

Domande a risposta multipla

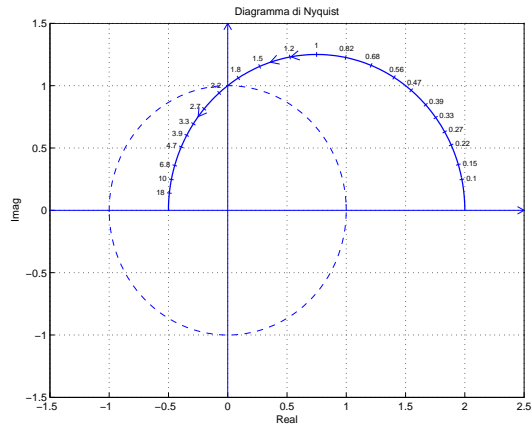
Si risponda alle seguenti domande a risposta multipla. Almeno una delle risposte é vera. Per ciascuna domanda riportare sul foglio delle risposte le lettere di tutte le risposte che si ritengono vere.

1. Il ritardo puro $G(s) = e^{-t_0s}$ è un sistema:
 - A. stabile**
 - B. lineare**
 - C. non lineare
 - D. a fase minima
2. Un sistema $G(s)$ retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se :
 - A. il margine di fase $M_\varphi > 0$;**
 - B. il margine di fase $M_\varphi > 1$;
 - C. il margine di ampiezza $M_a > 0$;
 - D. il margine di ampiezza $M_a > 1$;**
3. Un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati e privo di zeri, ha un picco di risonanza M_R maggiore di uno
 - A. se $0 < \delta < 1$
 - B. se $0 < \delta < \frac{1}{2}$
 - C. se $0 < \delta < \frac{1}{\sqrt{2}}$**
 - D. se $0 < \delta < \sqrt{2}$
4. Quale dei seguenti parametri della risposta al gradino di un sistema $G(s)$ è maggiormente influenzato dalla larghezza di banda ω_f del sistema stesso:
 - A. tempo di salita T_s**
 - B. tempo di ritardo T_r
 - C. tempo di assestamento T_a
 - D. massima sovraelongazione S
5. La formula di Bode per il calcolo della fase di un sistema a partire dal diagramma delle ampiezze
 - A. è una formula esatta**
 - B. è una formula approssimata
 - C. è valida per i sistemi lineari stabili
 - D. è valida per i sistemi a fase minima**

6. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $G(s) = \frac{(s+4)}{2(1-s)}$.

Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K :

- A. $\frac{1}{2} < K < 2$;
- B. $-\frac{1}{2} < K < 2$;
- C. $-2 < K < -\frac{1}{2}$;
- D. $(K < -\frac{1}{2}) \cup (K > 2)$;



7. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione e con un elevato guadagno statico d'anello

- A. è poco sensibile alle variazioni parametriche di $G(s)$
- B. è poco sensibile alle variazioni parametriche di $H(s)$
- C. è poco sensibile alla presenza di disturbi costanti agenti sul sistema
- D. è poco sensibile alla presenza di disturbi sinusoidali ad alta frequenza agenti sul sistema

8. L'uso di un regolatore standard di tipo PD è consigliato:

- A. Se si desidera introdurre un anticipo di fase alle alte frequenze
- B. Se si desidera avere errore a regime nullo per ingresso a gradino
- C. Se si desidera introdurre una amplificazione delle ampiezze alle alte frequenze
- D. Per stabilizzare sistemi retroazionati con margini di fase fortemente negativi

9. La funzione di risposta armonica $F(\omega)$ di un sistema discreto $G(z)$ si determina nel seguente modo:

- A. $F(\omega) = G(j\omega)$
- B. $F(\omega) = G(e^{j\omega})$
- C. $F(\omega) = G(j\omega T)$
- D. $F(\omega) = G(e^{j\omega T})$

10. Il valore a regime $x(\infty)$ della sequenza $x(k)$ corrispondente alla funzione $X(z) = \frac{z+2}{(z-1)(z+0.5)}$ è:

- A. $x(\infty) = 0$
- B. $x(\infty) = 1$
- C. $x(\infty) = 2$
- D. $x(\infty) = 6$

Domande dirette

Si risponda alle seguenti domande dirette. Per ciascuna domanda riportare sul foglio delle risposte la corrispondente risposta.

11. Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ del seguente segnale temporale $x(t)$:

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[(2t^3 + \cos(3t))e^{-5t}] = \boxed{X(s) = \frac{12}{(s+5)^4} + \frac{(s+5)}{(s+5)^2 + 9}}$$

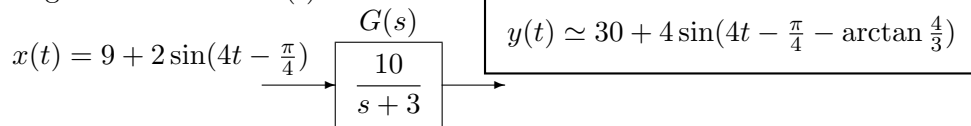
12. Calcolare la trasformata di Laplace inversa $g(t)$ delle seguente funzione di trasferimento $G(s)$:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[3 + \frac{12}{s(s+1)(s+3)}\right] = \boxed{3\delta(t) + 4 - 6e^{-t} + 2e^{-3t}}$$

Infatti si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{12}{s(s+1)(s+3)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s} - \frac{6}{s+1} + \frac{2}{s+3}\right] = 4 - 6e^{-t} + 2e^{-3t}.$$

13. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ mostrato in figura quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale $x(t)$:



14. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema del secondo ordine, senza zeri, caratterizzato da un guadagno statico $G(0) = 3$, da un coefficiente di smorzamento $\delta = 0.2$ e da una pulsazione naturale $\omega_n = 4$:

$$\boxed{G(s) = \frac{48}{s^2 + 1.6s + 16}}$$

15. Scrivere la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(3s-1)}{s(2-s^2)} e^{-4s} \quad \rightarrow \quad \boxed{\varphi(\omega) = \pi - \arctan 3\omega - \frac{\pi}{2} - 4\omega}$$

16. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $2\dot{y}(t) + 3y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = 4$: Applicando la trasformata di Laplace si ha:

$$2(sY(s) - 4) + 3Y(s) = 0 \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{4}{s+1.5} \quad \rightarrow \quad \boxed{y(t) = 4e^{-1.5t}}$$

17. Scrivere, in funzione dei segnali $x(t)$ e $y(t)$, l'equazione differenziale corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(s+2)^2}{s^3 + 3s^2 + 5s + 2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\ddot{y} + 3\dot{y} + 5y = \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x}$$

18. Calcolare la successione discreta $x(k)$ corrispondente alla seguente funzione complessa $X(z)$:

$$X(z) = \frac{2z}{(z - e^{-3T})} \quad \rightarrow \quad \boxed{x(k) = 2e^{-3kT}}$$

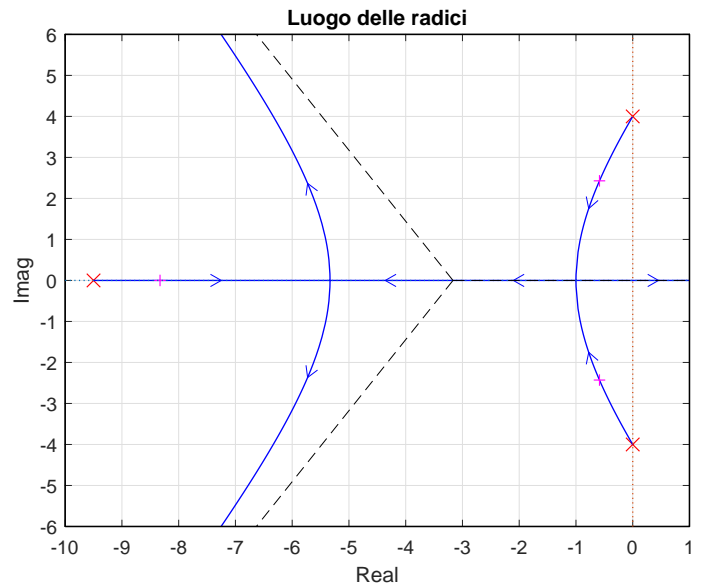
19. A fianco è riportato il luogo delle radici del sistema $G(s) = \frac{-100}{(s+9.5)(s^2+16)}$ al variare del parametro $K > 0$. Calcolare:

- a) La posizione σ_0 dei due poli dominanti nella condizione di minimo tempo di assestamento:

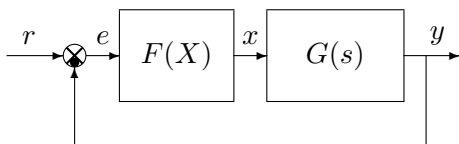
$$\sigma_0 = -1$$

- b) Il valore K_0 corrispondente alla condizione di minimo tempo di assestamento:

$$K_0 = -\frac{1}{G(s)} \Big|_{s=-1} = \frac{8.5 \cdot 17}{100} = 1.445$$



20. Sia dato il sistema non lineare retroazionato riportato sotto dove la non linearità viene descritta dalla funzione descrittiva $F(X)$:



Scrivere la relazione matematica in base alla quale il sistema retroazionato è sede di una oscillazione persistente:

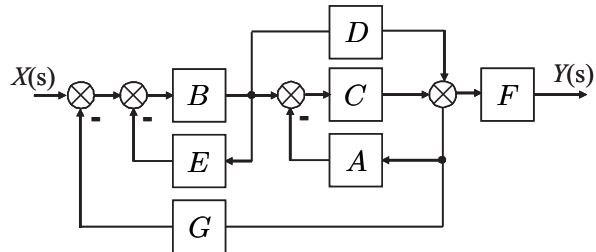
$$\boxed{F(X) G(j\omega) = -1}$$

Esercizi

Si svolgano i seguenti esercizi. La risposta di ciascun esercizio deve essere riportata sul foglio delle risposte nella sezione specificatamente riservata al corrispondente esercizio.

21. **(Mason)** Relativamente allo schema a blocchi mostrato in figura, calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s)$:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{BCF + BDF}{1 + BE + CA + BCG + BDG + BECA}$$



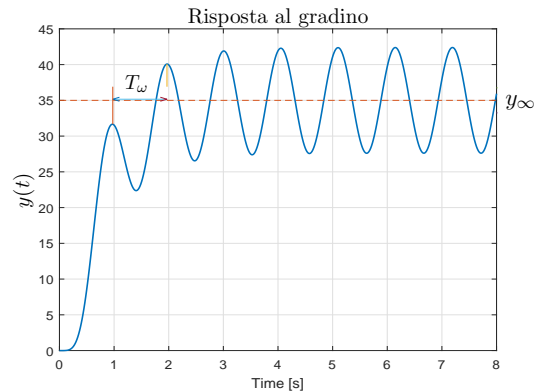
22. **(Risposta al gradino)** Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{270(7 + 0.2s)(s^2 + 20s + 80^2)}{(2s + 3)(3s + 20)(s^2 + 36)(s^2 + 10s + 160)}$$

Calcolare inoltre:

- il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \rightarrow \infty$;
- il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
- il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$;

$$y_\infty = 35, \quad T_a \simeq \infty, \quad T_\omega \simeq \frac{2\pi}{6} = 1.0472 \text{ s.}$$

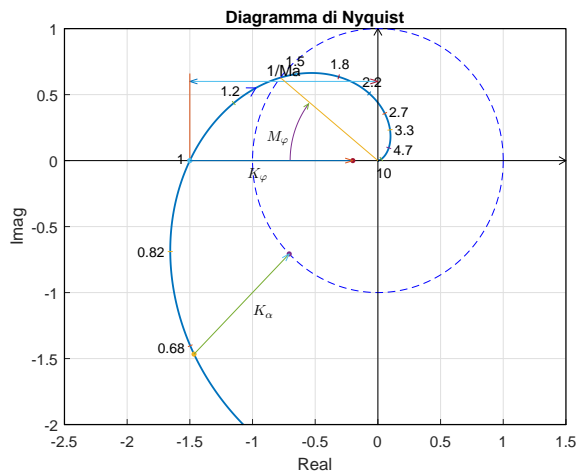


23. **(Margini di stabilità)** Sia data la funzione di risposta armonica, riportata in figura, di un sistema $G(s)$ a fase minima. Nei limiti della precisione consentita dal grafico, calcolare:

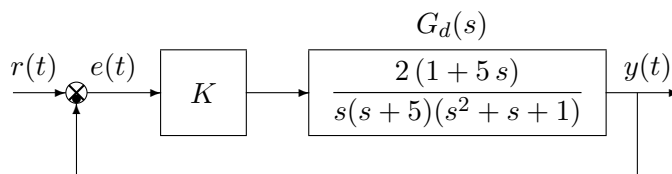
- il margine di ampiezza M_α del sistema;
- il margine di fase M_φ del sistema;
- il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 45$;
- il guadagno K_α per cui la funzione $K_\alpha G(j\omega)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 5$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

- a) $M_a = \frac{1}{1.5} = 0.6667$
- b) $M_\varphi = -38.94^\circ$
- c) $K_\varphi = 0.5$
- d) $K_\alpha = \frac{0.2}{1.5} = 0.1333$



24. (Criterio di Routh) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{2K(1+5s)}{s(s+5)(s^2+s+1)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 + 6s^3 + 6s^2 + 5(2K+1)s + 2K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

4	1	6	2K
3	6	$5(2K+1)$	
2	$31 - 10K$	$12K$	
1	$155 + 188K - 100K^2$		
0	$12K$		

Dalla riga 2 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K < \frac{31}{10}, \quad K > 0$$

Dalla riga 1 si ottiene la disequazione seguente:

$$155 + 188K - 100K^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{31}{50} < K < 2.5$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$0 < K < 2.5 = K^*$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{5(2K^*+1)}{6}} = \sqrt{5} = 2.236$$

25. **(Diagrammi asintotici di Bode)** Vedi (24). Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_d(s)$.

Soluzione.

I diagrammi “asintotici” di Bode della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 1. I diagrammi di Bode

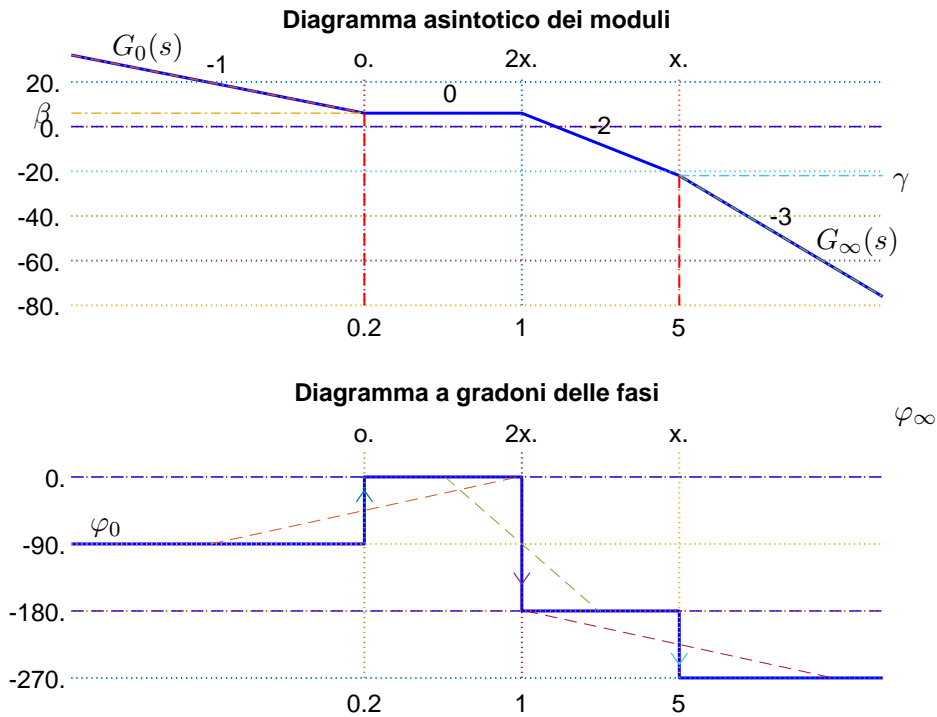


Figura 1: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_d(s)$.

delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \rightarrow 0$ ed $\omega \rightarrow \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{2}{5s} = \frac{0.4}{s}, \quad G_\infty(s) = \frac{10}{s^3}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi_\infty = -\frac{3\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.2$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 5$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.2} = 2 = 6 \text{ db}, \quad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=5} = \frac{10}{125} = 0.08 = -21.94 \text{ db}.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri stabili è $\delta = 1/(2\omega_n) = 0.5$.

26. **(Diagramma di Nyquist)** Vedi (24). Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” della funzione $G_d(s)$. Calcolare esattamente le eventuali intersezioni σ_i^* con l’asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* .

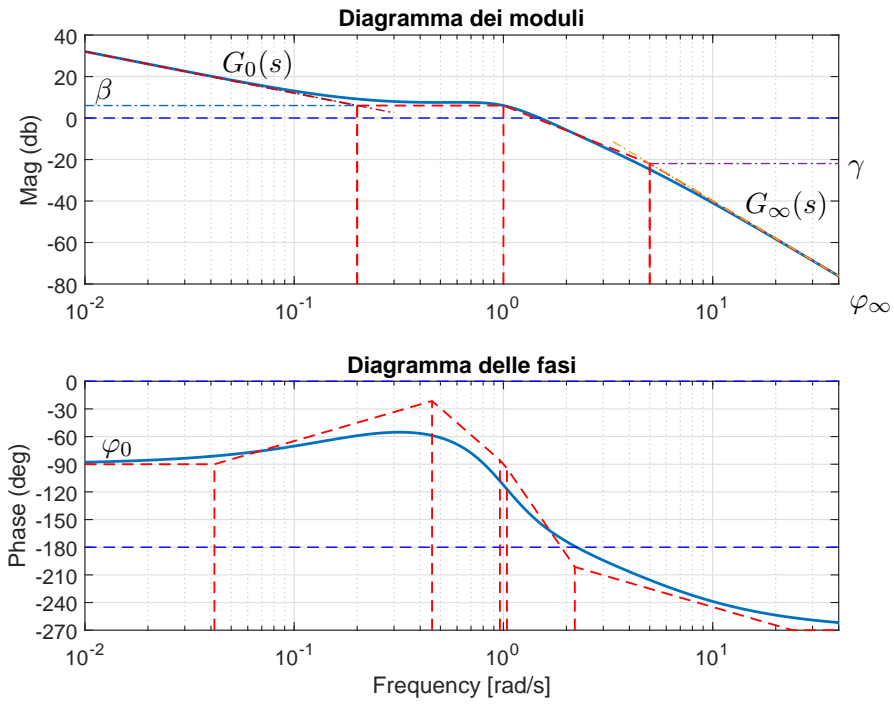


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G_d(s)$.

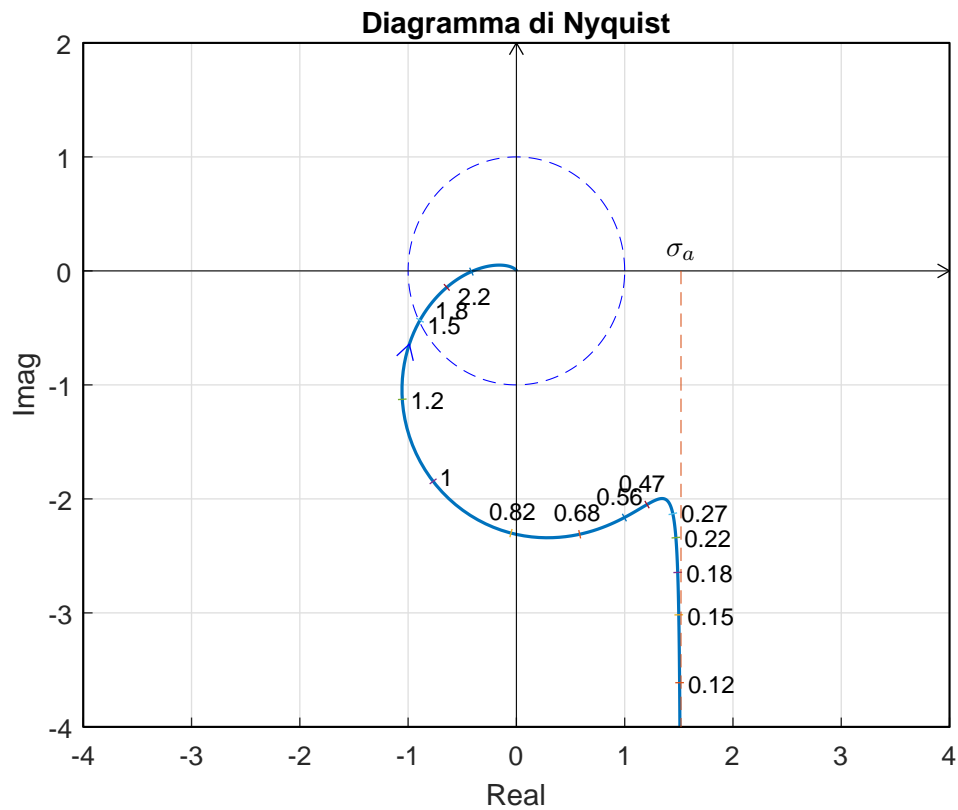


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G_d(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G_d(s)$ è mostrato in Fig. 3.

La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \rightarrow 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a φ_0 in quanto $\Delta\tau$ è positiva:

$$\Delta\tau = 5 - \frac{1}{5} - 1 = 3.8 < 0.$$

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale:

$$\sigma_a = \frac{2}{5} \left(5 - \frac{1}{5} - 1 \right) = 1.52$$

La variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \pi = -\pi$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di π in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{3\pi}{2}$. Per $\omega \rightarrow \infty$ il diagramma arriva in anticipo rispetto a φ_∞ in quanto Δ_p è positiva:

$$\Delta_p = -\frac{1}{5} + 5 + 1 = 5.8 > 0.$$

Esiste una sola intersezione con il semiasse reale negativo. L'intersezione avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{2.5} = -0.4$$

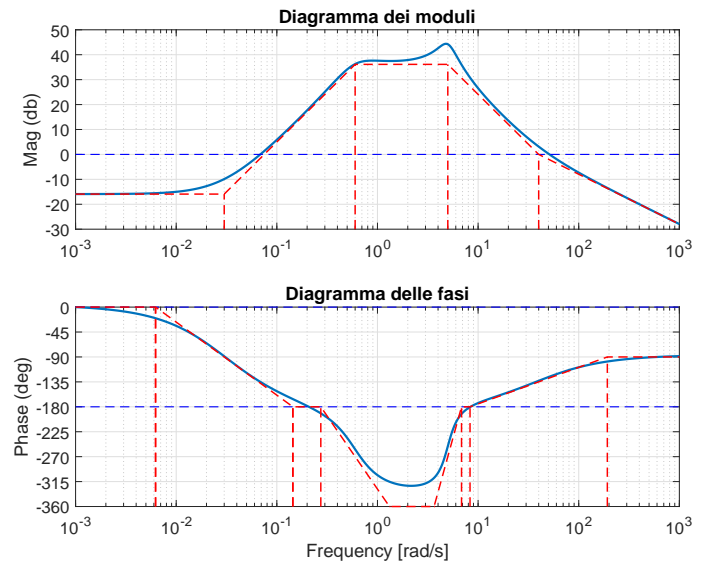
in corrispondente della pulsazione $\omega^* \simeq 2.234$.

27. (Stima di una funzione $G(s)$)

Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$. Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ .

$$G(s) = \frac{40(s - 0.03)^2(s + 40)}{(s^2 + 0.6s + 0.6^2)(s^2 - 2s + 5^2)}$$



Soluzione:

La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) \simeq \frac{40(s - 0.03)^2(s + 40)}{(s^2 + 0.6s + 0.6^2)(s^2 - 2s + 5^2)}.$$

Il valore $K = 40$ si determina, per esempio, calcolando il modulo γ dell'approssimante:

$$G_{\infty}(s) = \frac{K}{s}$$

in corrispondenza della pulsazione $\omega = 40$:

$$|G_{\infty}(s)|_{s=40j} = \left| \frac{K}{s} \right|_{s=40j} = \frac{|K|}{40} = \gamma \simeq 0 \text{ db} \simeq 1 \quad \rightarrow \quad |K| \simeq 40.$$

e poi notando che la fase finale φ_{∞} della funzione $G_{\infty}(s)$ è $\varphi_{\infty} = -\frac{\pi}{2}$.

Il coefficiente di smorzamento δ_1 della coppia di zeri complessi coniugati instabili è $\delta_1 = 1$ perché in $\omega = 0.03$ la distanza tra diagramma asintotico e diagramma reale è di 6 db.

Il coefficiente di smorzamento δ_2 della coppia di poli complessi coniugati stabili è:

$$\delta_2 = \frac{1}{2M_{\omega_n}} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

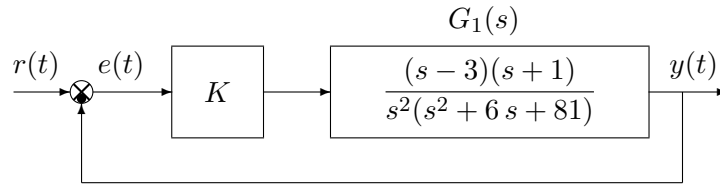
perché in $\omega = 0.6$ la distanza tra diagramma asintotico e diagramma reale è $M_{\omega_n} \simeq 0 \text{ db} = 1$.

Il coefficiente di smorzamento δ_3 della coppia di poli complessi coniugati in stabili è:

$$\delta_3 = \frac{1}{2M_{\omega_n}} = \frac{1}{5} = 0.2.$$

perché in $\omega = 5$ la distanza tra diagramma asintotico e diagramma reale è $M_{\omega_n} \simeq 8 \text{ db} = 2.5$.

28. **(Luogo delle radici)** Sia dato il seguente sistema retroazionato:



Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K < 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti. Determinare la posizione dei punti di diramazione “solo in modo qualitativo”.

Soluzione. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1 G_1(s) = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + K \frac{(s-3)(s+1)}{s^2(s^2+6s+81)} = 0$$

dove $K_1 = K$. Gli andamenti qualitativi del luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare di $K_1 < 0$ è mostrato in Fig. 4. Il luogo delle radici è caratterizzato da due asintoti. Per $K < 0$ i due asintoti sono verticali e si incontrano nel seguente punto σ_a :

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-6 - 3 + 1) = -4.$$

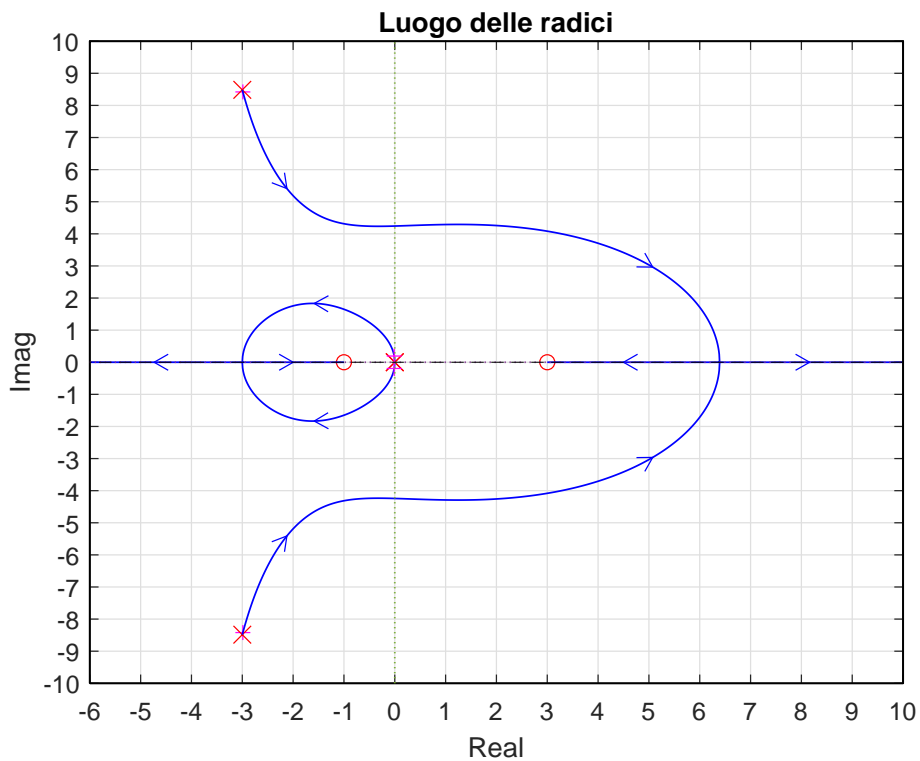


Figura 4: Luoghi delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare di $K_1 < 0$.

29. (Contorno delle radici) Sia data la seguente funzione di trasferimento $G_3(s)$

$$G_3(s) = \frac{2}{(1 + \alpha s)(2 + s) + 4}$$

Mostrare graficamente come si muovono sul piano complesso i poli della funzione di trasferimento $G_3(s)$ al variare del parametro $\alpha > 0$. Determinare esattamente la posizione dei punti di diramazione.

Soluzione. I poli della funzione di trasferimento $G_3(s)$ coincidono con le radici del polinomio a denominatore:

$$(1 + \alpha s)(2 + s) + 4 = 0.$$

Questa relazione può essere riscritta nel seguente modo:

$$s + 6 + \alpha s(s + 2) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \alpha \frac{s(s + 2)}{s + 6} = 0 \rightarrow \quad 1 + \alpha G_4(s) = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\alpha > 0$ è mostrato in Fig. 5. In questo caso il contorno delle radici si muove lungo una circonferenza centrata in $z = -6$. Il raggio R della circonferenza è il seguente:

$$R = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{24} = 4.899$$

I punti di diramazione σ_1 e σ_2 del contorno delle radici sono:

$$\sigma_1 = -6 - \sqrt{24} = -10.899, \quad \sigma_2 = -6 + \sqrt{24} = -1.101.$$

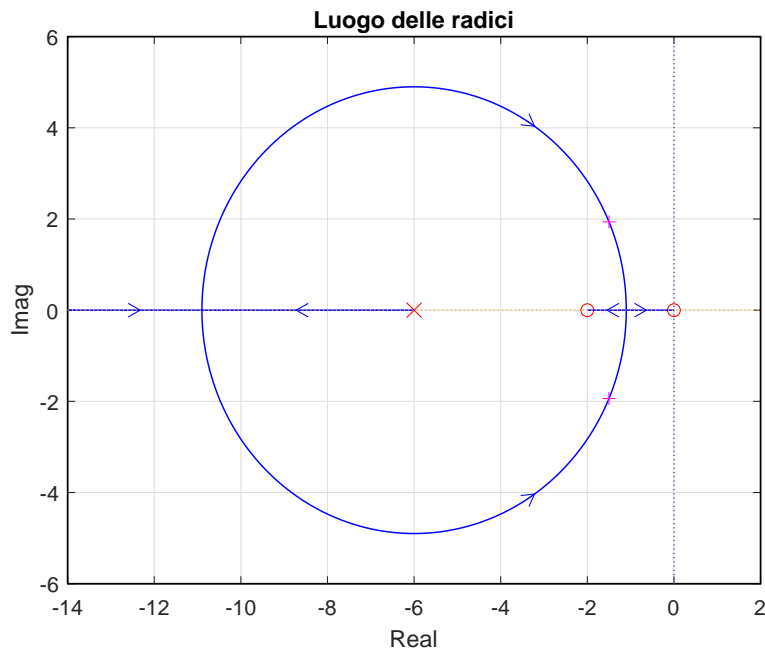


Figura 5: Contorno delle radici del sistema $G_4(s)$ al variare del parametro $L > 0$.

È possibile giungere allo stesso risultato nel seguente modo:

$$\frac{dG_4(s)}{ds} = 0 \quad \rightarrow \quad (2s + 2)(s + 6) - (s^2 + 2s) = s^2 + 12s + 12 = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{1,2} = -6 \pm \sqrt{24}.$$

La condizione di minimo tempo di assestamento di ha in corrispondenza del punto di diramazione $\sigma_1 = -10.899$ e quindi per il seguente valore del parametro α^* :

$$\alpha^* = - \left. \frac{1}{G_4(s)} \right|_{s=\sigma_2} = - \left. \frac{s + 6}{s(s + 2)} \right|_{s=-10.899} = 0.0505.$$

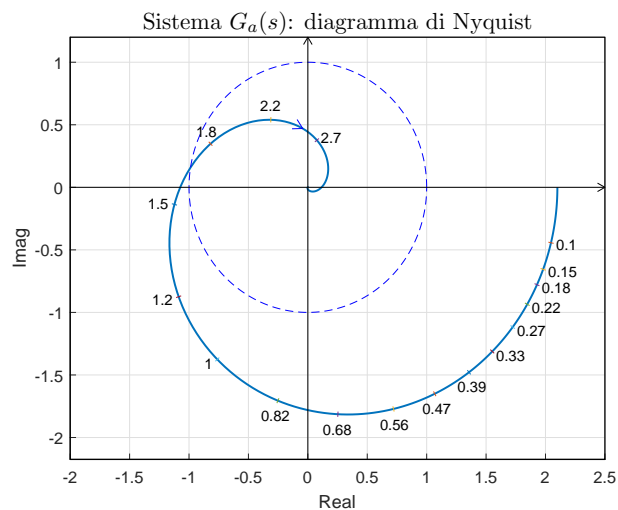
30. (Rete correttrice: Nyquist)

Sia data la funzione di risposta armonica del sistema $G_a(s)$ riportata a fianco.

Progettare una rete correttrice

$$C_a(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

in modo da garantire che la funzione di risposta armonica del sistema compensato $C_a(s)G_a(s)$ abbia un margine di ampiezza $M_a = 5$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.



Sol. La specifica sul margine di ampiezza $M_a = 10$ definisce completamente la posizione del punto $B = M_B e^{j\varphi_B}$:

$$M_B = \frac{1}{M_a} = 0.2, \quad \varphi_B = -180^\circ$$

La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 6.

Il punto $A = G_b(j\omega_A)$ scelto per la sintesi della rete correttiva è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 1.2$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 1.395, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -141.2^\circ.$$

Sostituendo i valori di M , φ e $\omega = \omega_A$ all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 0.845$ e $\tau_2 = 8.240$ della rete correttiva $C_1(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.1433, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -38.8^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 0.845 s)}{(1 + 8.240 s)}.$$

Il diagramma di Nyquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 6.

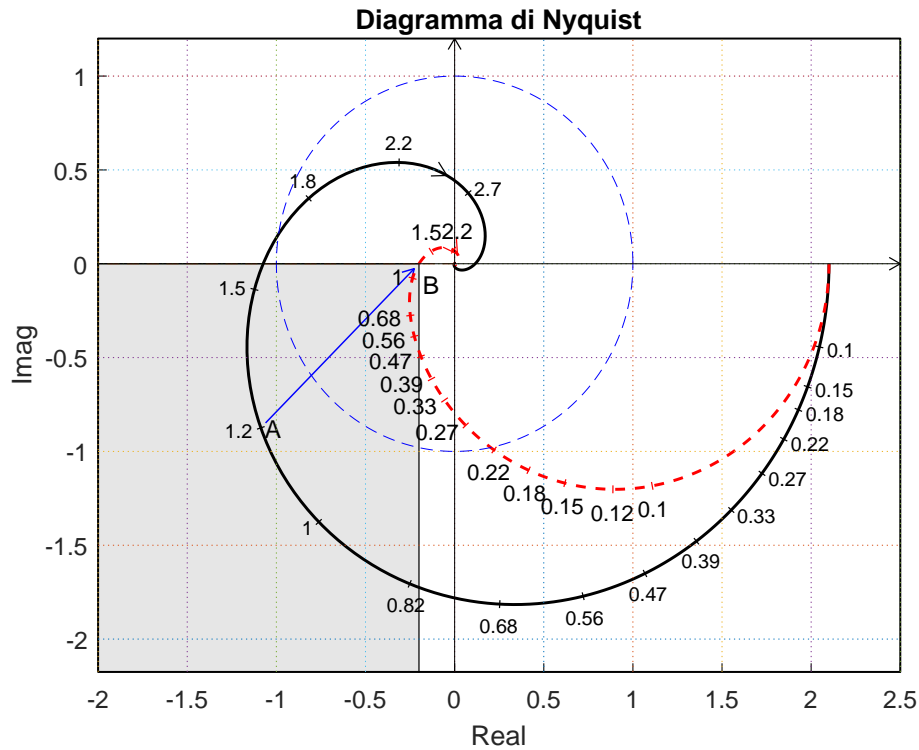


Figura 6: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_a(s)G_a(s)$.

Sintesi della rete correttiva $C_1(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A :

$$\begin{aligned} \omega_A &= [0.82 \quad 1 \quad 1.2 \quad 1.5] \\ M_A &= [1.724 \quad 1.573 \quad 1.395 \quad 1.131] \\ \varphi_A &= [-98.4 \quad -119 \quad -141.2 \quad -173.1] \\ M &= [0.116 \quad 0.1272 \quad 0.1433 \quad 0.1768] \\ \varphi &= [-81.6 \quad -61.02 \quad -38.81 \quad -6.943] \\ \tau_1 &= [0.0371 \quad 0.4085 \quad 0.8454 \quad 4.5] \\ \tau_2 &= [10.45 \quad 8.435 \quad 8.24 \quad 25.72] \end{aligned}$$

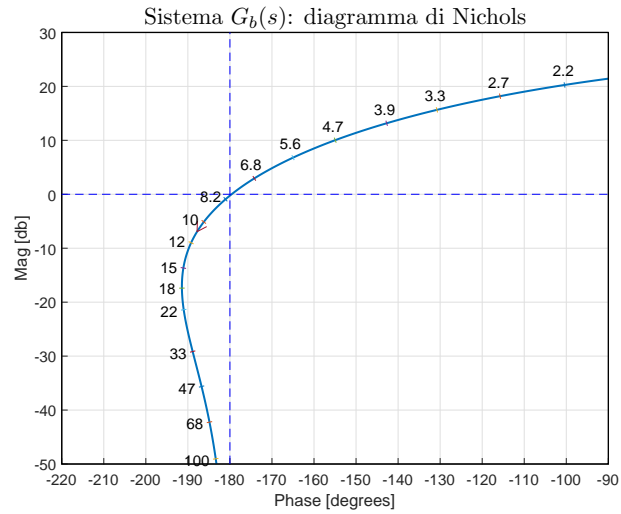
31. (Rete correttrice: Nichols)

Sia data la funzione di risposta armonica del sistema $G_b(s)$ riportata a fianco.

Progettare una rete **anticipatrice**

$$C_b(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

in modo da garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = 50^\circ$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.



Sol. La specifica sul margine di fase $M_\varphi = 50^\circ$ definisce completamente la posizione del punto $B = M_B e^{j\varphi_B}$: $M_B = 1$ e $\varphi_B = 230^\circ$. La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 7.

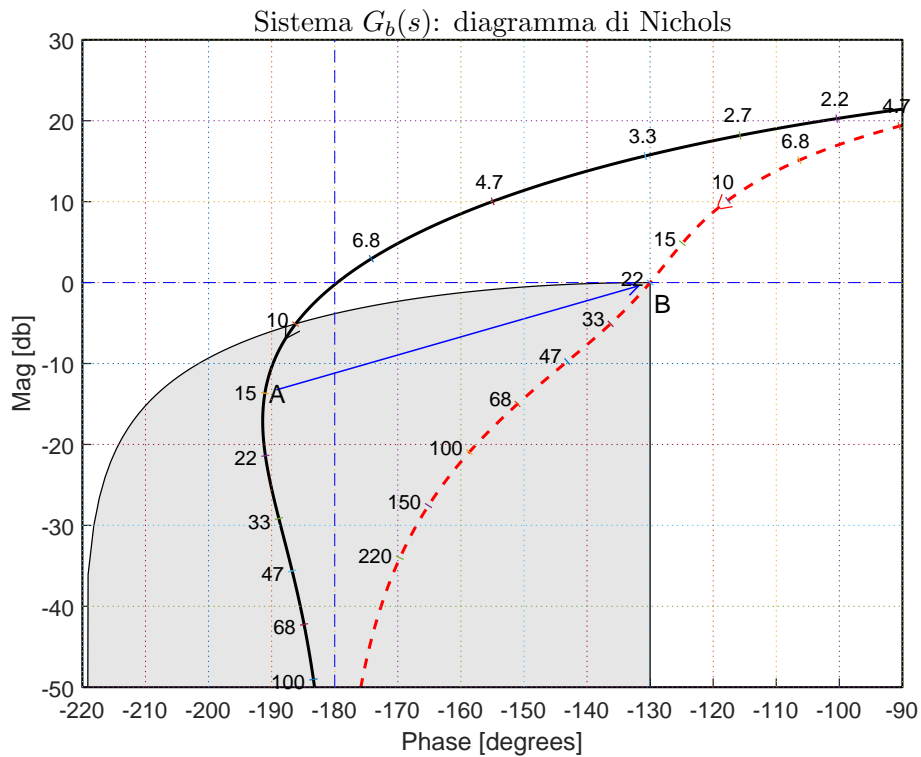


Figura 7: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_b(s)G_b(s)$.

Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 4.7$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.0851, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -191^\circ.$$

Sostituendo i valori di M , φ e ω all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 0.5853$ e $\tau_2 = 0.02078$ della rete correttiva $C_2(s)$:

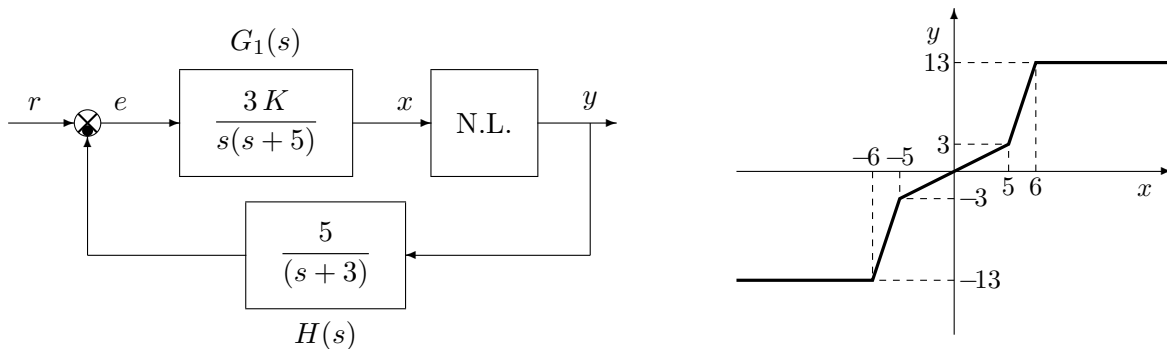
$$M = \frac{M_B}{M_A} = 11.74, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 61^\circ \quad \rightarrow \quad C_2(s) = \frac{(1 + 0.5853 s)}{(1 + 0.02078 s)}.$$

I diagrammi di Nichols delle funzioni $G_b(s)$ e $C_b(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 7.

Sintesi della rete correttiva $C_1(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A :

$\omega_A = [$	15	22	33	47	68	100]
$M_A = [$	0.2074	0.0851	0.0348	0.0165	0.0077	0.0035]
$\varphi_A = [$	-191.1	-191.0	-188.9	-186.7	-184.9	-183.4]
$M = [$	4.821	11.75	28.68	60.49	129.4	282.9]
$\varphi = [$	61.07	60.99	58.86	56.74	54.86	53.38]
$\tau_1 = [$	0.3304	0.5853	0.997	1.525	2.316	3.518]
$\tau_2 = [$	0.0210	0.0207	0.0170	0.0135	0.0102	0.0073]

32. **(Punto di lavoro)** Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:



Posto $K = 1$, determinare per quale valore r^* del riferimento r il punto di lavoro del sistema retroazionato coincide con il punto $(x_0, y_0) = (-5, -3)$.

Sol. Il guadagno statico del sistema $G_1(s)$ è infinito, per cui la retta di carico è orizzontale:

$$y = \frac{r}{K_2 K_3} = \frac{3r}{5} \quad \text{dove} \quad K_2 = 1, \quad K_3 = \frac{5}{3}$$

Il valore r^* si ottiene ponendo $y = -3$ nella retta di carico:

$$-3 = \frac{3r^*}{5} \quad \rightarrow \quad r^* = -5.$$

33. **(Criterio del cerchio)** Vedi (32). Posto $K = 1$, $r = r^*$ ed utilizzando il criterio del cerchio, dire se il sistema retroazionato è stabile nell'intorno del punto di lavoro $(x_0, y_0) = (-5, -3)$.

Sol. Per $r = r^*$ il punto di lavoro coincide con il punto $(x_0, y_0) = (-5, -3)$. Le pendenze delle 2 rette che passano nel punto di lavoro e che racchiudono a settore tutta la non linearità sono:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 10.$$

In questo caso il cerchio critico degenera in un semipiano delimitato dalla retta verticale

$$x = -\frac{1}{\beta} = -\frac{1}{10}$$

Per $K = 1$, il guadagno d'anello del sistema è:

$$G(s) = G_1(s) H(s) = \frac{15}{s(s+5)(s+3)}$$

Il margine di ampiezza K^* e la pulsazione ω^* della funzione $G(s)$ sono i seguenti:

$$K^* = \frac{3 \cdot 5(3+5)}{15} = 8, \quad \omega^* = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15} = 3.873.$$

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ interseca sicuramente il cerchio critico per cui non si può dire nulla sulla stabilità del punto $(x_0, y_0) = (5, 3)$ perchè il criterio del cerchio è un criterio solo sufficiente. In Fig. 8 è mostrato il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ sovrapposto al cerchio critico.

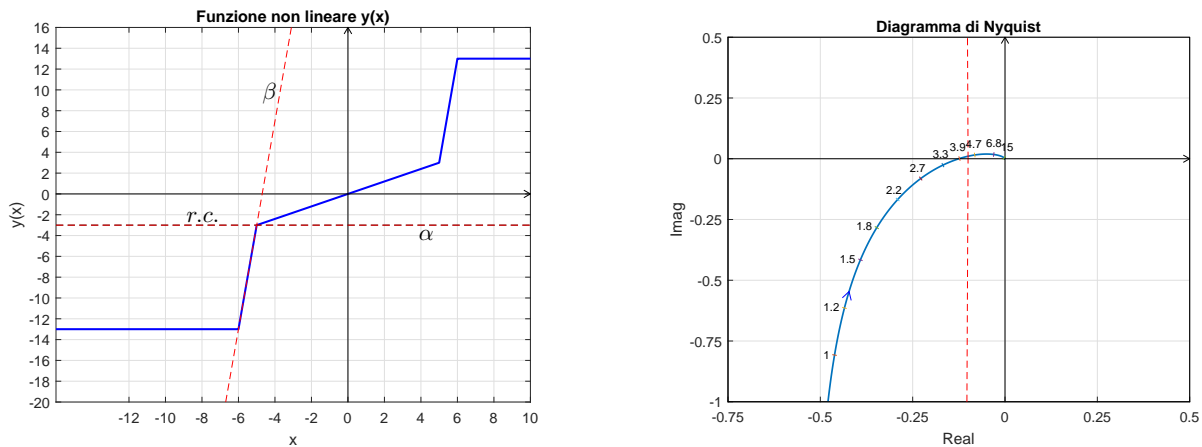


Figura 8: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ e cerchio critico.

34. **(Funzione descrittiva)** Vedi (32).

Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità N.L. assegnata, prendendo l'origine come punto di lavoro. Utilizzare delle variabili (per esempio: m_1, m_2, \dots) per rappresentare gli eventuali valori non noti minimi e massimi della funzione $F(X)$.

Sol. L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ quando è mostrato in Fig. 9. Indichiamo: a) con $m_0 = 0.6$ il valore iniziale della funzione $F(X)$ per $X < 5$; b) con $m_1 \simeq 1.62$ il valore massimo della funzione $F(X)$ per $X \simeq 7.3$; c) con $m_2 = 0$ il valore finale della funzione $F(X)$ per $X \rightarrow \infty$.

35. **(Discussione al variare di K)** Vedi (32). Discutere “qualitativamente” (in funzione anche dei parametri m_1 ed m_2) l'esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno $K > 0$.

Sol. Per $K = 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $G(s)$ è $K^* = 8$. Al variare di K si hanno quindi queste 3 possibili soluzioni:

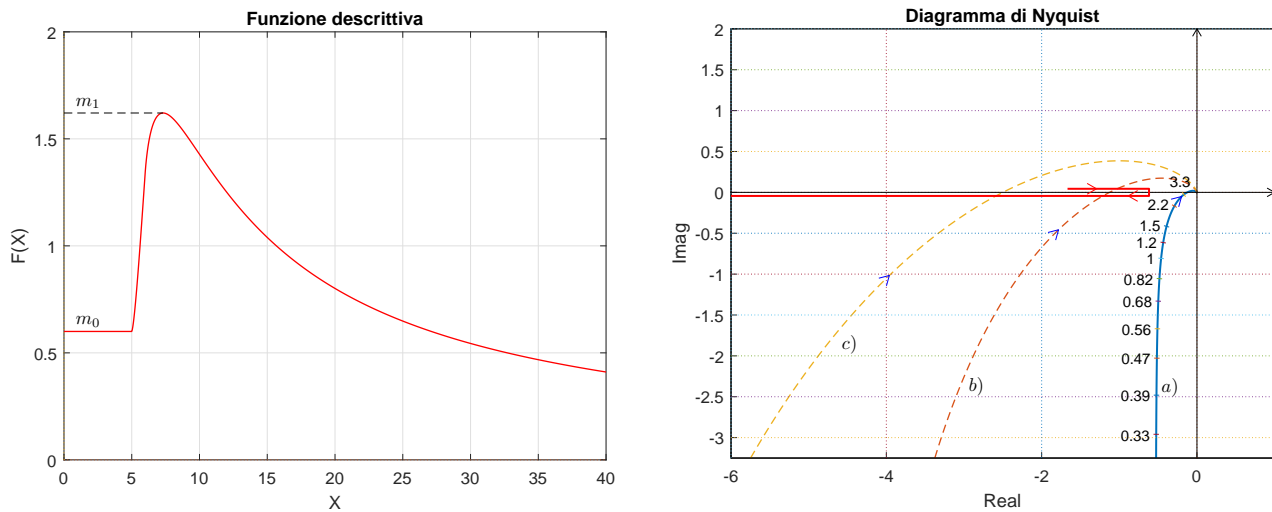


Figura 9: Andamento della funzione descrittiva $F(X)$.

- 1) $-\frac{1}{m_1} < -\frac{K}{K^*}$: la funzione $-1/F(X)$ è tutta esterna al diagramma completo della funzione $G(s)$ per cui non vi sono cicli limite e l'origine è un punto di lavoro globalmente asintoticamente stabile.
- 2) $-\frac{1}{m_0} < -\frac{K}{K^*} < -\frac{1}{m_1}$: il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in 2 punti a cui corrispondono 2 cicli limite, uno stabile (quello uscente) e uno instabile (quello entrante).
- 3) $-\frac{K}{K^*} < -\frac{1}{m_0}$: il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile.

36. **(Discretizzazione)** Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare la seguente rete correttore

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s+2)}{s(s+5)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.2$.

Sol. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(z) = \frac{(s+2)}{s(s+5)} \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{T(1-z^{-1}+2T)}{(1-z^{-1})(1-z^{-1}+5T)}$$

Per $T = 0.2$ si ha:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{0.2(1.4-z^{-1})}{(1-z^{-1})(2-z^{-1})} = \frac{0.28-0.2z^{-1}}{2-3z^{-1}+z^{-2}}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m(k) = \frac{1}{2}[3m(k-1) - m(k-2) + 0.28e(k) - 0.2e(k-1)]$$

cioè:

$$m(k) = 1.5 m(k - 1) - 0.5 m(k - 2) + 0.14 e(k) - 0.1 e(k - 1)]$$