

Domande a risposta multipla

Si risponda alle seguenti domande a risposta multipla. Almeno una delle risposte è vera. Per ciascuna domanda riportare sul foglio delle risposte le lettere di tutte le risposte che si ritengono vere.

1. Il segnale $g(t)$ che si ottiene antitrasformando una funzione razionale fratta $G(s)$ asintoticamente stabile e strettamente propria è sempre:

- A. un segnale continuo
- B. un segnale nullo per $t < 0$**
- C. un segnale che tende a zero per $t \rightarrow \infty$**
- D. un segnale che può tendere all'infinito per un valore finito di t

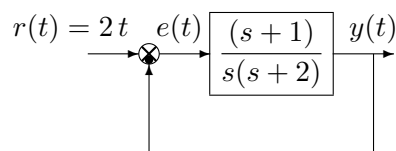
2. L'istante di massima sovraelongazione T_m della risposta al gradino di un sistema lineare del 2° ordine, stabile, privo di zeri e caratterizzato da due poli complessi coniugati $p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega$ è

- A. $T_m = \frac{\pi}{\sigma}$
- B. $T_m = \frac{\pi}{\omega}$**
- C. $T_m = \frac{\pi}{\omega_n \delta}$
- D. $T_m = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}$

3. Sia dato il sistema retroazionato mostrato in figura.

L'errore a regime $e(\infty)$ della variabile $e(t)$ quando $t \rightarrow \infty$ è:

- A. $e(\infty) = 0$
- B. $e(\infty) = 1$**
- C. $e(\infty) = 2$
- D. $e(\infty) = 4$



4. La posizione dei due poli di un sistema del 2° ordine privo di zeri è univocamente determinata se sono note le seguenti informazioni:

- A. il picco di risonanza M_R e il tempo di assestamento T_a**
- B. la massima sovraelongazione $S\%$ e il picco di risonanza M_R
- C. la pulsazione naturale ω_n e la massima sovraelongazione $S\%$**
- D. il tempo di assestamento T_a e il coefficiente di smorzamento δ**

5. Per $\omega = \omega_n$ e $\delta = 1$, il diagramma “reale” di Bode delle ampiezze del sistema $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$

- A. vale 1/2**
- B. vale $1/\sqrt{2}$
- C. vale $\simeq -3$ db.
- D. vale $\simeq -6$ db.**

6. Nella seconda formulazione del criterio di Nyquist, quella valida anche per sistemi “instabili”, si fa l’ipotesi che il sistema, oltre a poter avere un polo semplice o doppio nell’origine,
- A. sia a fase minima
 - B. non abbia poli sull’asse immaginario**
 - C. abbia poli semplici sull’asse immaginario
 - D. non si fanno altre ipotesi
7. In base al principio del modello interno, per neutralizzare (con errore nullo a regime) il segnale in ingresso $X(s) = \frac{1}{s^2+1}$ occorre che nel guadagno d’anello del sistema
- A. sia presente almeno un polo in $s = -1$
 - B. sia presente almeno un polo nell’origine
 - C. siano presenti almeno due poli nell’origine
 - D. siano presenti almeno due poli complessi coniugati in $s_{1,2} = \pm j$**
8. Il criterio del Cerchio per lo studio della stabilità di sistemi non lineari retroazionati è un criterio
- A. solo necessario
 - B. solo sufficiente**
 - C. necessario e sufficiente
 - D. che si applica anche a funzioni non lineari $y(x)$ simmetriche rispetto all’origine**
9. Sul piano z i luoghi dei punti a coefficiente di smorzamento δ costante
- A. sono rette uscenti dall’origine
 - B. sono circonferenze centrate nell’origine
 - C. sono curve che passano per il punto $z = 1$**
 - D. sono tratti di spirali decrescenti verso l’origine**
10. Applicando il metodo di discretizzazione delle “differenze in avanti” ad una funzione continua $D(s)$ asintoticamente stabile si ottiene una funzione discreta $D(z)$
- A. che può essere stabile**
 - B. che può essere instabile**
 - C. che é sicuramente stabile
 - D. che é sicuramente instabile

Domande dirette

Si risponda alle seguenti domande dirette. Per ciascuna domanda riportare sul foglio delle risposte la corrispondente risposta.

11. Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ del seguente segnale temporale $x(t)$:

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[(4t - 3\cos(5t))e^{-2t}] = \boxed{X(s) = \frac{4}{(s+2)^2} - \frac{3(s+2)}{(s+2)^2 + 25}}$$

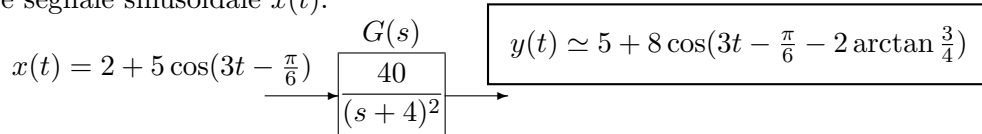
12. Calcolare la trasformata di Laplace inversa $g(t)$ delle seguente funzione di trasferimento $G(s)$:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[2 + \frac{3}{s(s+1)(1+2s)}\right] = \boxed{2\delta(t) + 3 + 3e^{-t} - 6e^{-0.5t}}$$

Infatti si ha:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[2 + \frac{3}{2s(s+1)(s+0.5)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[2 + \frac{3}{s} + \frac{3}{(s+1)} - \frac{6}{(s+0.5)}\right] = 2\delta(t) + 3 + 3e^{-t} - 6e^{-0.5t}$$

13. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ mostrato in figura quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale $x(t)$:



Infatti si ha che:

$$G(0) = 2.5, \quad \text{e} \quad G(j2) = \frac{40}{(j3+4)^2} = \frac{40}{5}e^{-2j \arctan \frac{3}{4}}$$

14. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema del secondo ordine, senza zeri, caratterizzato da un guadagno statico $G(0) = 5$, da un coefficiente di smorzamento $\delta = 0.5$ e da un tempo di assestamento $T_a = 3$ s alla risposta al gradino:

$$\boxed{G(s) = \frac{20}{s^2 + 2s + 4}}$$

15. Scrivere la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(s+3)^2}{s^2(2s-1)}e^{-4s} \quad \rightarrow \quad \boxed{\varphi(\omega) = 2 \arctan \frac{\omega}{3} - \pi - (\pi - \arctan 2\omega) - 4\omega}$$

16. Calcolare l'evoluzione libera y_k del sistema discreto $2y_{k+1} + y_k = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y_0 = 3$:

Applicando la \mathcal{Z} -trasformata si ha:

$$2z(Y(z) - 3) + Y(z) = 0 \quad \rightarrow \quad Y(z) = \frac{3z}{z + 0.5} \quad \rightarrow \quad \boxed{y(t) = 3(-0.5)^k}$$

17. Calcolare la funzione di trasferimento $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ corrispondente alla seguente equazione alle differenze:

$$4y(k) + 2y(k-1) + y(k-2) = 5x(k-1) + 3x(k-2) \quad \rightarrow \quad \boxed{G(z) = \frac{5z + 3}{4z^2 + 2z + 1}}$$

18. Sia $Y(X) \cos(\omega t + \varphi(X))$ la fondamentale del segnale periodico $y(t)$ presente all'uscita della nonlineari  algebraica $y(t) = f[x(t)]$ in risposta all'ingresso $x(t) = X \cos(\omega t)$. La funzione descrittiva $F(X)$   definita nel modo seguente:

$$\boxed{F(X) = \frac{Y(X)}{X} e^{j\varphi(X)}}$$

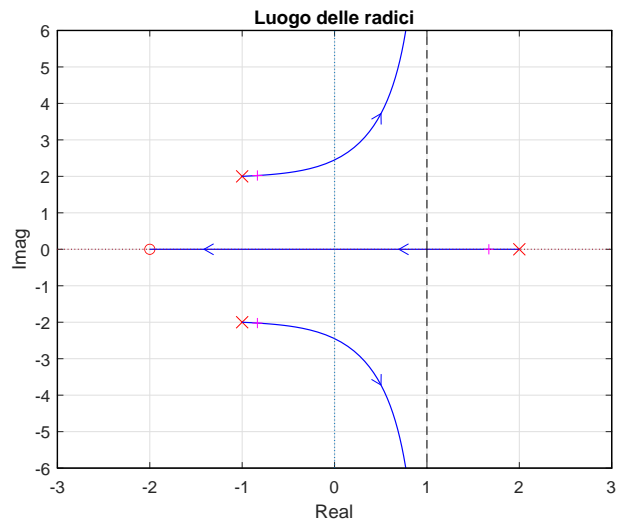
19. A fianco   riportato il luogo delle radici del sistema $G(s) = \frac{(s+2)}{(s-2)[(s+1)^2+4]}$ al variare del parametro $K > 0$. Calcolare:

- a) L'ascissa σ_0 corrispondente alla condizione di allineamento dei tre poli:

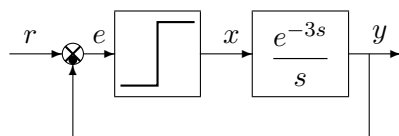
$$\boxed{\sigma_0 = \frac{1}{3}(-2 + 2) = 0}$$

- b) Il valore K^* corrispondente alla condizione di attraversamento dell'asse immaginario:

$$\boxed{K^* = - \left. \frac{1}{G(s)} \right|_{s=0} = 5}$$



20. Sia dato il seguente sistema retroazionato. Per la presenza del rel  ideale il sistema sicuramente oscilla. Fornire il valore della pulsazione ω^* di oscillazione:



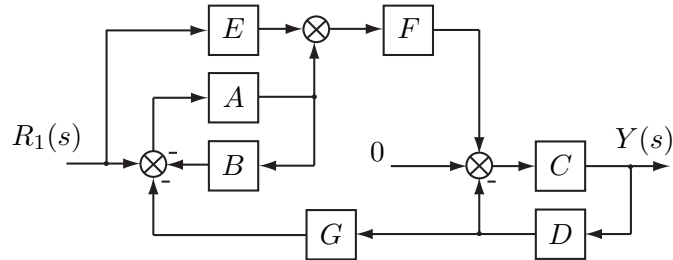
$$\boxed{\omega^* = \frac{\pi}{6} = 0.524}$$

Esercizi

Si svolgano i seguenti esercizi. La risposta di ciascun esercizio deve essere riportata sul foglio delle risposte nella sezione specificatamente riservata al corrispondente esercizio.

21. **(Mason)** Relativamente allo schema a blocchi mostrato in figura, calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s)$:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{R_1(s)} = \frac{AFC + EFC(1 + AB)}{1 + AB + CD + AFCDG + ABCD}$$



22. **(Risposta al gradino)**

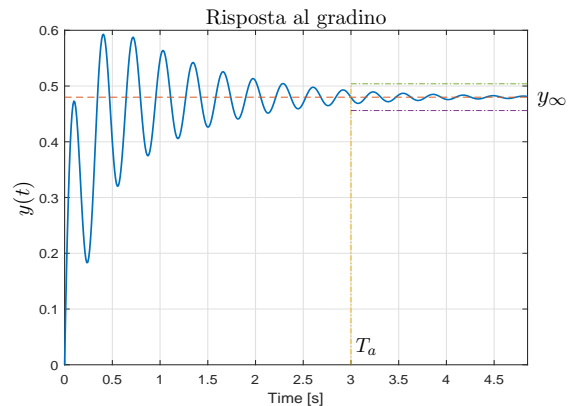
Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{20(3 + 0.1s)(s^2 + 10s + 160)}{(2s + 10)(0.1s + 5)(s^2 + 2s + 400)}$$

Calcolare inoltre:

- il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \rightarrow \infty$;
- il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
- il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$;

$$y_\infty = 0.48, \quad T_a \simeq \frac{3}{1} = 3 \text{ s}, \quad T_\omega \simeq \frac{\pi}{10} \simeq 0.314.$$

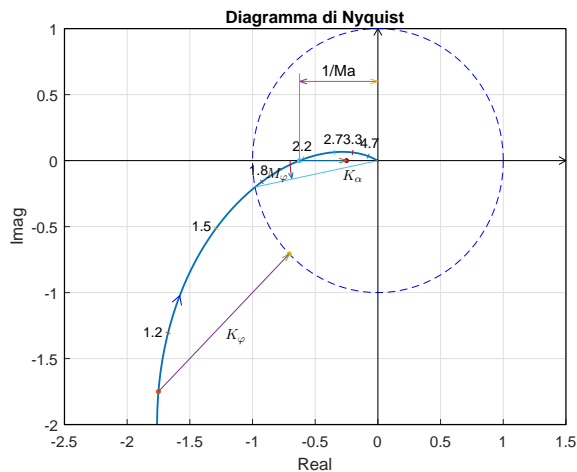


23. **(Margini di stabilità)** Sia data la funzione di risposta armonica, riportata in figura, di un sistema $G(s)$ a fase minima. Nei limiti della precisione consentita dal grafico, calcolare:

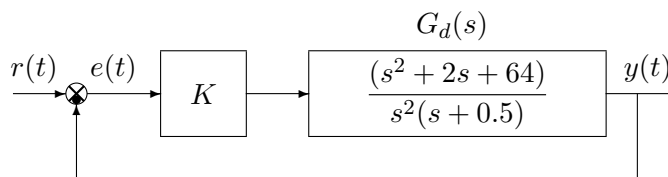
- il margine di ampiezza M_α del sistema;
- il margine di fase M_φ del sistema;
- il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 45$;
- il guadagno K_α per cui la funzione $K_\alpha G(j\omega)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 4$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

- a) $M_a = 1.6$
- b) $M_\varphi = -11.57^\circ$
- c) $K_\varphi = 0.4$
- d) $K_\alpha = 0.4$



24. (Criterio di Routh) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K(s^2 + 2s + 64)}{s^2(s + 0.5)} = 0 \rightarrow s^2(s + 0.5) + K(s^2 + 2s + 64) = 0 \rightarrow s^3 + (0.5 + K)s^2 + 2Ks + 64K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2K \\ 2 & (0.5 + K) & 64K \\ 1 & (0.5 + K)2K - 64K & \\ 0 & 64K & \end{array}$$

Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$0.5 + K > 0, \quad (K - 31.5)2K > 0, \quad K > 0.$$

Si ottengono quindi i seguenti vincoli:

$$K > 0.5, \quad K > 31.5, \quad K > 0.$$

Ne segue che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 31.5 = K^*.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{2K^*} = \sqrt{63} \simeq 7.94$$

25. **(Diagrammi asintotici di Bode)** Vedi (24). Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione.

I diagrammi “asintotici” di Bode della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 1. I diagrammi di Bode

$G_0(s)$

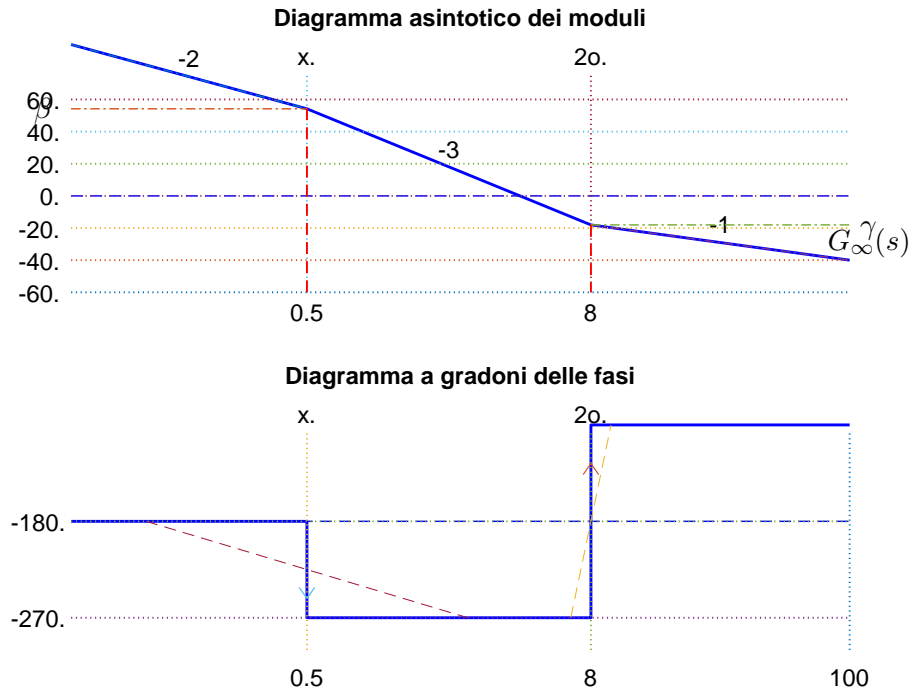


Figura 1: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_d(s)$.

delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2. Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \rightarrow 0$ ed $\omega \rightarrow \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{128}{s^2}, \quad G_\infty(s) = \frac{1}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\pi, \quad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.5$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 8$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.5} = 512 = 54.19 \text{ db}, \quad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=8} = \frac{1}{8} = -18.06 \text{ db}.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri stabili è $\delta = 2/(2\omega_n) = 1/8 = 0.125$.

26. **(Diagramma di Nyquist)** Vedi (24). Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l’asse reale negativo e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* .

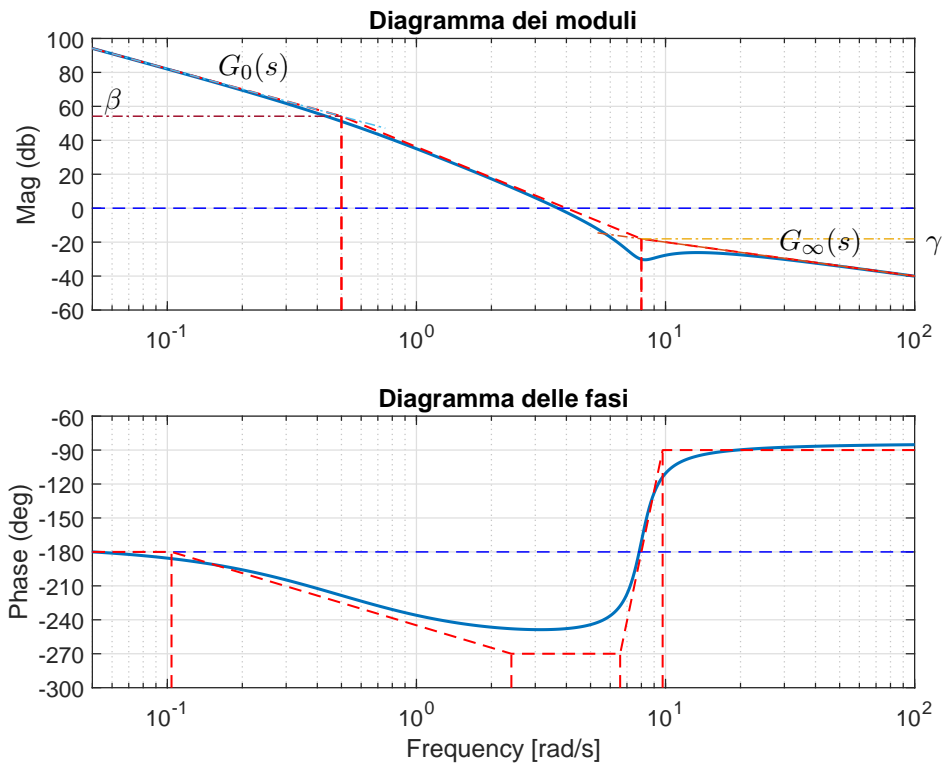


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

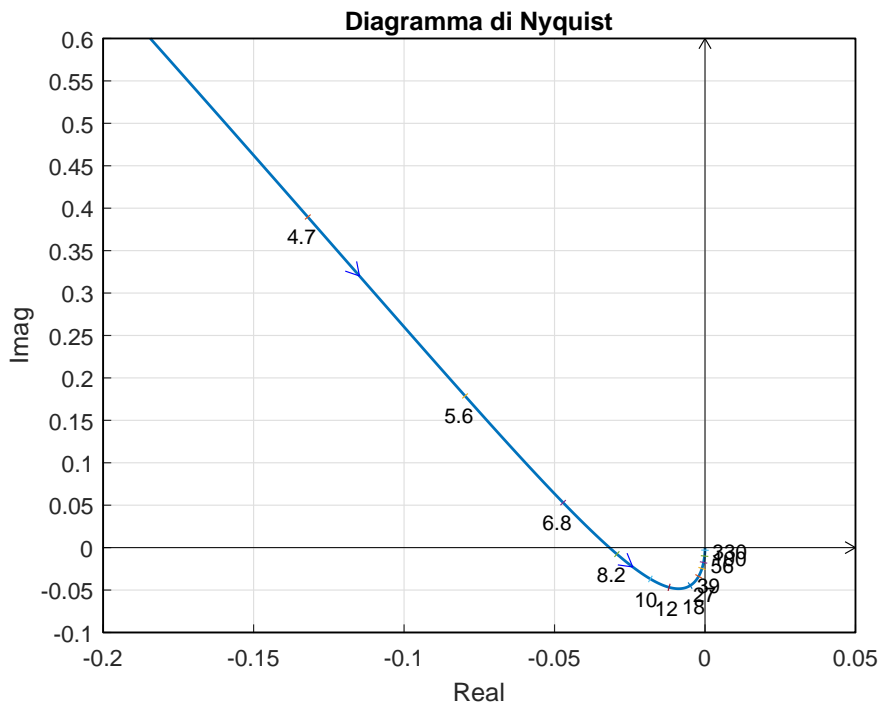


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\pi$. Per $\omega \rightarrow 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto a φ_0 in quanto Δ_τ è negativa:

$$\Delta_\tau = \frac{2}{64} - 2 = -1.9688 < 0.$$

Il sistema è di tipo 2 per cui non esiste nessun asintoto. La variazione di fase che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta_\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \rightarrow \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto a φ_∞ in quanto Δ_p è negativa:

$$\Delta_p = -2 + 0.5 = -1.5 < 0.$$

Esiste una sola intersezione con il semiasse reale negativo. L'intersezione avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{31.5} = -0.0317$$

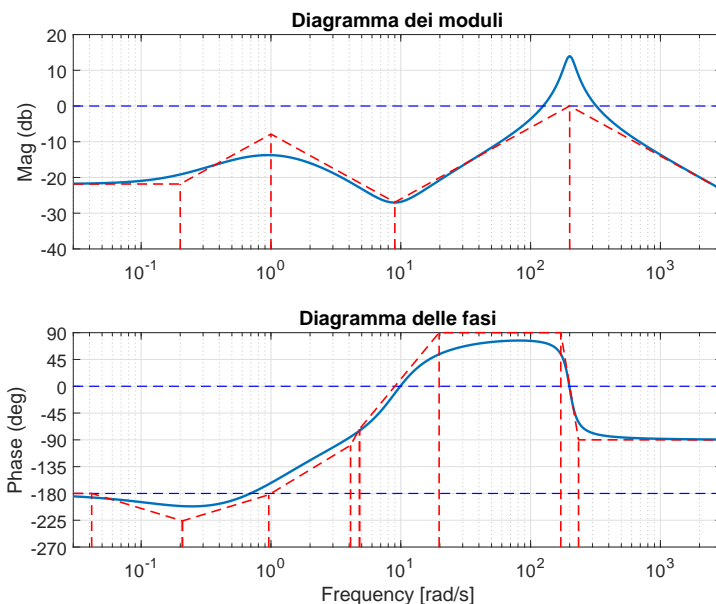
in corrispondente della pulsazione $\omega^* \simeq 7.94$.

27. (Stima di una funzione $G(s)$)

Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$. Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ .

$$G(s) = \frac{200(s - 0.2)(s^2 + 9s + 9^2)}{(s - 1)^2(s^2 + 40s + 200^2)}$$



Soluzione:

La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{200(s - 0.2)(s^2 + 9s + 9^2)}{(s - 1)^2(s^2 + 40s + 200^2)}$$

Il valore $K = 200$ si determina, per esempio, calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 200$:

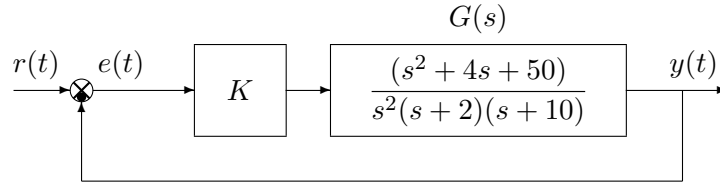
$$|G_\infty(s)|_{s=200j} = \left| \frac{K}{s} \right|_{200j} = \frac{K}{200} = \gamma \simeq 0 \text{ db} \simeq 1 \quad \rightarrow \quad K \simeq 200.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati stabili è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M\omega_n} = \frac{1}{10} = 0.1.$$

La distanza $M\omega_n \simeq 14 \text{ db} = 5$ di legge dal diagramma di Bode dei moduli. Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati stabili è $\delta = 0.5$ perché per $\omega = 10$ il diagramma asintotico di Bode coincide con il diagramma reale.

28. **(Luogo delle radici)** Sia dato il seguente sistema retroazionato:



tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione “solo in modo qualitativo”.

Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato diventa:

$$1 + K \frac{(s^2 + 4s + 50)}{s^2(s + 2)(s + 10)} = 0$$

L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare di $K > 0$ è mostrato in Fig. 4. Sono presenti due asintoti. Il centro degli asintoti σ_a è il seguente:

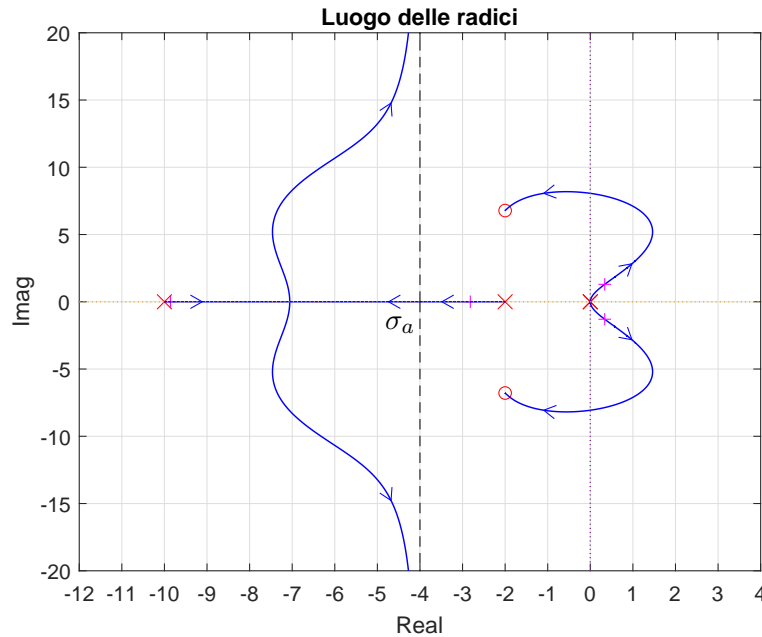


Figura 4: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare di $K > 0$.

$$\sigma_a = \frac{1}{2} (-2 - 10 + 4) = -4$$

29. **(Contorno delle radici)** Sia data la seguente equazione caratteristica di un sistema retroazionato:

$$1 + \frac{5(s+1)(s+\alpha)}{s^2(s-2)} = 0$$

Tracciare qualitativamente il contorno delle radici dell'equazione caratteristica al variare del parametro $\alpha > 0$. Il calcolo di α^* non è necessario. Determinare la posizione dei punti di diramazione “solo in modo qualitativo”.

Sol. L'equazione caratteristica può essere riscritta nel seguente modo $1 + \alpha G_2(s) = 0$:

$$s^2(s-2) + 5(s+1)(s+\alpha) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{\alpha 5(s+1)}{s(s^2+3s+5)} = 0$$

La funzione $G_2(s)$ può essere fattorizzata nel modo seguente:

$$1 + \frac{\alpha 5(s+1)}{s[(s+1.5)^2 + 1.66^2]} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\alpha > 0$ è mostrato in Fig. 5. Il contorno delle radici ha

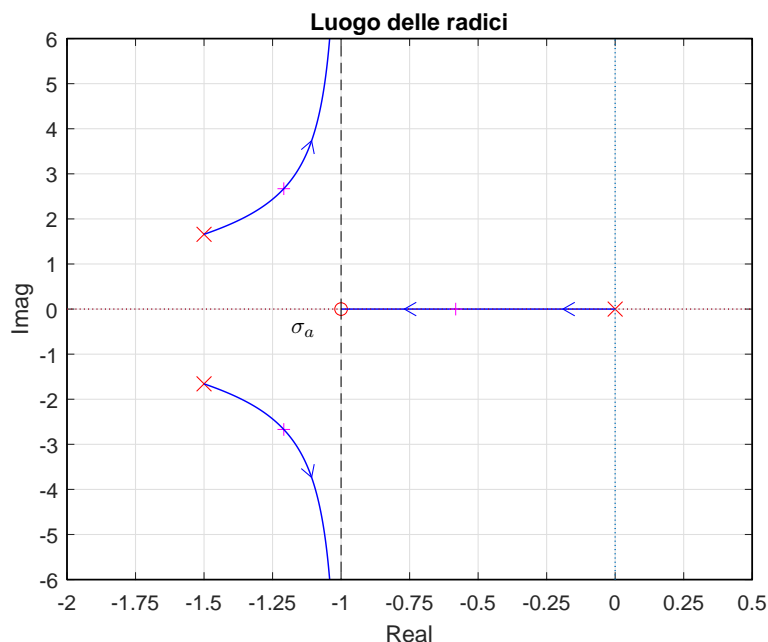


Figura 5: Contorno delle radici del sistema $G_2(s)$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

due asintoti verticali. Il centro degli asintoti σ_a è il seguente:

$$\sigma_a = \frac{1}{2} (-3 + 1) = -1.$$

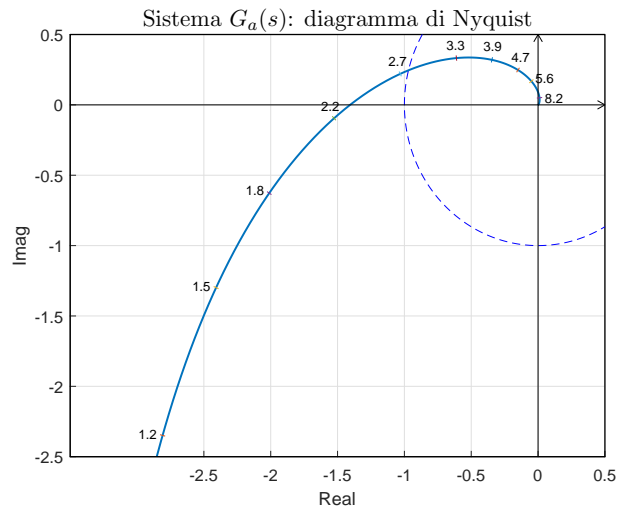
30. **(Rete correttrice: Nyquist)**

Sia data la funzione di risposta armonica del sistema $G_a(s)$ riportata a fianco.

Progettare una rete correttrice

$$C_a(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

in modo da garantire che la funzione di risposta armonica del sistema compensato $C_a(s)G_a(s)$ abbia un margine di ampiezza $M_a = 10$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.



Sol. La specifica sul margine di ampiezza $M_a = 10$ definisce completamente la posizione del punto $B = M_B e^{j\varphi_B}$: $M_B = 0.1$ e $\varphi_B = 180^\circ$. In questo caso è possibile utilizzare una rete ritardatrice. La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 6.

Il punto $A = G_b(j\omega_A)$ scelto per la sintesi della rete correttrice è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 1.8$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 2.1, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 197.3^\circ.$$

Sostituendo i valori di M , φ e $\omega = \omega_A$ all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 1.693$ e $\tau_2 = 37.54$ della rete correttrice $C(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.0474, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -17.3^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 1.693 s)}{(1 + 37.54 s)}.$$

Il diagramma di Nyquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_a(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 6.

Sintesi della rete correttrice $C_1(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A :

$$\begin{aligned} \omega_A &= [2.2 \quad 1.8 \quad 1.5 \quad 1.2] \\ M_A &= [1.529 \quad 2.107 \quad 2.736 \quad 3.661] \\ \varphi_A &= [-176.4 \quad -162.7 \quad -151.7 \quad -140.1] \\ M &= [0.0654 \quad 0.0474 \quad 0.0365 \quad 0.0273] \\ \varphi &= [-3.568 \quad -17.32 \quad -28.33 \quad -39.9] \\ \tau_1 &= [6.813 \quad 1.693 \quad 1.185 \quad 0.9611] \\ \tau_2 &= [104.4 \quad 37.54 \quad 37.2 \quad 46.57] \end{aligned}$$

31. (Rete correttrice: Nichols)

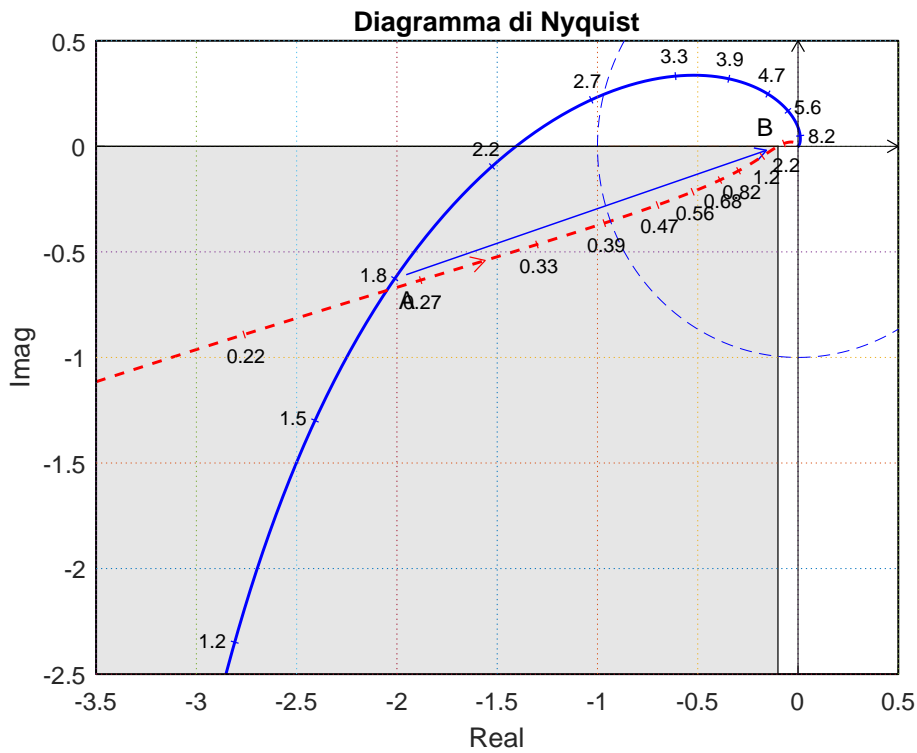


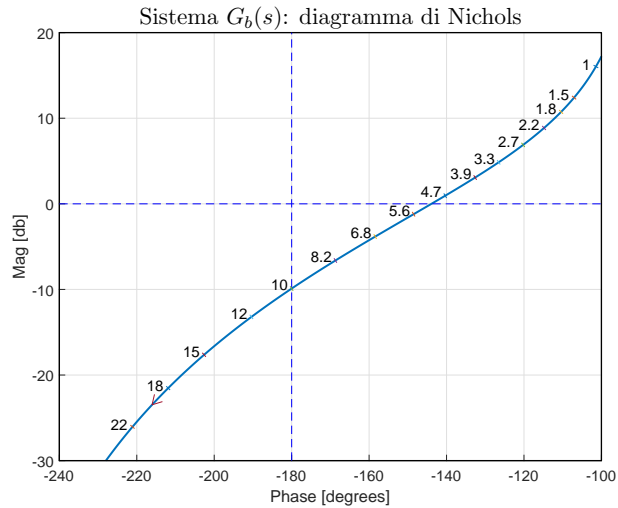
Figura 6: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_a(s)G_a(s)$.

Sia data la funzione di risposta armonica del sistema $G_b(s)$ riportata a fianco.

Progettare una rete **anticipatrice**

$$C_b(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

in modo da garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = 60^\circ$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.



Sol. La specifica sul margine di fase $M_\varphi = 60^\circ$ definisce completamente la posizione del punto $B = M_B e^{j\varphi_B}$: $M_B = 1$ e $\varphi_B = 240^\circ$. La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 7.

Il punto $A = G_b(j\omega_A)$ scelto per la sintesi della rete correttiva è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 8.2$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.466, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 191.3^\circ.$$

Sostituendo i valori di M , φ e $\omega = \omega_A$ all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei

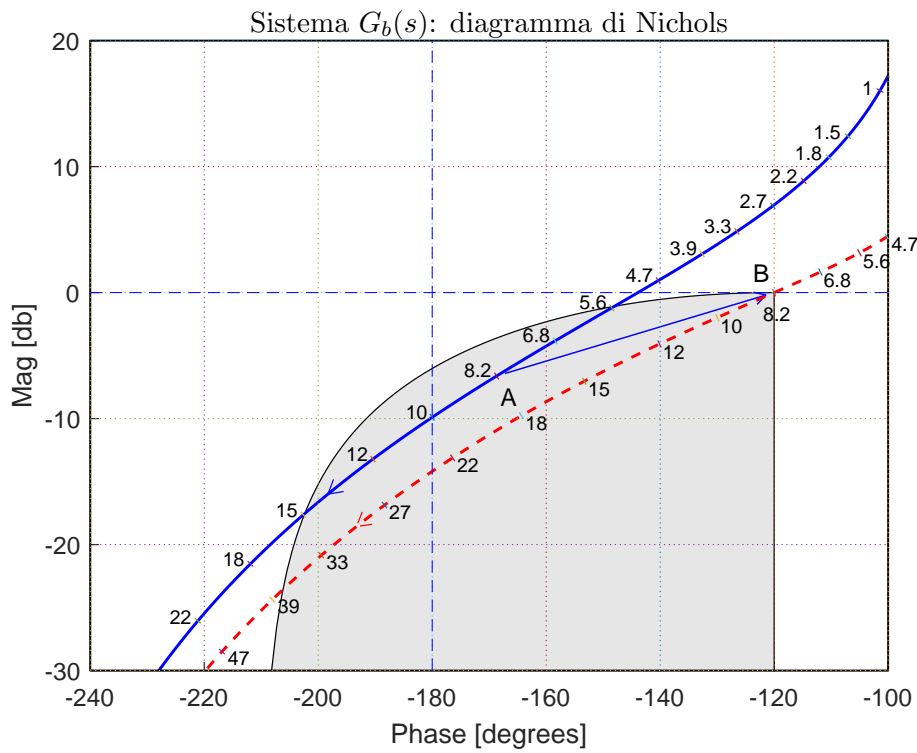


Figura 7: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_b(s)G_b(s)$.

parametri $\tau_1 = 0.2407$ e $\tau_2 = 0.0313$ della rete correttiva $C(s)$:

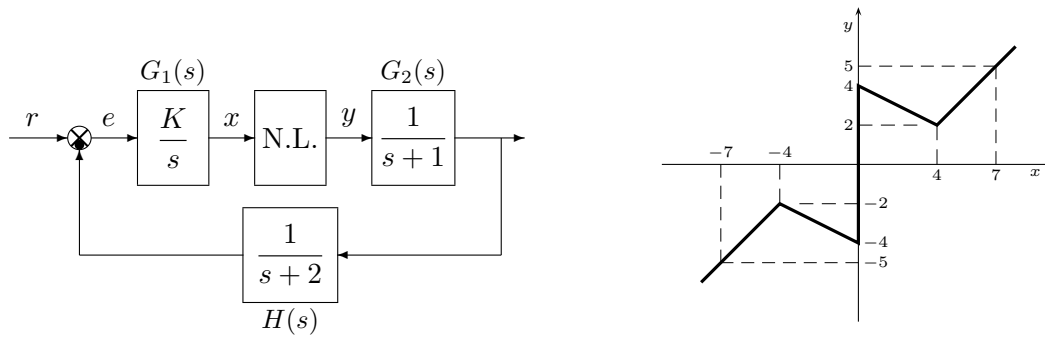
$$M = \frac{M_B}{M_A} = 2.14, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 48.7^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 0.2407 s)}{(1 + 0.0313 s)}.$$

I diagrammi di Nichols delle funzioni $G_b(s)$ e $C_b(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 7.

Sintesi della rete correttiva $C_1(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A :

$$\begin{aligned} \omega_A &= [\quad 5.6 \quad 6.8 \quad 8.2 \quad 10 \quad 12] \\ M_A &= [\quad 0.87 \quad 0.6436 \quad 0.4667 \quad 0.32 \quad 0.2186] \\ \varphi_A &= [-148.5 \quad -158.4 \quad -168.7 \quad 180 \quad 169.6] \\ M &= [\quad 1.149 \quad 1.554 \quad 2.143 \quad 3.125 \quad 4.575] \\ \varphi &= [\quad 28.5 \quad 38.43 \quad 48.7 \quad 60 \quad 70.39] \\ \tau_1 &= [\quad 0.1013 \quad 0.1823 \quad 0.2407 \quad 0.3031 \quad 0.375] \\ \tau_2 &= [\quad 0.0033 \quad 0.0330 \quad 0.0313 \quad 0.0207 \quad 0.0103] \end{aligned}$$

32. **(Punto di lavoro)** Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:



Posto $K = 1$, determinare per quale valore r_1 del riferimento r il punto di lavoro del sistema retroazionato coincide con il punto $(x_1, y_1) = (7, 5)$.

Soluzione. La retta di carico del sistema é:

$$y = \frac{r}{K_2 K_3} \quad \text{dove} \quad K_1 = \infty, \quad K_2 = 1, \quad K_3 = \frac{1}{2}.$$

Il valore r_1 si ottiene ponendo $x = 6$ e $y = 5$ nella retta di carico:

$$r_1 = y K_2 K_3 \quad \rightarrow \quad r_1 = 5 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

33. **(Criterio del cerchio)** Vedi (32). Posto $K = 1$, $r = r_1$ ed utilizzando il criterio del cerchio, dire se il sistema retroazionato è stabile nell'intorno del punto di lavoro $(x_0, y_0) = (7, 5)$.

Soluzione. Per $r = r_1$ il punto di lavoro coincide con il punto $(x_0, y_0) = (7, 5)$. Le pendenze delle 2 rette che passano nel punto di lavoro e che racchiudono a settore tutta la non linearità sono:

$$\alpha = \frac{1}{7} = 0.143, \quad \beta = \frac{9}{7} = 1.286.$$

Per $K = 1$, il guadagno d'anello del sistema è:

$$G(s) = G_1(s) H(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$0 < K < K^* = \frac{1 \cdot 2 \cdot (1+2)}{1} = 6$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{2} = 1.414.$$

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ non interseca il cerchio critico e quindi, in base al criterio del cerchio, si può affermare che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile nell'intorno del punto di lavoro $(x_0, y_0) = (7, 5)$. In Fig. 8 è mostrato il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ sovrapposto al cerchio critico.

34. **(Funzione descrittiva)** Vedi (32). Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità N.L. assegnata, prendendo l'origine come punto di lavoro. Utilizzare delle variabili (per esempio: m_1, m_2, \dots) per rappresentare gli eventuali valori non noti minimi e massimi della funzione $F(X)$.

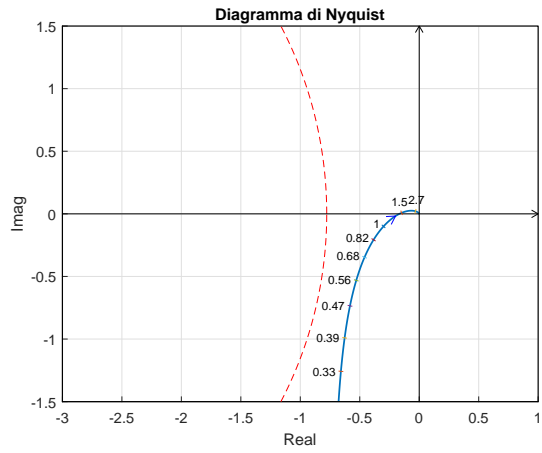
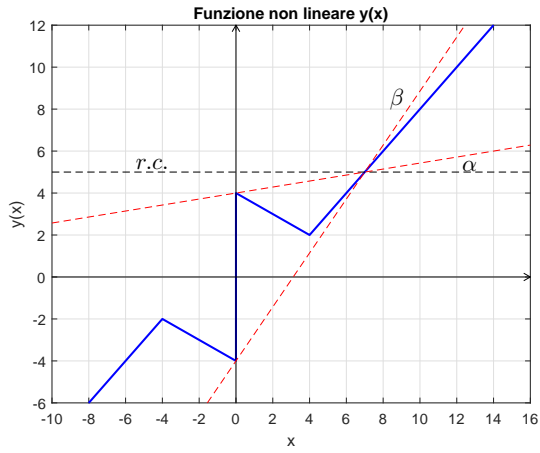


Figura 8: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ e cerchio critico.

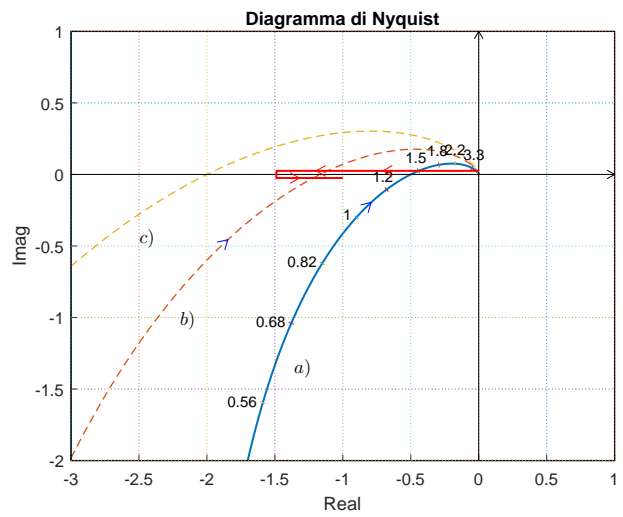
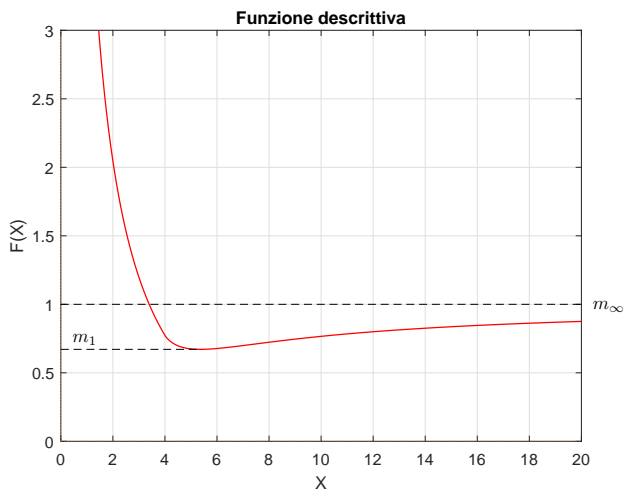


Figura 9: Andamento della funzione descrittiva $F(X)$.

Soluzione. L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ è mostrato in Fig. 9. Indichiamo: a) con $m_0 = \infty$ il valore iniziale della funzione $F(X)$ per $X = 0^+$; b) con $m_1 \simeq 0.67$ il valore minimo della funzione $F(X)$ per $X \simeq 5.36$; c) con $m_\infty = 1$ il valore finale della funzione $F(X)$ per $X \rightarrow \infty$.

Il valore minimo m_1 esiste perché per $X < 4$ la funzione descrittiva della non linearità è:

$$F(X) = \frac{16}{\pi X} - 1 \quad \rightarrow \quad F(4) = \frac{4}{\pi} - 0.5 = 0.7732 < m_\infty = 1$$

35. **(Discussione al variare di K)** Vedi (32). Discutere “qualitativamente” (anche in funzione dei parametri m_1, m_2, \dots) l'esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno $K > 0$.

Soluzione. Sol. Per $K = 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $G(s)$ è $K^* = 6$. Per $K \neq 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $K G_1(s)$ è:

$$K^* = \frac{\bar{K}^*}{K} = \frac{6}{K}$$

Al variare di K si hanno quindi queste 3 possibili soluzioni:

- a) $K^* > m_\infty$: il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in un punto a cui corrispondono 1 ciclo limite stabile.
- b) $m_1 < K^* < m_\infty$: il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in 2 punti a cui corrispondono 2 cicli limite, uno stabile (quello uscente) e uno instabile (quello entrante).
- c) $K^* < m_1$: la funzione $-1/F(X)$ è tutta interna al diagramma completo della funzione $G(s)$ per cui non vi sono cicli limite e l'origine è un punto instabile per il sistema retroazionato.

36. **(Discretizzazione)** Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare, discretizzare la seguente rete correttiva

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s+3)}{(s+1)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.2$.

Sol. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(z) = \left. \frac{(s+3)}{(s+1)} \right|_{s=\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}} = \frac{2(1-z^{-1}) + 3T(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1}) + T(1+z^{-1})} = \frac{3T+2+(3T-2)z^{-1}}{T+2+(T-2)z^{-1}}$$

Per $T = 0.2$ si ha:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{2.6 - 1.4 z^{-1}}{2.2 - 1.8 z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m(k) = \frac{1}{2.2} [1.8 m(k-1) + 2.6 e(k) - 1.4 e(k-1)]$$

cioè:

$$m(k) = 0.818 m(k-1) + 1.182 e(k) - 0.636 e(k-1)]$$