Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐

Firma:

Esame scritto di Controlli Automatici
Foglio delle risposte. Data del compito: 28 giugno 2021

Domande a risposta multipla. Per ciascun domanda riportare nella seguente tabella le lettere di tutte le risposte che si ritengono vere.

1) A B D	2) D	3) D	4) B D	5) B D
6) B	7) C D	8) A C	9) C	10) A

Domande dirette. Per ciascuna domanda riportare nella seguente tabella la corrispondente risposta.

11) $X(s) = 4 + \dfrac{12}{(s-2)^4} + \dfrac{20}{(s+3)^2+4^2}$	12) $g(t) = 1 + 6\,t + 2\,e^{-3t}$
13) $y(t) \simeq 8 + 2\,\cos(3\,t + \frac{\pi}{6} - 2\arctan 3)$	14) $K(s) = \dfrac{1}{1+G(s)H(s)}$
15) $M(\omega) = \dfrac{\omega^2+25}{\sqrt{(\omega^2+1)(3-\omega^2)}}$	16) $y_1(t) = 2\sqrt{3}\,\sin(5\,t) = 3.46\,\sin(5\,t)$
17) $\dddot{y} + 5\,\ddot{y} + 6\,\dot{y} = \ddot{x} + 2\,\dot{x} + x$	18) $y(n) = 2 - 0.5^n$
19) $0 < K < K_0 = -\left.\dfrac{1}{G(s)}\right\rvert_{s=0} = 12$	20) $0 < K < K^* = \dfrac{\pi}{2t_0} = \dfrac{\pi}{6} = 0.523$

Esercizi. Per ciascun esercizio riportare negli spazi indicati i risultati finali e principali passaggi necessari per ottenerli. Si raccomanda di scrivere in maniera chiara.

21. Mason

$$G_1(s) = \frac{A\,C + A\,F\,(1+C\,D)}{1 + A\,B + C\,D + A\,C\,E + A\,F\,E + A\,B\,C\,D + A\,F\,E\,C\,D}$$

22. Risposta al gradino

a) Il valore a regime:

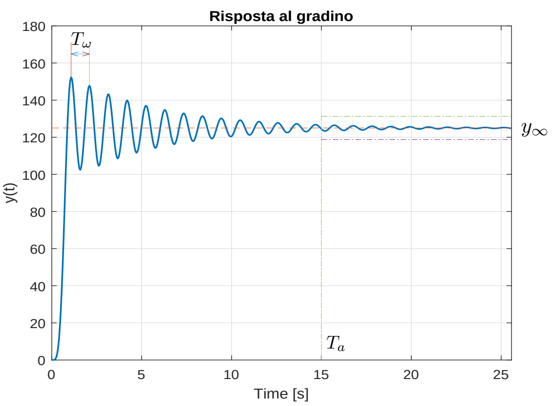
$$y_\infty = 125,$$

b) Il tempo di assestamento:

$$T_a \simeq \frac{3}{0.2} = 15\,\text{s},$$

c) Il periodo dell'eventuale oscillazione:

$$T_\omega \simeq \frac{2\pi}{6} \simeq 1.05.$$



23. Margini

a) $M_\alpha = 0.811$ *b)* $M_\varphi = -8.4°$ *c)* $K_\varphi = 0.3$ *d)* $K_\alpha = 0.2$

24. Criterio di Routh

Equazione caratteristica del sistema retroazionato:

$$1 + \frac{K\,(s+8)}{s(s+0.2)(s+1)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 1.2\,s^2 + (0.2+K)s + 8\,K = 0.$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 0.2+K \\ 2 & 1.2 & 8K \\ 1 & 1.2(0.2+K) - 8K & \\ 0 & 8K & \end{array}$$

Calcoli: Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$(1.2-8)K + 0.24 > 0, \qquad K > 0.$$

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$0 < K <= K^* = \frac{0.24}{6.8} = 0.0353$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{8K^*}{1.2}} = 0.4851.$$

25. Diagrammi asintotici di Bode

La funzione approssimante $G_0(s)$, la fase φ_0 e il modulo M_0:

$$G_0(s) = \frac{40}{s} = \frac{K_0}{s}, \qquad \varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \qquad M_0 = \infty$$

La funzione approssimante $G_\infty(s)$, fase φ_∞ e modulo M_∞:

$$G_\infty(s) = \frac{1}{s^2}. \qquad \varphi_\infty = -\pi, \qquad M_\infty = 0$$

Guadagno β in corrispondenza della pulsazione ω_0 dove si ha il primo cambio di pendenza:

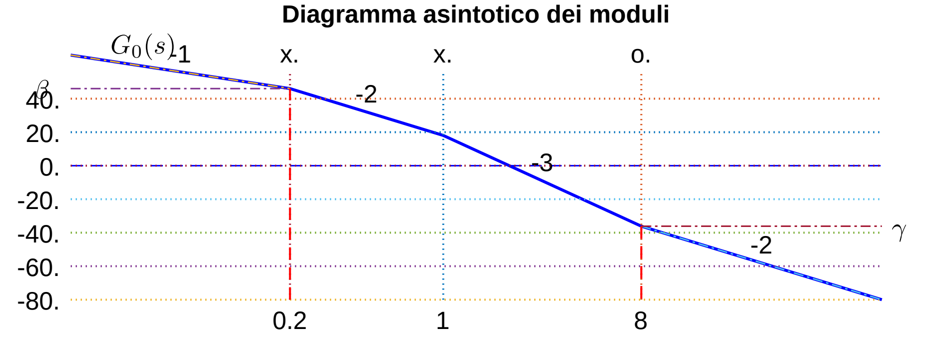
$$\omega_0 = 0.2, \qquad \beta = \frac{40}{0.2} = 200 = 46 \text{ db.},$$

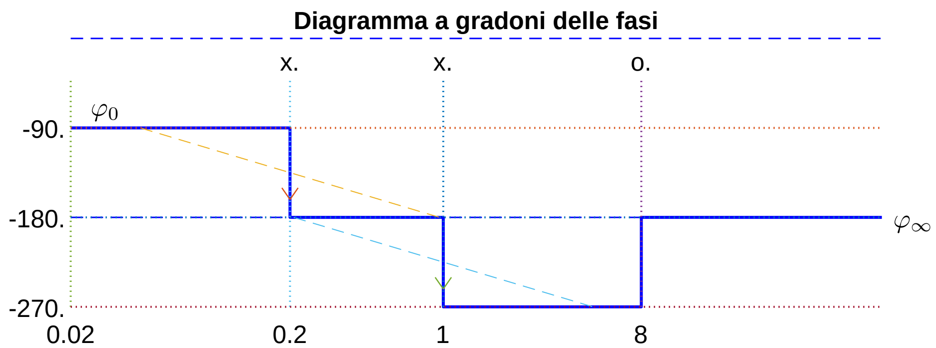
Guadagno γ in corrispondenza della pulsazione ω_∞ dove si ha l'ultimo cambio di pendenza:

$$\omega_\infty = 8, \qquad \gamma = \frac{1}{8^2} = 0.0156 = -36.14 \text{ db.}$$

25. Diagrammi asintotici di Bode (scale logaritmiche)

Dopo aver indicato i valori degli assi, riportare i diagrammi asintotici di Bode delle fase e delle ampiezze.





26. Diagramma di Nyquist

Fase iniziale φ_0, modulo iniziale M_0 e parametro Δ_τ:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \qquad M_0 = \infty, \qquad \Delta\tau = \frac{1}{8} - \frac{1}{0.2} - 1 = -\frac{47}{8} = -5.875 > 0$$

Fase finale φ_∞, modulo finale M_∞ e parametro Δ_p:

$$\varphi_\infty = -\pi \qquad M_\infty = 0 \qquad \Delta_p = -8 + 0.2 + 1 = -6.8 < 0$$

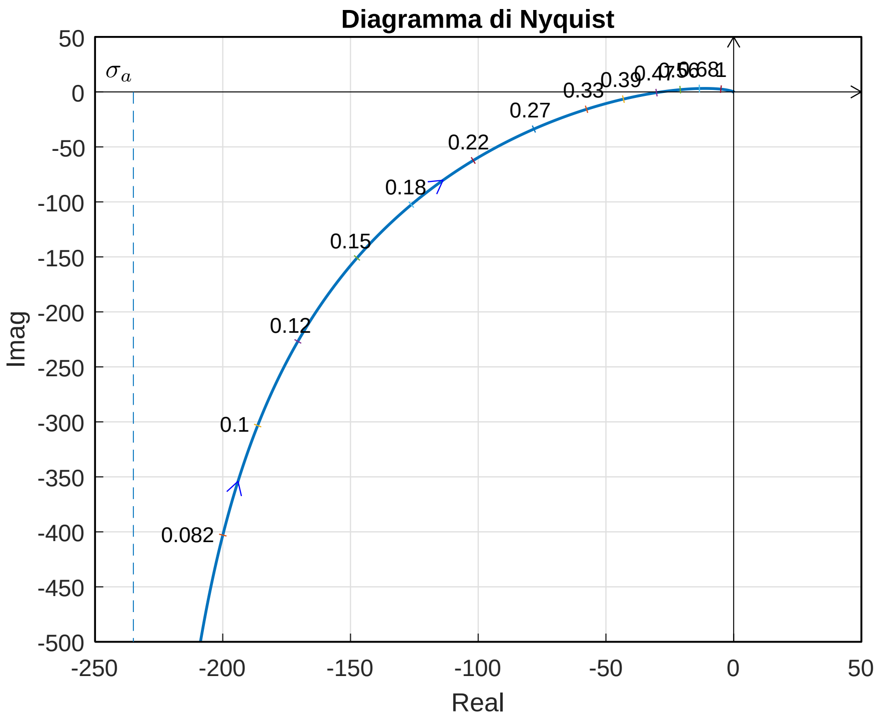
Indicare se nel diagramma di Nyquist é presente un asintoto verticale: Si $\boxtimes$, No $\square$.

Se si, fornire la posizione dell'asintoto verticale: $\sigma_a = K\Delta_\tau = 40 \cdot (-5.875) = -235$

Variazione di fase $\Delta\varphi$ per $\omega \in]0, \infty[$: $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$

Eventuale intersezione con il semiasse reale: $\sigma_1^* == -\frac{1}{K^*} = -28.33.$

Tracciamento qualitativo del diagramma di Nyquist completo:



27. Stima di una funzione $G(s)$

Funzione di trasferimento del sistema:

$$G(s) = \frac{-30(s^2 + 0.02s + 0.1^2)(s - 200)}{(s+2)^2(s^2 - 30s + 30^2)}.$$

Il valore $K = -30$ si determina, per esempio, calcolando il modulo β dell'approssimante $G_0(s)$ in corrispondenza del guadagno statico $\omega = 0$:

$$|G_0(s)|_{s=0} = \left|\frac{K\,0.1^2(-200)}{2^2\,30^2}\right| = \frac{|K|}{1800} = \beta \simeq -35.563 \text{ db} \simeq 0.0167 \qquad \rightarrow \qquad |K| \simeq 30.$$

e tenendo conto del fatto che

$$\arg|G_0(0)| = \arg\left|\frac{-K}{1800}\right| = -\pi + \arg K = 0$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati in $\omega = 0.1$ è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\dots}} \simeq \frac{1}{10} = 0.1.$$

28. Luogo delle Radici

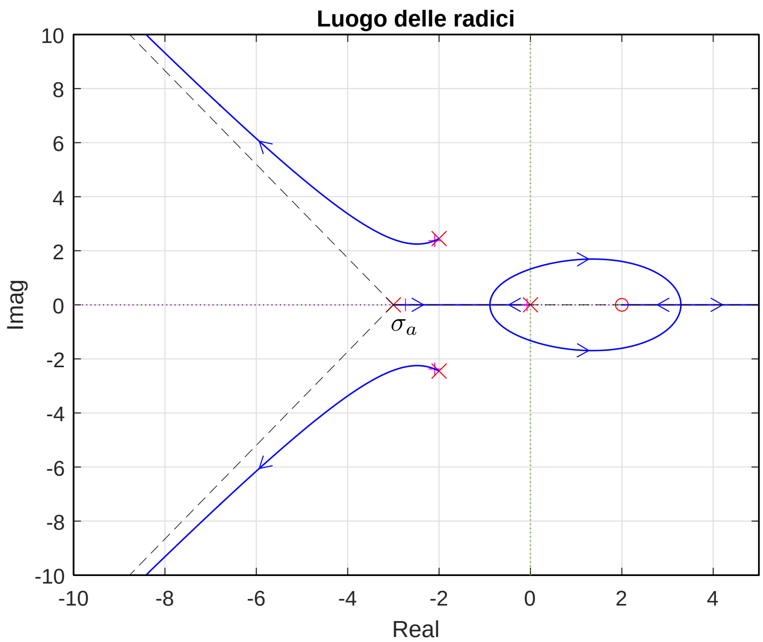
Equazione caratteristica del sistema retroazionato:

$$1 + K\frac{(2-s)}{s(s^2+4s+10)(s+3)} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 + K_1\frac{(s-2)}{s(s^2+4s+10)(s+3)} = 0$$

dove $K_1 = -K$. Numeri r degli asintoti e posizione σ_a del centro degli asintoti (solo se $r \geq 2$):

$$r = 3 \qquad\qquad \sigma_a = \frac{1}{3}(-4-3-2) = -\frac{9}{3} = -3$$

Tracciamento qualitativo del luogo delle radici per $K > 0$:



29. Contorno delle Radici

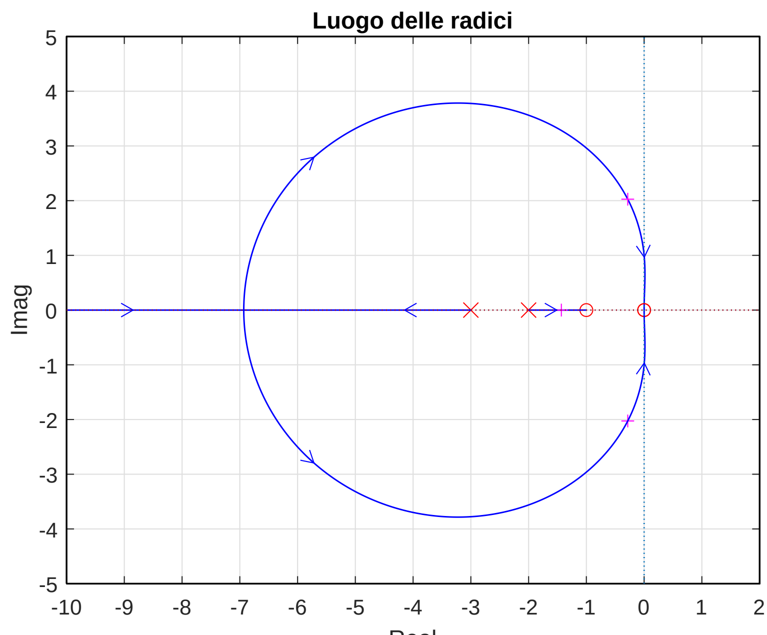
Equazione caratteristica del sistema dinamico assegnato posto nella forma $1 + \alpha\, G_2(s)$:

$$1 + \frac{6}{\alpha s^3 + (1+\alpha)s^2 + 5\,s} = 0 \qquad \rightarrow \qquad 1 + \frac{\alpha s^2(s+1)}{(s+2)(s+3)} = 0$$

Funzione $G_2(s)$ fattorizzata, grado relativo r e posizione σ_a del centro degli asintoti (se $|r| > 1$):

$$G_2(s) = \frac{s^2(s+1)}{(s+2)(s+3)} \qquad\qquad r = -1$$

Tracciamento qualitativo del contorno delle radici della funzione $G_2(s)$ per $\alpha > 0$:



30. Rete correttrice: Nyquist

Modulo e fase del punto B:

$M_B = 0.5831 \qquad \varphi_B = 210.96^o$

Pulsazione ω_A del punto A:

$\omega_A = 8.2$

Modulo e fase del punto A:

$M_A = 2.371, \qquad \varphi_A = 245.34^o.$

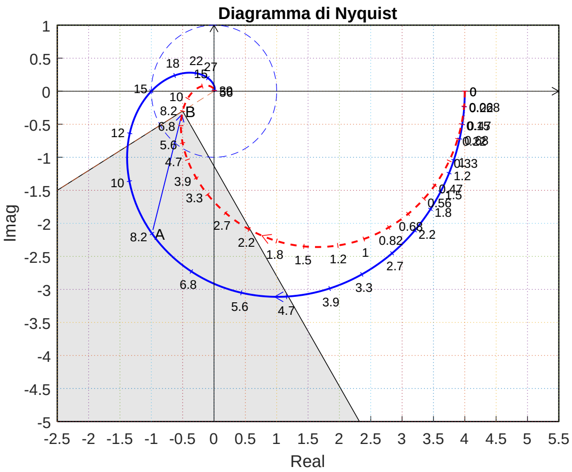
Parametri M e φ:

$M = 0.246, \qquad \varphi = -34.38°$

Parametri τ_1 e τ_2:

$\tau_1 = 0.1251 \qquad \tau_2 = 0.6999$

Disegnare su questo piano di Nyquist la posizione del punto B e la zona di ammissibilitá:



Rete correttrice:

$$C(s) = \frac{1+\tau_1\, s}{1+\tau_2\, s} = \frac{1+0.1251\, s}{1+0.6999\, s}$$

31. Rete correttrice: Nichols

Modulo e fase del punto B:

$M_B = -20 \text{ db} = 0.1 \qquad \varphi_B = -180°$

Pulsazione ω_A del punto A:

$\omega_A = 10$

Modulo e fase del punto A:

$M_A = 0.0246, \qquad \varphi_A = -196.04°.$

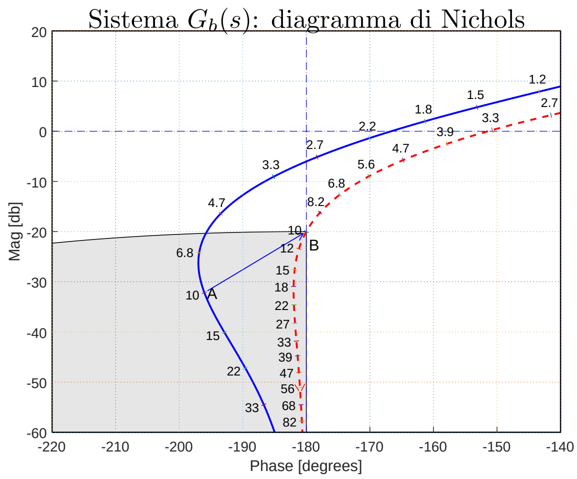
Parametri M e φ:

$M = 4.06, \qquad \varphi = 16.04°$

Parametri τ_1 e τ_2:

$\tau_1 = 1.122 \qquad \tau_2 = 0.2587$

Disegnare sul questo piano di Nichols la posizione del punto B e la zona di ammissibilitá:



Rete correttrice:

$$C(s) = \frac{1+\tau_1\, s}{1+\tau_2\, s} = \frac{(1+1.122\, s)}{(1+0.2587\, s)}$$

32. Punti di lavoro

Guadagni statici: $K_1 = \infty$ $K_2 = \frac{3}{2}$ $K_3 = \frac{1}{3}$

Retta di carico:

$$y = \frac{r}{K_2\,K_3} = 2\,r$$

Valori r_1 ed r_2 del segnale di ingresso r corrispondenti ai punti di lavoro $(x_1,\ y_1)$ e $(x_2,\ y_2)$:

$$6 = 2\,r^* \qquad \rightarrow \qquad r^* = 3$$

33. Criterio del cerchio

Pendenze delle rette del settore:

$$\alpha = \frac{1}{3}, \qquad \beta = 1.$$

Funzione d'anello $G(s)$:

$$G(s)\frac{6}{s(s+2)(s+6)}$$

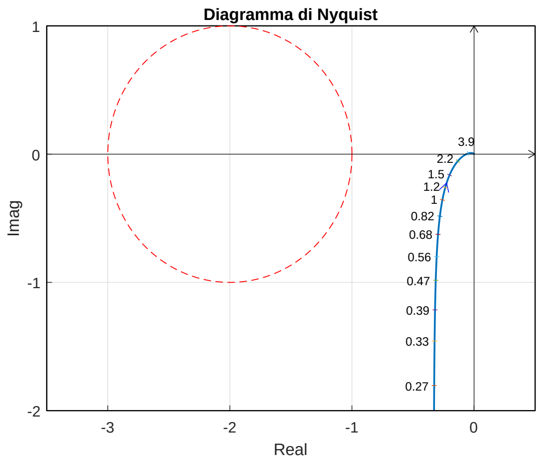
Parametri della funzione $G(s)$:

$$K^* = \frac{2\cdot 6\,(2+6)}{6} = 16, \qquad \omega^* = \sqrt{2\cdot 6} = \sqrt{1}$$

Il sistema retroazionato é:

- ⊗ globalmente asintoticamente stabile;
- ○ instabile;
- ○ non si puó dire nulla;

Disegnare su questo piano di Nyquist la posizione del cerchio critico e della $G(j\omega)$:



34. Funzione descrittiva

Valore della $F(X)$ per $X = 0^+$:

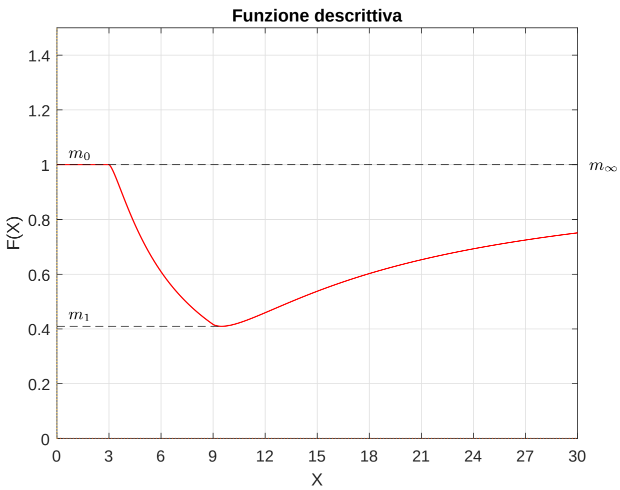
$$m_0 = 1$$

Valore della $F(X)$ per $X = \infty$:

$$m_\infty = 1$$

Note:

Andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$:



Discussione al variare di K

Per $K \neq 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $K\,G_1(s)$ è:

$$K^* = \frac{\bar{K}^*}{K} = \frac{16}{K}$$

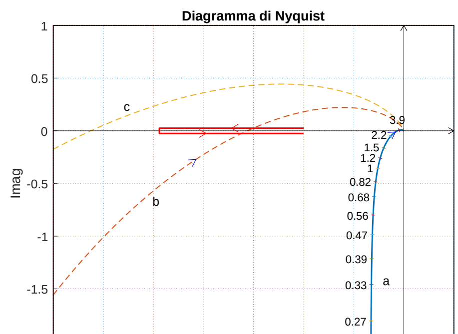
Discussione al variare di K:

a) $K^* > m_1$: non vi sono cicli limite e l'origine è un punto di lavoro globalmente asintoticamente stabile.

b) $m_1 < K^* < m_0$: 2 cicli limite, uno stabile (quello uscente) e uno instabile (quello entrante).

c) $K^* < m_1$: non vi sono cicli limite e l'origine è un punto di lavoro instabile.

Rappresentazione grafica delle funzioni $G(j\omega)$ e $-\frac{1}{F(X)}$:



36. Discretizzazione

Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(z) = \left.\frac{(s+1)}{(s+2)}\right|_{s=\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}} = \frac{2(1-z^{-1})+T(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})+2\,T(1+z^{-1})} = \frac{T+2+(T-2)z^{-1}}{2T+2+(2T-2)z^{-1}}$$

Per $T = 0.2$ si ha:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{2.2-1.8\,z^{-1}}{2.4-1.6\,z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m(k) = \frac{1}{2.4}[1.6\,m(k-1)+2.2\,e(k)-1.8\,e(k-1)]$$

cioè:

$$m(k) = 0.666\,m(k-1)+0.916\,e(k)-0.75\,e(k-1)]$$

37. Esercizio opzionale (se previsto)

A. Foglio di Brutta

B. Foglio di Brutta

C. Foglio di Brutta