

Domande a risposta multipla

Si risponda alle seguenti domande a risposta multipla. Almeno una delle risposte é vera. Per ciascuna domanda riportare sul foglio delle risposte le lettere di tutte le risposte che si ritengono vere.

1. Il metodo della Trasformata di Laplace nella risoluzione di equazioni differenziali lineari a parametri concentrati

- A. permette di calcolare la risposta libera del sistema**
- B. permette di calcolare la risposta forzata del sistema**
- C. può essere utilizzato anche nel caso di equazioni tempo varianti
- D. può essere utilizzato solo nel caso di equazioni tempo invarianti**

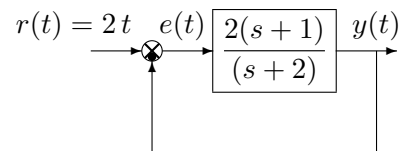
2. Il teorema del valore iniziale applicato alla funzione $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ afferma che:

- A. $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} F(s)$
- B. $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$
- C. $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} F(s)$
- D. $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$**

3. Sia dato il sistema retroazionato mostrato in figura.

L'errore a regime $e(\infty)$ della variabile $e(t)$ quando $t \rightarrow \infty$ é:

- A. $e(\infty) = 0$
- B. $e(\infty) = 1$
- C. $e(\infty) = 2$
- D. $e(\infty) = \infty$**



4. Siano $M_0 = G(j0)$ ed $M_1 = \max_{\omega} |G(j\omega)|$, rispettivamente, il guadagno statico e il valore massimo del modulo della funzione di risposta armonica del sistema lineare stabile $G(s)$. Il picco di risonanza M_R del sistema $G(s)$ è definito

- A. $M_R = M_1$
- B. $M_R = \frac{M_1}{M_0}$
- C. $M_R = \sqrt{M_1 M_0}$
- D. $M_R = M_1 - M_0$ (valori espressi in db)**

5. L'istante di massima sovraelongazione T_m della risposta al gradino di un sistema lineare del 2° ordine, stabile, privo di zeri e caratterizzato da due poli complessi coniugati $p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega$ è
- $T_m = \frac{\pi}{\sigma}$
 - $T_m = \frac{\pi}{\omega}$
 - $T_m = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}$
 - $T_m = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}$
6. Il sistema $G(s)$, supposto a fase minima e privo di zeri, ha un diagramma di Bode delle ampiezze che interseca l'asse a guadagno unitario nel punto centrale di un tratto a pendenza -1 . Una stima del margine di fase M_φ del sistema è la seguente
- $M_\varphi \simeq \frac{\pi}{4}$
 - $M_\varphi \simeq \frac{\pi}{2}$
 - $M_\varphi \simeq -\frac{\pi}{4}$
 - $M_\varphi \simeq -\frac{\pi}{2}$
7. Se i coefficienti dell'equazione caratteristica di un sistema retroazionato sono tutti positivi, allora è possibile affermare che il sistema retroazionato
- è stabile
 - è instabile
 - può essere stabile**
 - può essere instabile**
8. La funzione descrittiva $F(X)$ di un relè con soglia
- è nulla per valori sufficientemente piccoli di X**
 - è costante (> 0) per valori sufficientemente piccoli di X
 - tende a zero per valori sufficientemente grandi di X**
 - è costante (> 0) per valori sufficientemente grandi di X
9. Sul piano z i luoghi dei punti a coefficiente di smorzamento δ costante
- sono circonferenze centrate in $z = 1$
 - sono circonferenze centrate nell'origine
 - sono tratti di spirali decrescenti verso l'origine**
 - nessuna delle precedenti
10. Il valore a regime $x(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(k)$ della sequenza $x(k)$ corrispondente alla funzione discreta $X(z) = \frac{1-0.2z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$
- è nullo** $x(\infty) = 0$
 - è finito e vale $x(\infty) = 1$
 - è finito e vale $x(\infty) = 1.6$
 - è infinito: $x(\infty) = \infty$

Domande dirette

Si risponda alle seguenti domande dirette. Per ciascuna domanda riportare sul foglio delle risposte la corrispondente risposta.

11. Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ del seguente segnale temporale $x(t)$:

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[4\delta(t) + 2t^3e^{2t} + 5\sin(4t)e^{-3t}] = \boxed{X(s) = 4 + \frac{12}{(s-2)^4} + \frac{20}{(s+3)^2 + 4^2}}$$

12. Calcolare la trasformata di Laplace inversa $g(t)$ delle seguente funzione di trasferimento $G(s)$:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s} + \frac{18}{s^2(s+3)}\right] = \boxed{1 + 6t + 2e^{-3t}}$$

Infatti si ha:

$$G(s) = \frac{3}{s} + \frac{18}{s^2(s+3)} = \frac{3}{s} + \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s^2} + \frac{K_3}{s+3} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s} - \frac{2}{s} + \frac{6}{s^2} + \frac{2}{s+3}\right]$$

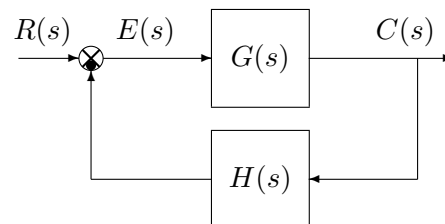
13. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ mostrato in figura quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale $x(t)$:

$$x(t) = 2 + 5\cos\left(3t + \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow \boxed{\frac{G(s)}{(s+1)^2}} \rightarrow \boxed{y(t) \simeq 8 + 2\cos\left(3t + \frac{\pi}{6} - 2\arctan 3\right)}$$

Infatti si ha che:

$$G(0) = 4, \quad \text{e} \quad G(j3) = \frac{4}{(1+3j)^2} = |G(j3)| e^{j\arg[G(j3)]} = \frac{4}{10} e^{j(-2\arctan 3)}$$

14. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere la funzione $K(s)$ che lega la variazione relativa del sistema $G(s)$ alla variazione relativa del sistema retroazionato $G_0(s)$ quando varia un parametro α interno alla funzione di trasferimento $G(s)$:



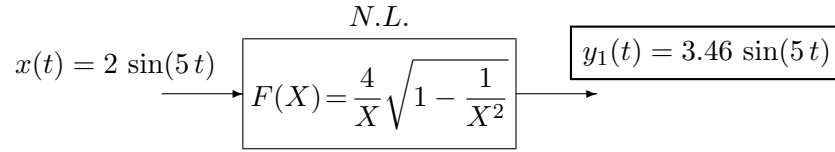
$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = K(s) \frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

$$\boxed{K(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}}$$

15. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(s+5)^2 e^{-2s}}{(s+1)(s^2+3)} \rightarrow \boxed{M(\omega) = \frac{\omega^2 + 25}{\sqrt{(\omega^2 + 1)(3 - \omega^2)}}$$

16. Sia $x(t) = 2 \sin(5t)$ un segnale periodico posto in ingresso ad un elemento non lineare N.L. caratterizzato da una funzione descrittiva $F(X) = \frac{4}{X} \sqrt{1 - \frac{1}{X^2}}$. Indicare qual è l'andamento temporale della fondamentale $y_1(t)$ del segnale periodico che a regime si ha all'uscita del blocco non lineare:



Infatti si ha che:

$$y_1(t) = 2 |F(2)| \sin(5t + \arg F(2)) = 2 \frac{4}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2^2}} \sin(5t) = 4\sqrt{0.75} \sin(5t) = 3.4641 \sin(5t)$$

17. Scrivere, in funzione dei segnali $x(t)$ e $y(t)$, l'equazione differenziale corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(s+1)^2}{s(s+2)(s+3)} \quad \rightarrow \quad \ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = \ddot{x} + 2\dot{x} + x$$

18. Calcolare la Z-trasformata inversa $y(n)$ della seguente funzione discreta $Y(z)$ è

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-0.5)(z-1)} \quad \rightarrow \quad y(n) = 2 - 0.5^n$$

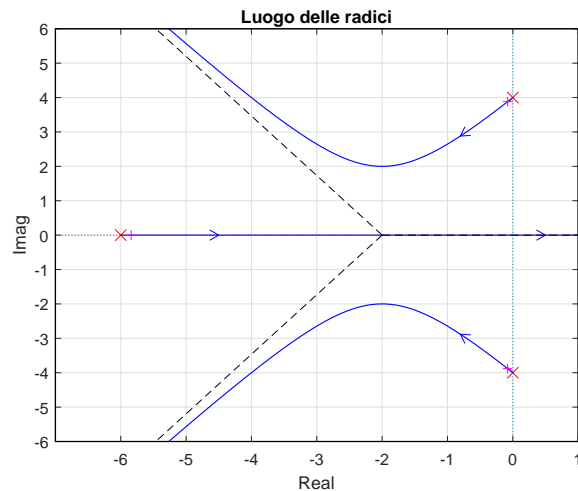
Infatti la funzione $Y(z)$ può essere scomposta nel seguente modo:

$$Y(z) = z \left[\frac{K_1}{z-1} + \frac{K_2}{z-0.5} \right] = z \left[\frac{2}{z-1} + \frac{1}{z-0.5} \right] = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5} \quad \rightarrow \quad y(n) = 2 - 0.5^n$$

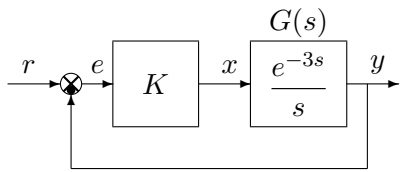
19. A fianco è riportato il luogo delle radici del sistema $G(s) = \frac{-8}{(s+6)(s^2+16)}$ al variare del parametro $K > 0$.

Calcolare per quali valori del parametro K il sistema $K G(s)$ risulta essere asintoticamente stabile:

$$0 < K < K_0 = -\frac{1}{G(s)} \Big|_{s=0} = 12$$



20. Sia dato il seguente sistema retroazionato. Scrivere per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.



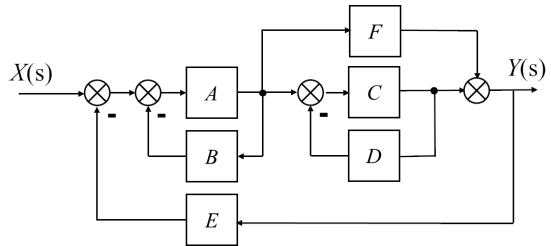
$$0 < K < K^* = \frac{\pi}{2t_0} = \frac{\pi}{6} = 0.523$$

Esercizi

Si svolgano i seguenti esercizi. La risposta di ciascun esercizio deve essere riportata sul foglio delle risposte nella sezione specificatamente riservata al corrispondente esercizio.

21. **(Mason)** Relativamente allo schema a blocchi mostrato in figura, calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$:

$$G_1(s) = \frac{AC+AF(1+CD)}{1+AB+CD+ACE+AFE+A^2BCD+AF^2ECD}$$



22. **(Risposta al gradino)**

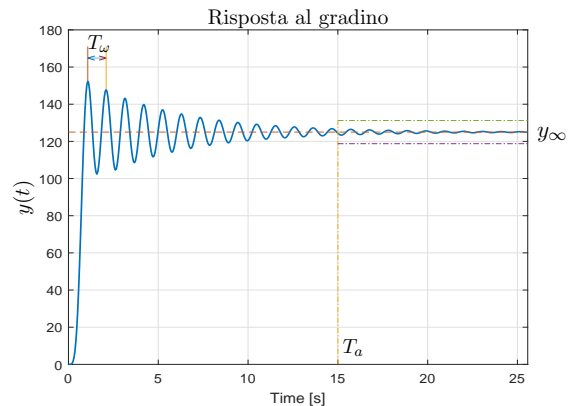
Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{120(4 + 0.1s)(s^2 + 30s + 60^2)}{(s + 12)(0.3s + 2)(s^2 + 6s + 16)(s^2 + 0.4s + 36)}$$

Calcolare inoltre:

- il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \rightarrow \infty$;
- il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
- il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$;

$$y_\infty = 125, \quad T_a \simeq \frac{3}{0.2} = 15 \text{ s}, \quad T_\omega \simeq \frac{2\pi}{6} \simeq 1.05.$$

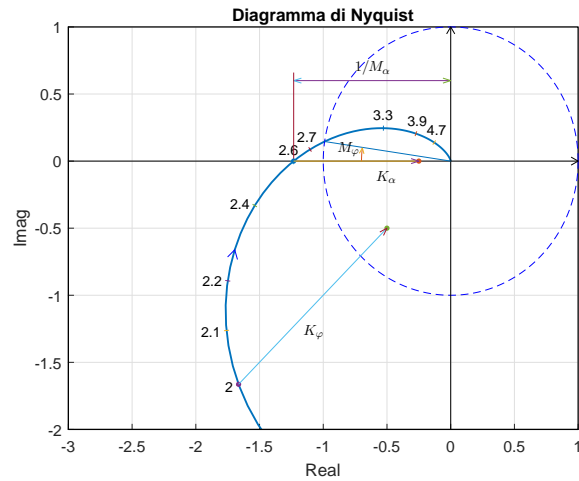


23. **(Margini di stabilità)** Sia data la funzione di risposta armonica, riportata in figura, di un sistema $G(s)$ a fase minima. Nei limiti della precisione consentita dal grafico, calcolare:

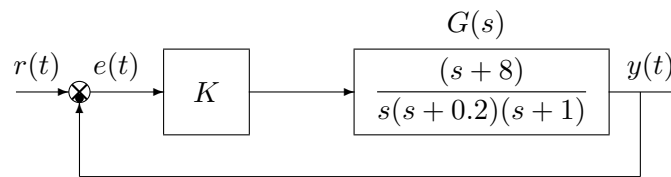
- il margine di ampiezza M_α del sistema;
- il margine di fase M_φ del sistema;
- il guadagno K_φ per cui la funzione $K_\varphi G(j\omega)$ passa per il punto $B = (-0.5, -0.5)$;
- il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 4$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

- a) $M_\alpha = 0.811$
- b) $M_\varphi = -8.4^\circ$
- c) $K_\varphi = 0.3$
- d) $K_\alpha = 0.2$



24. (Criterio di Routh) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K(s+8)}{s(s+0.2)(s+1)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + 1.2s^2 + (0.2+K)s + 8K = 0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 0.2+K \\ 2 & 1.2 & 8K \\ 1 & 1.2(0.2+K) - 8K & \\ 0 & 8K & \end{array}$$

Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$(1.2 - 8)K + 0.24 > 0, \quad K > 0.$$

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$0 < K \leq K^* = \frac{0.24}{6.8} = 0.0353$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{8K^*}{1.2}} = 0.4851.$$

25. **(Diagrammi asintotici di Bode)** Vedi (24). Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione.

I diagrammi “asintotici” di Bode della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 1. I diagrammi di Bode

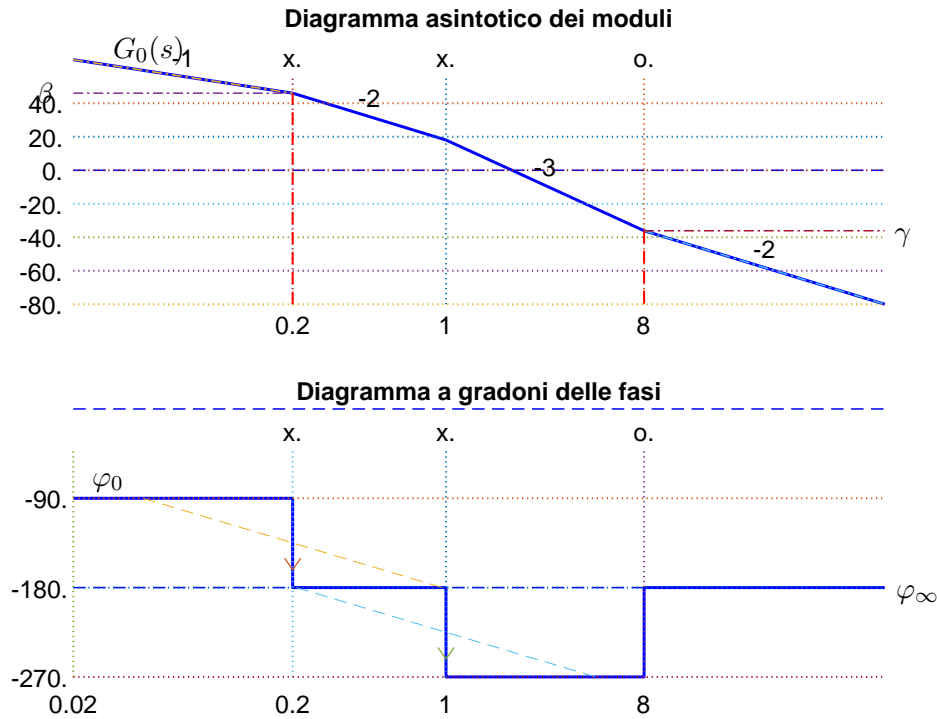


Figura 1: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_d(s)$.

delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2. Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \rightarrow 0$ ed $\omega \rightarrow \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{40}{s}, \quad G_\infty(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi_\infty = -\pi.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze, il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.2$ e il guadagno γ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 8$ sono:

$$\beta = \frac{40}{0.2} = 200 = 46 \text{ db.} \quad \gamma = \frac{1}{8^2} = 0.0156 = -36.1375 \text{ db.}$$

26. **(Diagramma di Nyquist)** Vedi (24). Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l’asse reale negativo e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* .

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

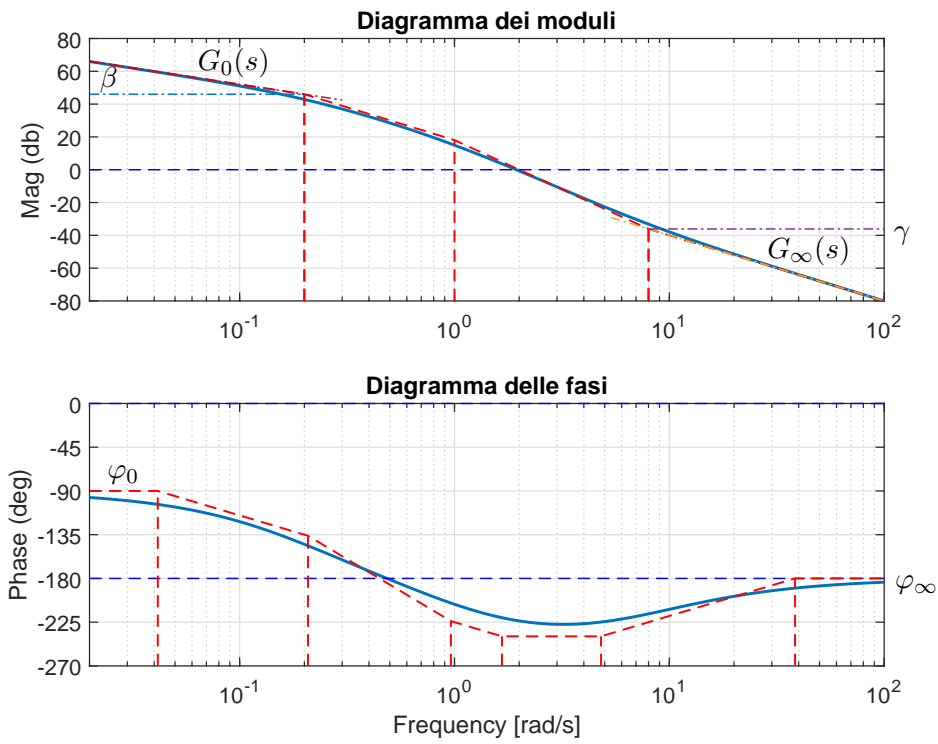


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

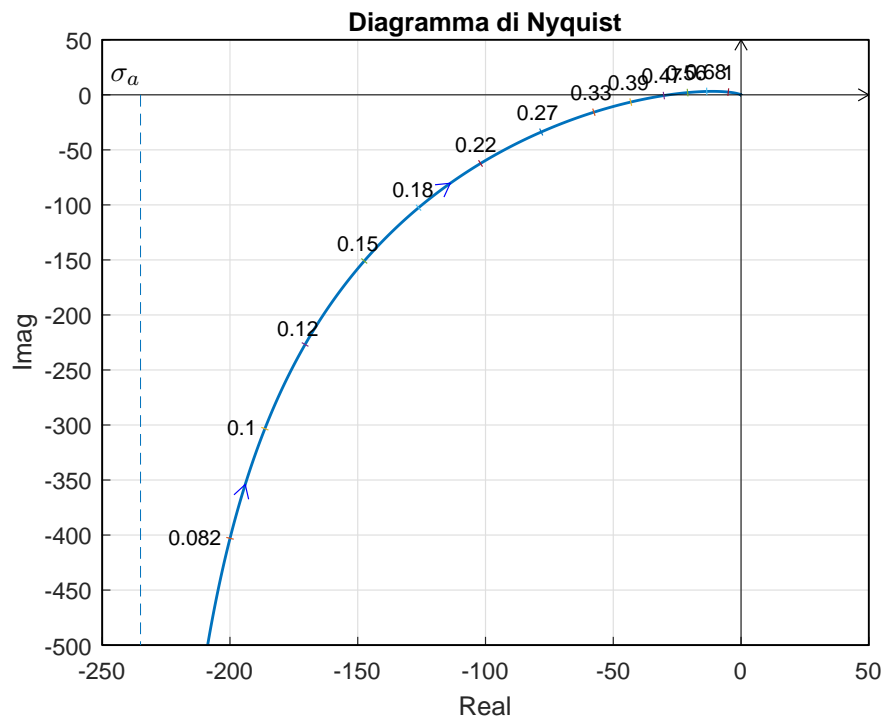


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \rightarrow 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è negativa:

$$\Delta\tau = \frac{1}{8} - \frac{1}{0.2} - 1 = -5.875 > 0.$$

Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale:

$$\sigma_a = K\Delta\tau = 40 \cdot (-5.875) = -235.$$

Il seguente parametro Δ_p :

$$\Delta_p = -8 + 0.2 + 1 = -6.8 < 0$$

indica che per $\omega \rightarrow \infty$ la funzione $G(j\omega)$ arriva in ritardo alla fase finale $\varphi_\infty = -\pi$. La variazione di fase $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ indica che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $\frac{\pi}{2}$ in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\pi$. Esiste una intersezione con l'asse reale. L'intersezione con l'asse reale avviene nel punto:

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{K^*} = -28.33.$$

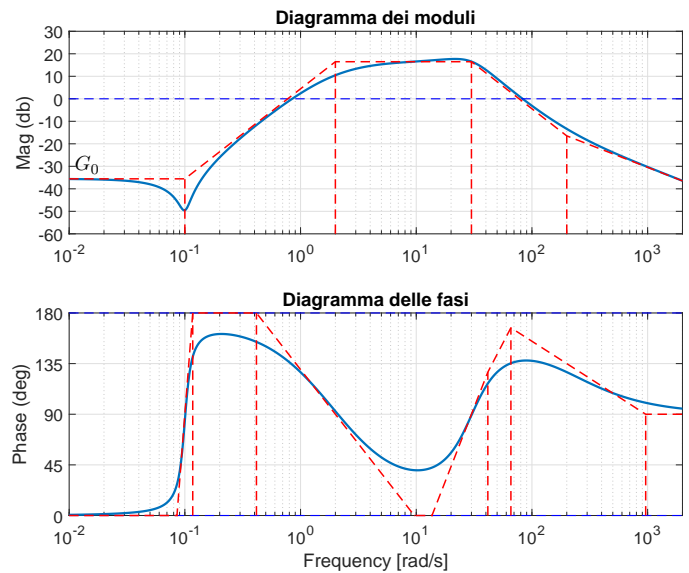
in corrispondenza della pulsazione $\omega_1^* = 0.4851$.

27. (Stima di una funzione $G(s)$)

Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$. Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ .

$$G(s) = \frac{-30(s^2 + 0.02s + 0.1^2)(s - 200)}{(s + 2)^2(s^2 - 30s + 30^2)}.$$



Soluzione:

La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{-30(s^2 + 0.02s + 0.1^2)(s - 200)}{(s + 2)^2(s^2 - 30s + 30^2)}.$$

Il valore $K = -30$ si determina, per esempio, calcolando il modulo β dell'approssimante $G_0(s)$ in corrispondenza del guadagno statico $\omega = 0$:

$$|G_0(s)|_{s=0} = \left| \frac{K \cdot 0.1^2 \cdot (-200)}{2^2 \cdot 30^2} \right| = \frac{|K|}{1800} = \beta \simeq -35.563 \text{ db} \simeq 0.0167 \quad \rightarrow \quad |K| \simeq 30.$$

e tenendo conto del fatto che

$$\arg |G_0(0)| = \arg \left| \frac{-K}{1800} \right| = -\pi + \arg K = 0$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati in $\omega = 0.1$ è il seguente:

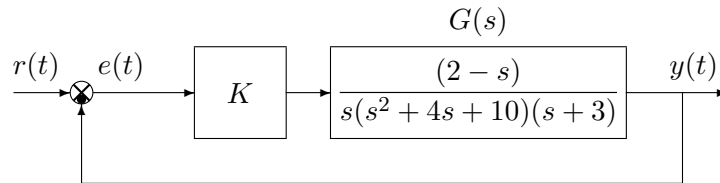
$$\delta = \frac{1}{2M\omega_n} \simeq \frac{1}{10} = 0.1.$$

La distanza $M\omega_n \simeq 14 \text{ db} \simeq 5$ si legge dal diagramma di Bode dei moduli.

La coppia di poli in $\omega = 2$ è costituita da due poli reali coincidenti perché in $\omega = 2$ la distanza tra diagramma reale e diagramma asintotico é di 6 db.

Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati in $\omega = 8$ è $\delta = 0.5$ perché in $\omega = 2$ il diagramma reale coincide con il diagramma asintotico.

28. **(Luogo delle radici)** Sia dato il seguente sistema retroazionato:



tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione “solo in modo qualitativo”.

Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato diventa:

$$1 + K \frac{(2-s)}{s(s^2 + 4s + 10)(s+3)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + K_1 \frac{(s-2)}{s(s^2 + 4s + 10)(s+3)} = 0$$

dove $K_1 = -K$. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare di $K > 0$ è mostrato in Fig. 4. Sono presenti tre asintoti. Il centro degli asintoti σ_a è il seguente:

$$\sigma_a = \frac{1}{3} (-4 - 3 - 2) = -\frac{9}{3} = -3$$

29. **(Contorno delle radici)** Sia data la seguente equazione caratteristica di un sistema retroazionato:

$$1 + \frac{6}{\alpha s^3 + (1 + \alpha)s^2 + 5s} = 0$$

Tracciare qualitativamente il contorno delle radici dell'equazione caratteristica al variare del parametro $\alpha > 0$. Il calcolo di α^* non è necessario. Determinare la posizione dei punti di diramazione “solo in modo qualitativo”.

Sol. L'equazione caratteristica può essere riscritta nel seguente modo $1 + \alpha G_2(s) = 0$:

$$1 + \frac{6}{\alpha s^3 + (1 + \alpha)s^2 + 5s} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha s^3 + (1 + \alpha)s^2 + 5s + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{\alpha s^2(s+1)}{(s+2)(s+3)} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\alpha > 0$ è mostrato in Fig. 5. Il contorno delle radici ha un solo asintoto che coincide con il semiasse reale negativo.

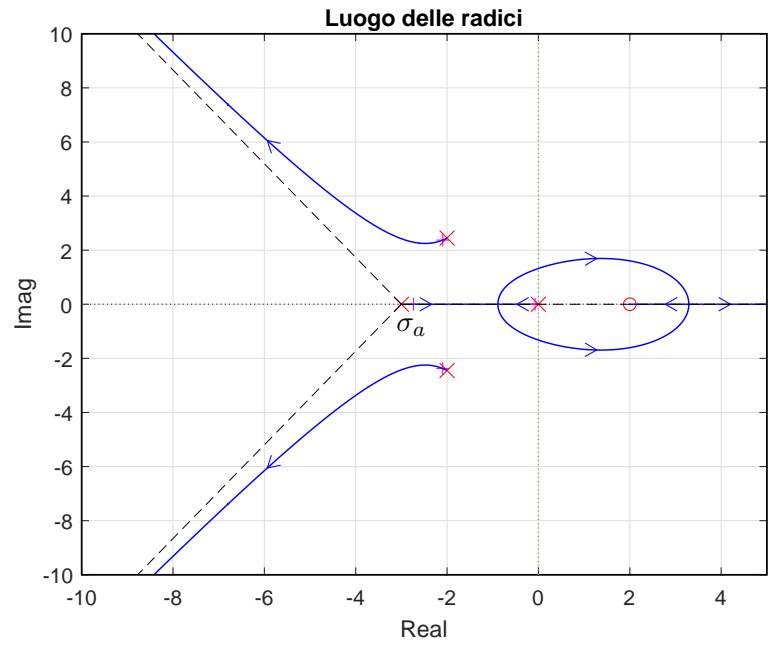


Figura 4: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare di $K > 0$.

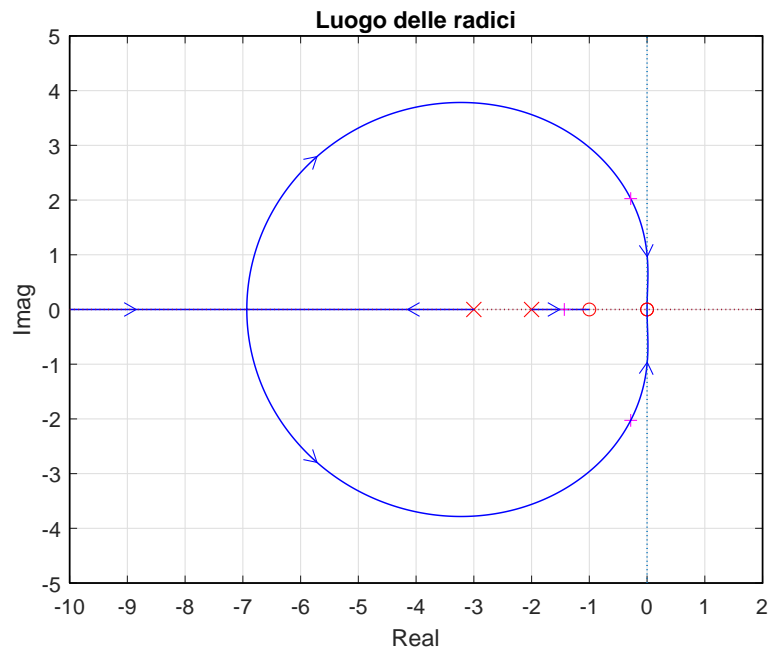


Figura 5: Contorno delle radici del sistema $G_2(s)$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

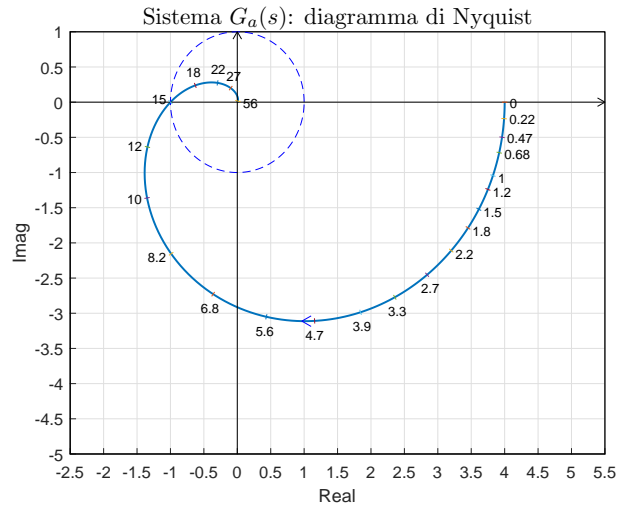
30. (Rete correttrice: Nyquist)

Sia data la funzione di risposta armonica del sistema $G_a(s)$ riportata a fianco.

Progettare una rete correttrice

$$C_a(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

in grado di far passare la funzione di risposta armonica del sistema compensato $C_a(s)G_a(s)$ per il punto $B = (-0.5, -0.3)$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.



Sol. Il modulo e la fase del punto B si ricava dalle specifiche di progetto:

$$M_B = \sqrt{0.5^2 + 0.3^2} = 0.5831, \quad \varphi_B = \left(\pi - \arctan\left(\frac{-0.3}{0.5}\right) \right) \frac{180}{\pi} = 210.96^\circ$$

In questo caso è possibile utilizzare solo una rete ritardatrice. La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 6. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per la sintesi della rete correttrice è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 8.2$:

$$M_A = 2.371, \quad \varphi_A = 245.34^\circ \quad \rightarrow \quad M = \frac{M_B}{M_A} = 0.246, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -34.38^\circ$$

La rete corretttrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi} = 0.1251, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi} = 0.6999 \quad \rightarrow \quad C_a(s) = \frac{1 + 0.1251 s}{1 + 0.6999 s}$$

Il diagramma di Nyquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_a(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 6.

Reti corretttrici relative ad altre scelte della pulsazione ω_A :

$$\begin{aligned} \omega_A &= [10 & 8.2 & 6.8 & 5.6 & 4.7] \\ M_A &= [1.917 & 2.371 & 2.752 & 3.081 & 3.317] \\ \varphi_A &= [-134.8 & -114.7 & -97.55 & -81.89 & -69.59] \\ M &= [0.3041 & 0.2459 & 0.2118 & 0.1892 & 0.1758] \\ \varphi &= [-14.28 & -34.38 & -51.49 & -67.15 & -79.45] \\ \tau_1 &= [0.2697 & 0.1251 & 0.0772 & 0.0385 & 0.0015] \\ \tau_2 &= [0.9403 & 0.6999 & 0.7701 & 0.9487 & 1.191] \end{aligned}$$

31. (Rete corretttrice: Nichols)

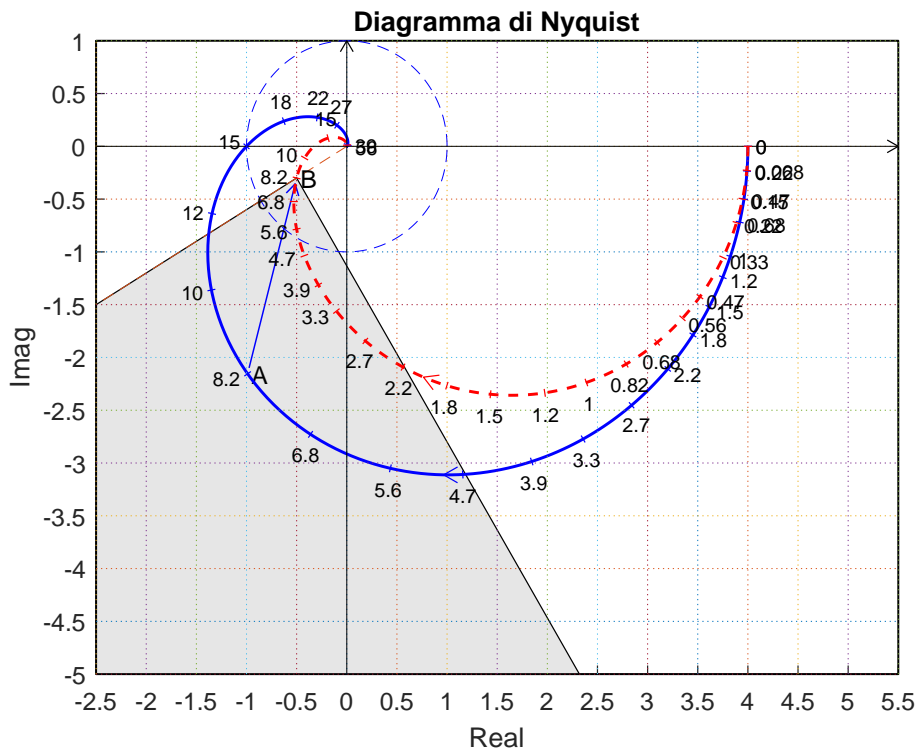


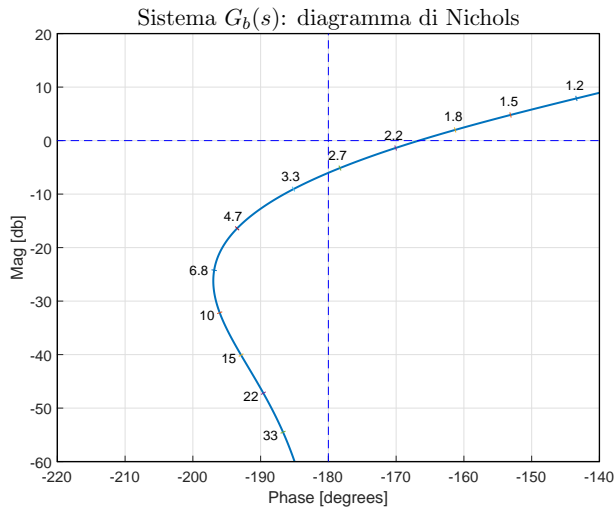
Figura 6: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_a(s)G_a(s)$.

Sia data la funzione di risposta armonica del sistema $G_b(s)$ riportata a fianco.

Progettare una rete **anticipatrice**

$$C_b(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

in modo da garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_\alpha = 10$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.



Sol. La specifica di progetto definisce univocamente la posizione del punto B : $M_B = -20 \text{ db} = 0.1$ e $\varphi_B = -180^\circ$. La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 7.

Il punto $A = G(j\omega_A)$ scelto per la sintesi della rete correttiva è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 10$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.0246, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -196.04^\circ.$$

I valori di M e φ da usare nelle formule di inversione sono i seguenti:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 4.06, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 16.04^\circ \quad \rightarrow \quad C_b(s) = \frac{(1 + 1.122 s)}{(1 + 0.2587 s)}.$$

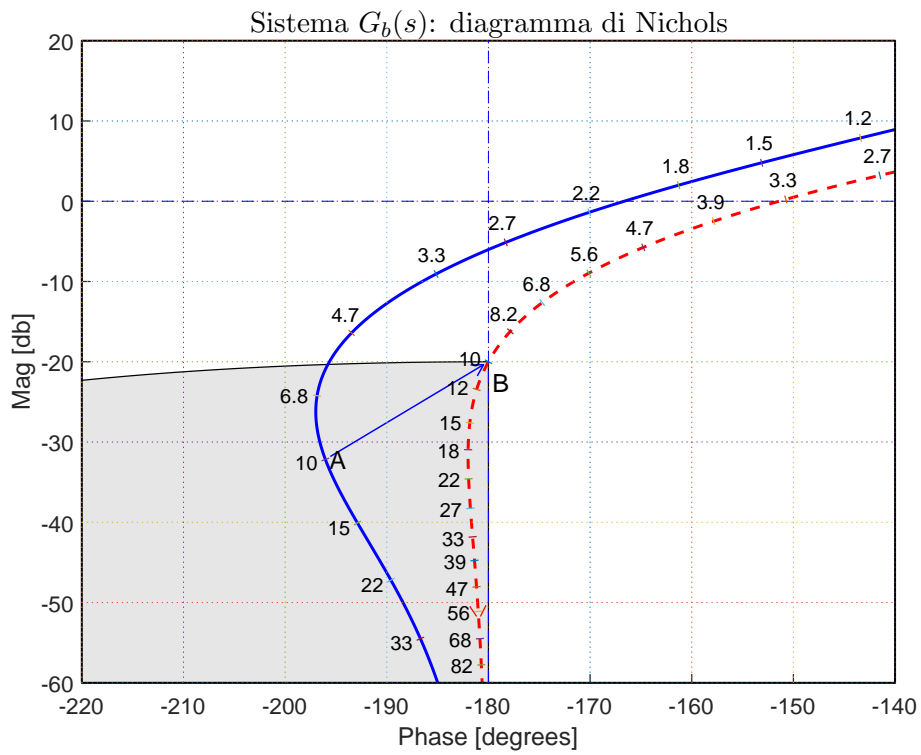


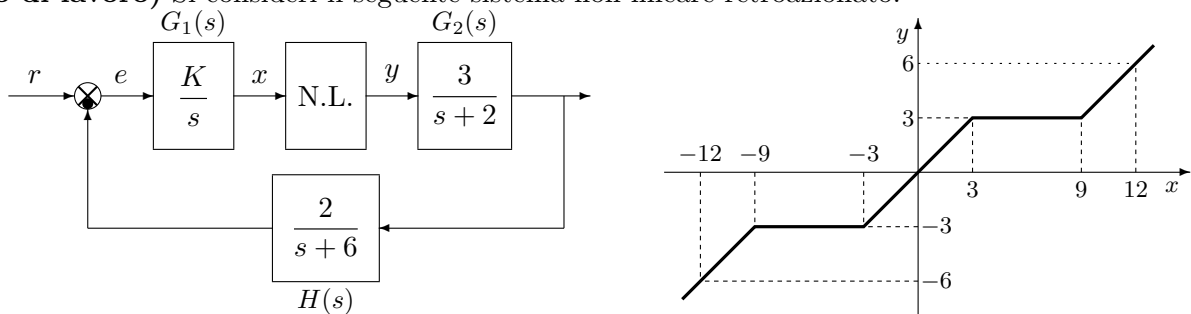
Figura 7: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_b(s)G_b(s)$.

I diagrammi di Nichols delle funzioni $G_b(s)$ e $C_b(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 7.

Sintesi della rete correttiva $C_b(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A :

$$\begin{aligned} \omega_A &= [6.8 \quad 10 \quad 15 \quad 22 \quad 33] \\ M_A &= [0.0614 \quad 0.0246 \quad 0.0098 \quad 0.0043 \quad 0.0018] \\ \varphi_A &= [163.1 \quad 164 \quad 167.1 \quad 170.4 \quad 173.3] \\ M &= [1.627 \quad 4.061 \quad 10.1 \quad 22.93 \quad 53.11] \\ \varphi &= [16.86 \quad 16.04 \quad 12.88 \quad 9.594 \quad 6.691] \\ \tau_1 &= [0.3397 \quad 1.122 \quad 2.729 \quad 5.985 \quad 13.56] \\ \tau_2 &= [0.1736 \quad 0.2587 \quad 0.2619 \quad 0.257 \quad 0.2534] \end{aligned}$$

32. **(Punto di lavoro)** Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:



Posto $K = 1$, determinare per quale valore r^* del riferimento r il punto di lavoro del sistema retroazionato coincide con il punto $(x_0, y_0) = (12, 6)$.

Soluzione. Il guadagno statico del sistema $G_1(s)$ è infinito, per cui la retta di carico è orizzontale:

$$y = \frac{r}{K_2 K_3} = 2r \quad \text{dove} \quad K_2 = \frac{3}{2}, \quad K_3 = \frac{1}{3}$$

Il valore r^* si ottiene ponendo $y = 3$ nella retta di carico:

$$6 = 2r^* \quad \rightarrow \quad r^* = 3$$

33. **(Criterio del cerchio)** Vedi (32). Posto $K = 1$, $r = r^*$ ed utilizzando il criterio del cerchio, dire se il sistema retroazionato è stabile nell'intorno del punto di lavoro $(x_0, y_0) = (12, 6)$.

Soluzione. Per $r = r^*$ il punto di lavoro coincide con il punto $(x_0, y_0) = (12, 6)$. Le pendenze delle 2 rette che passano nel punto di lavoro e che racchiudono a settore tutta la non linearità sono:

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = 1.$$

Per $K = 1$, il guadagno d'anello del sistema è:

$$G(s) = G_1(s) H(s) = \frac{6}{s(s+2)(s+6)}$$

Il margine di ampiezza K^* e la pulsazione ω^* della funzione $G(s)$ sono i seguenti:

$$K^* = \frac{2 \cdot 6(2+6)}{6} = 16, \quad \omega^* = \sqrt{2 \cdot 6} = \sqrt{12} = 3.4641.$$

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ non interseca il cerchio critico e quindi, in base al criterio del cerchio, si può affermare che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile nell'intorno del punto di lavoro $(x_0, y_0) = (12, 6)$. In Fig. 8 è mostrato il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ sovrapposto al cerchio critico.

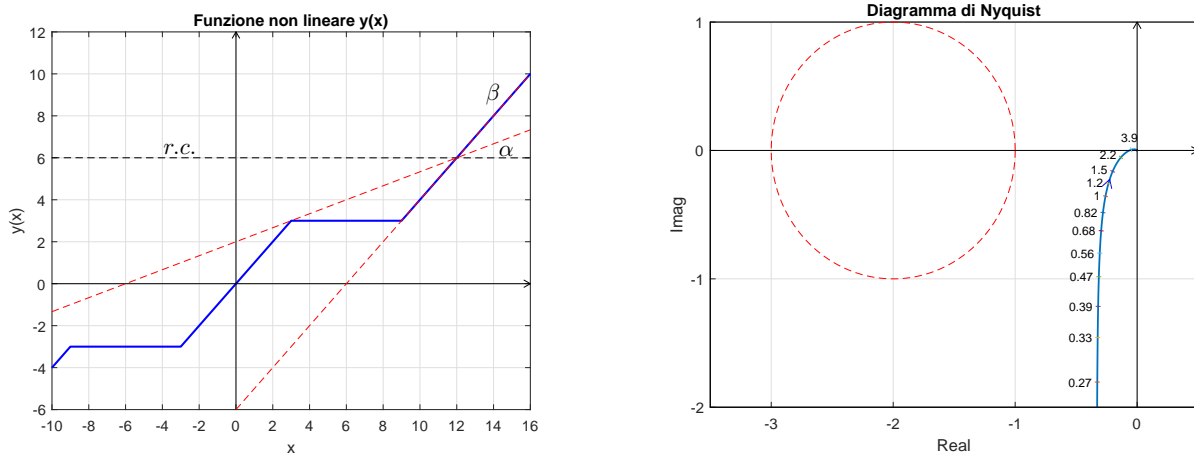


Figura 8: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ e cerchio critico.

34. **(Funzione descrittiva)** Vedi (32). Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità N.L. assegnata, prendendo l'origine come punto di lavoro. Utilizzare delle variabili (per esempio: m_1, m_2, \dots) per rappresentare gli eventuali valori non noti minimi e massimi

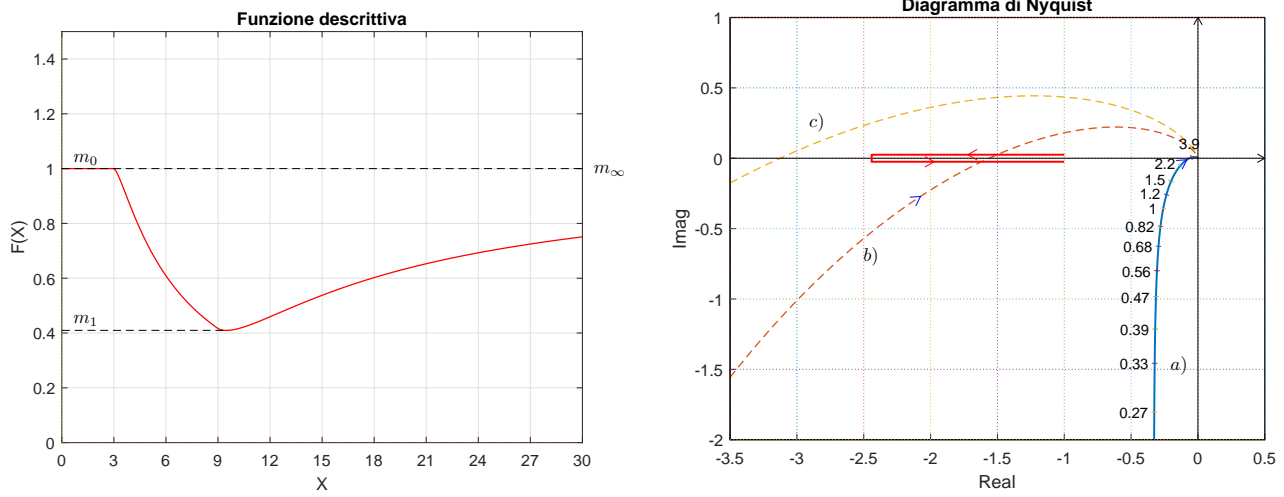


Figura 9: Andamento della funzione descrittiva $F(X)$.

della funzione $F(X)$.

Soluzione. L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ è mostrato in Fig. 9. Indichiamo: a) con $m_0 = 1$ il valore iniziale della funzione $F(X)$ per $X < 3$; b) con $m_1 \simeq 0.4$ il valore minimo della funzione $F(X)$ per $X \simeq 9$; c) con $m_\infty = 1$ il valore finale della funzione $F(X)$ per $X \rightarrow \infty$.

35. **(Discussione al variare di K)** Vedi (32). Discutere “qualitativamente” (anche in funzione dei parametri m_1, m_2, \dots) l'esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno $K > 0$.

Soluzione. Sol. Per $K = 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $G(s)$ è $K^* = 16$. Per $K \neq 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $K G_1(s)$ è:

$$K^* = \frac{\bar{K}^*}{K} = \frac{16}{K}$$

Al variare di K si hanno quindi queste 3 possibili soluzioni:

- a) $K^* > m_1$: la funzione $-1/F(X)$ è tutta esterna al diagramma completo della funzione $G(s)$ per cui non vi sono cicli limite e l'origine è un punto di lavoro globalmente asintoticamente stabile.
- b) $m_1 < K^* < m_0$: il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in 2 punti a cui corrispondono 2 cicli limite, uno stabile (quello uscente) e uno instabile (quello entrante).
- c) $K^* < m_1$: la funzione $-1/F(X)$ è tutta interna al diagramma completo della funzione $G(s)$ per cui non vi sono cicli limite e l'origine è un punto di lavoro instabile.

36. **(Discretizzazione)** Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare, discretizzare la seguente rete correttiva

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s+1)}{(s+2)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.2$.

Sol. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(z) = \frac{(s+1)}{(s+2)} \Big|_{s=\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}} = \frac{2(1-z^{-1}) + T(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1}) + 2T(1+z^{-1})} = \frac{T+2 + (T-2)z^{-1}}{2T+2 + (2T-2)z^{-1}}$$

Per $T = 0.2$ si ha:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{2.2 - 1.8z^{-1}}{2.4 - 1.6z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m(k) = \frac{1}{2.4} [1.6m(k-1) + 2.2e(k) - 1.8e(k-1)]$$

cioè:

$$m(k) = 0.666m(k-1) + 0.916e(k) - 0.75e(k-1)]$$