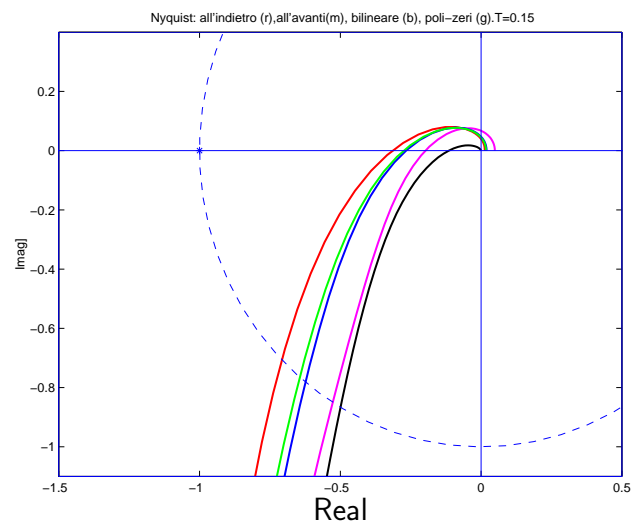
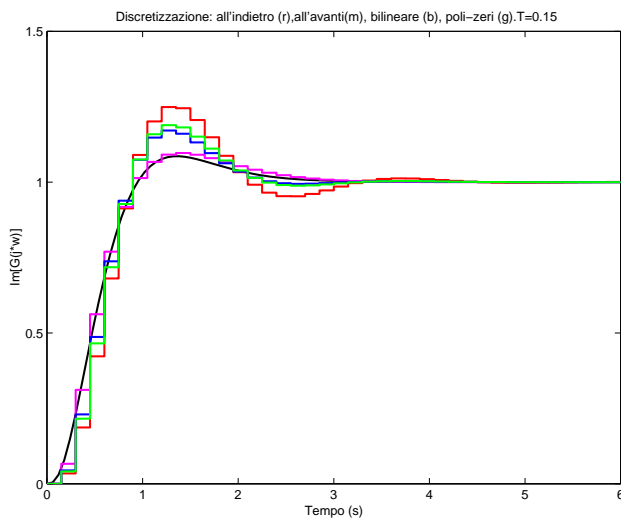
- Risposte al gradino del sistema retroazionato e diagrammi di Nyquist quando $T = 0.3$ e utilizzando i vari metodi di discretizzazione:



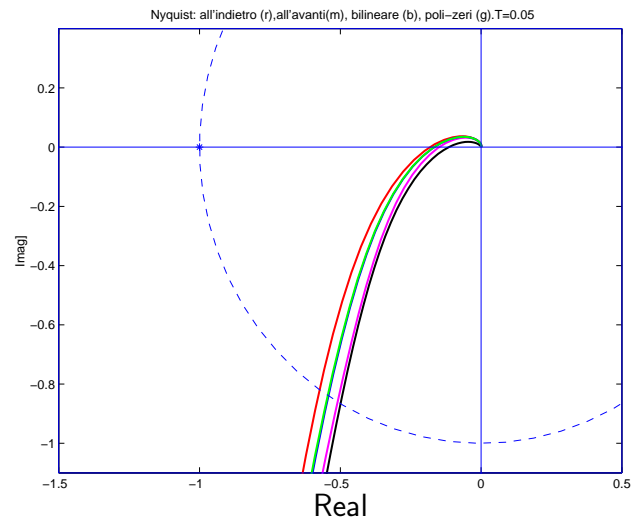
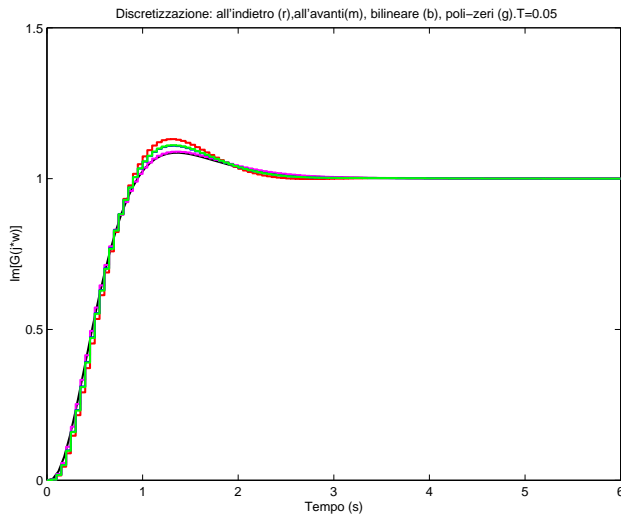
- Risposte al gradino e diagrammi di Nyquist quando $T = 0.25$:



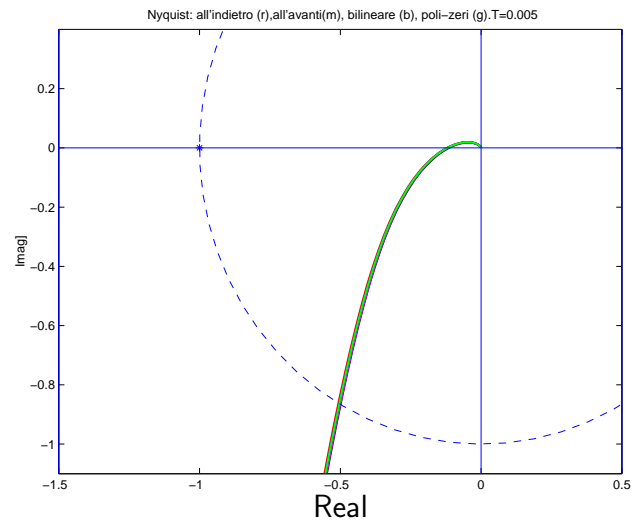
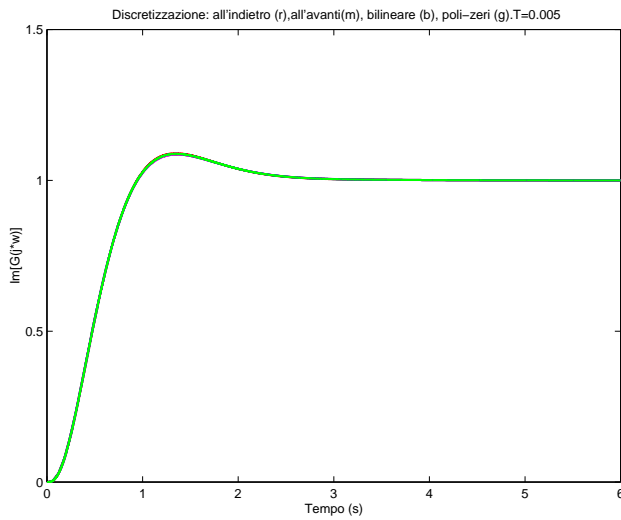
- Risposte al gradino e diagrammi di Nyquist quando $T = 0.15$:



- Risposte al gradino e diagrammi di Nyquist quando $T = 0.05$:



- Risposte al gradino e diagrammi di Nyquist quando $T = 0.005$:



- Per periodi di campionamento così piccoli i regolatori discreti hanno tutti un comportamento sostanzialmente equivalente.