Cognome: Nome: N. Matr.: ☐☐☐☐☐☐ 

Firma:

# Esame scritto di Controlli Automatici

## Foglio delle risposte. Data del compito: 14 Settembre 2021

**Domande a risposta multipla.** Per ciascun domanda riportare nella seguente tabella le lettere di tutte le risposte che si ritengono vere.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) B C | 2) B D | 3) D | 4) A C D | 5) A D |
| 6) B | 7) D | 8) B D | 9) C D | 10) A B |

**Domande dirette.** Per ciascuna domanda riportare nella seguente tabella la corrispondente risposta.

| | |
|---|---|
| 11) $X(s) = \dfrac{4}{(s+2)^2} - \dfrac{3(s+2)}{(s+2)^2+25}$ | 12) $g(t) = 2\,\delta(t) + 3 + 3\,e^{-t} - 6\,e^{-0.5\,t}$ |
| 13) $y(t) \simeq 5 + 8\cos(3t - \frac{\pi}{6} - 2\arctan\frac{3}{4})$ | 14) $G(s) = \dfrac{20}{s^2+2\,s+4}$ |
| 15) $\varphi(\omega) = 2\arctan\dfrac{\omega}{3} - \pi - (\pi - \arctan 2\omega) - 4\,\omega$ | 16) $y(t) = 3\,(-0.5)^k$ |
| 17) $G(z) = \dfrac{5\,z+3}{4\,z^2+2\,z+1}$ | 18) $F(X) = \dfrac{Y(X)}{X}\;e^{j\varphi(X)}$ |
| 19) $\sigma_0 = 0,\qquad K^* = -\left.\dfrac{1}{G(s)}\right\vert_{s=0} = 5$ | 20) $\omega^* = \dfrac{\pi}{6} = 0.524$ |

**Esercizi.** Per ciascun esercizio riportare negli spazi indicati i risultati finali e principali passaggi necessari per ottenerli. Si raccomanda di scrivere in maniera chiara.

**21. Mason**

$$G_1(s) = \frac{AFC + EFC(1+AB)}{1 + AB + CD + AFCDG + ABCD}$$

**22. Risposta al gradino**

a) Il valore a regime:

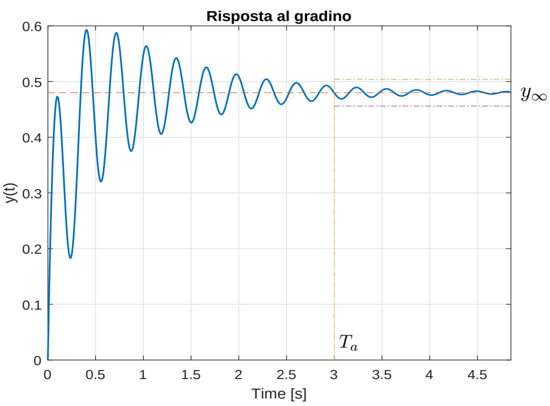
$$y_\infty = 0.48,$$

b) Il tempo di assestamento:

$$T_a \simeq \frac{3}{0.05} = 3\,\mathrm{s},$$

c) Il periodo dell'eventuale oscillazione:

$$T_\omega \simeq \frac{\pi}{10} \simeq 0.314.$$



**23. Margini**

$a)\ M_\alpha == 1.6 \quad b)\ M_\varphi = -11.57^\circ \quad c)\ K_\varphi == 0.4 \quad d)\ K_\alpha == 0.4$

**24. Criterio di Routh**

Equazione caratteristica del sistema retroazionato:

$$1 + \frac{K(s^2 + 2s + 64)}{s^2(s + 0.5)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + (0.5 + K)s^2 + 2Ks + 64K = 0$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2K \\ 2 & (0.5 + K) & 64K \\ 1 & (0.5 + K)2K - 64K & \\ 0 & 64K & \end{array}$$

Calcoli: Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$0.5 + K > 0, \qquad (K - 31.5)2K > 0, \qquad K > 0.$$

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 31.5 = K^*.$$

La pulsazione $\omega^*$ corrispondente al valore limite $K^*$ è:

$$\omega^* = \sqrt{2K^*} = \sqrt{63} \simeq 7.94$$

**25. Diagrammi asintotici di Bode**

La funzione approssimante $G_0(s)$, la fase $\varphi_0$ e il modulo $M_0$:

$$G_0(s) = \frac{128}{s^2}, \qquad \varphi_0 = -\pi, \qquad M_0 = \infty$$

La funzione approssimante $G_\infty(s)$, fase $\varphi_\infty$ e modulo $M_\infty$:

$$G_\infty(s) = \frac{1}{s}. \qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}, \qquad M_\infty = 0$$

Guadagno $\beta$ in corrispondenza della pulsazione $\omega_0$ dove si ha il primo cambio di pendenza:

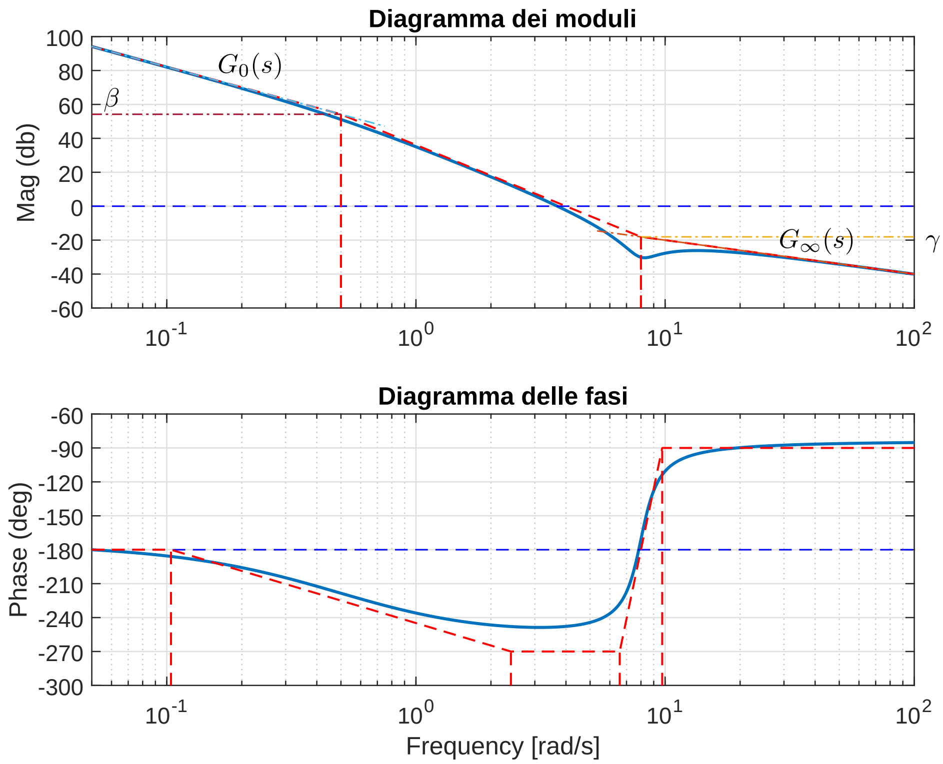
$$\omega_0 = 0.5, \qquad \beta == |G_0(s)|_{s=0.5} = 512 = 54.19 \text{ db},$$

Guadagno $\gamma$ in corrispondenza della pulsazione $\omega_\infty$ dove si ha l'ultimo cambio di pendenza:

$$\omega_\infty = 8, \qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=8} = \frac{1}{8} = -18.06 \text{ db}.$$

**25. Diagrammi asintotici di Bode (scale logaritmiche)**

Dopo aver indicato i valori degli assi, riportare i diagrammi asintotici di Bode delle fase e delle ampiezze.



## 26. Diagramma di Nyquist

Fase iniziale $\varphi_0$, modulo iniziale $M_0$ e parametro $\Delta_\tau$:

$$\varphi_0 = -\pi, \qquad M_0 = \infty, \qquad \Delta\tau = \frac{2}{64} - 2 = -1.9688 < 0$$

Fase finale $\varphi_\infty$, modulo finale $M_\infty$ e parametro $\Delta_p$:

$$\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2} \qquad M_\infty = 0 \qquad \Delta_p = -2 + 0.5 = -1.5 < 0$$

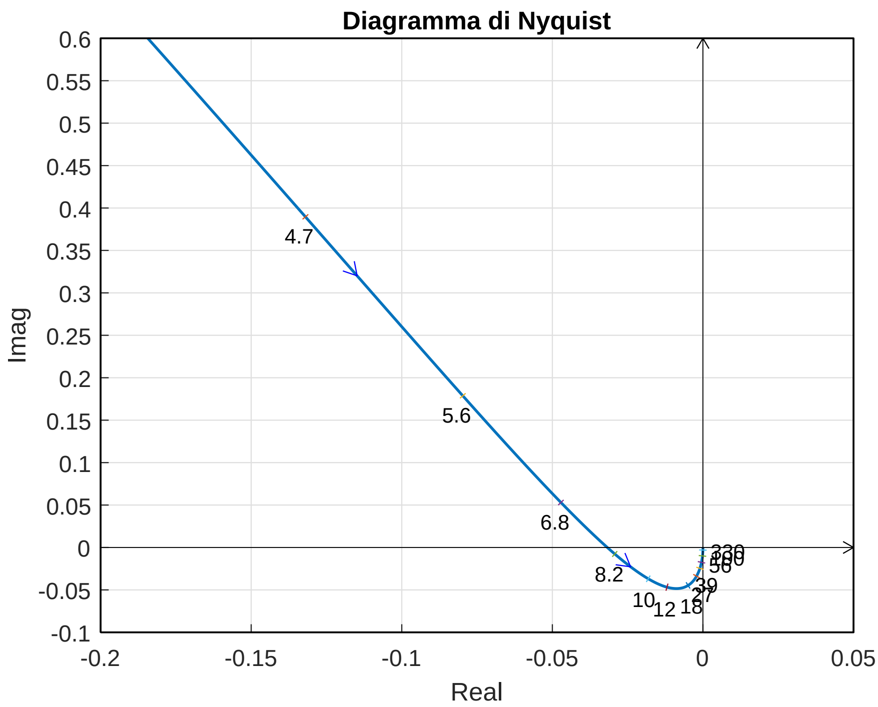
Indicare se nel diagramma di Nyquist é presente un asintoto verticale: Si ☐, No ☒.

Se si, fornire la posizione dell'asintoto verticale: $\sigma_a = \nexists$

Variazione di fase $\Delta\varphi$ per $\omega \in ]0,\ \infty[$: $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$

Eventuale intersezione con il semiasse reale: $\sigma_1^* == -\frac{1}{K^*} = -0.0317$

Tracciamento qualitativo del diagramma di Nyquist completo:




## 27. Stima di una funzione $G(s)$

Funzione di trasferimento del sistema:

$$G(s) = \frac{200(s-0.2)(s^2+9s+9^2)}{(s-1)^2(s^2+40s+200^2)}.$$

Il valore $K = 200$ si determina, per esempio, calcolando il modulo $\gamma$ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 200$:

$$|G_\infty(s)|_{s=200\,j} = \left|\frac{K}{s}\right|_{200\,j} = \frac{K}{200} = \gamma \simeq 0 \text{ db} \simeq 1 \qquad \to \qquad K \simeq 200.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati stabili è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} = \frac{1}{10} = 0.1.$$

La distanza $M_{\omega_n} \simeq 14$ db $= 5$ di legge dal diagramma di Bode dei moduli.

## 28. Luogo delle Radici

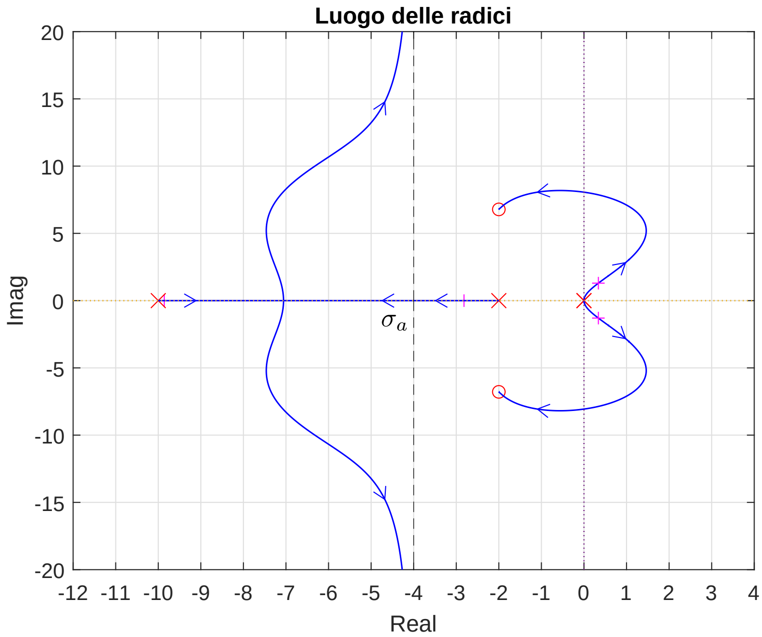
Equazione caratteristica del sistema retroazionato:

$$1 + K\frac{(s^2 + 4s + 50)}{s^2(s+2)(s+10)} = 0$$

Numeri $r$ degli asintoti e posizione $\sigma_a$ del centro degli asintoti (solo se $r \geq 2$):

$$r = 2 \qquad\qquad \sigma_a = \frac{1}{2}(-2 - 10 + 4) = -4$$

Tracciamento qualitativo del luogo delle radici per $K > 0$:




## 29. Contorno delle Radici

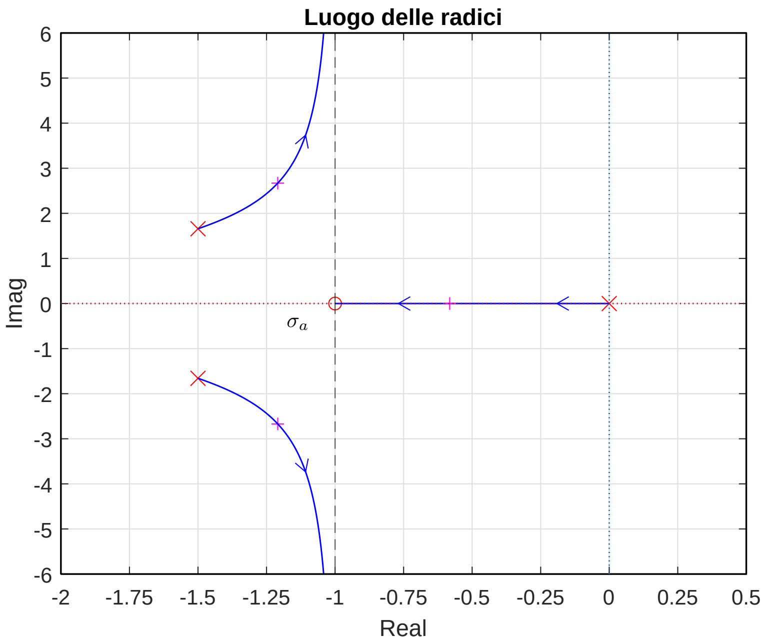
Equazione caratteristica del sistema dinamico assegnato posto nella forma $1 + \alpha\, G_2(s)$:

$$1 + \frac{5(s+1)(s+\alpha)}{s^2(s-2)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^2(s-2) + 5(s+1)(s+\alpha) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{\alpha\, 5(s+1)}{s(s^2+3s+5)} = 0$$

Funzione $G_2(s)$ fattorizzata, grado relativo $r$ e posizione $\sigma_a$ del centro degli asintoti (se $|r| > 1$):

$$G_2(s) = \frac{5(s+1)}{s[(s+1.5)^2 + 1.66^2]} \qquad r = 2 \qquad \sigma_a = \sigma_a = \frac{1}{2}(-3+1) = -1.$$

Tracciamento qualitativo del contorno delle radici della funzione $G_2(s)$ per $\alpha > 0$:



## 30. Rete correttrice: Nyquist

Modulo e fase del punto $B$:

$$M_B = 0.1 \qquad \varphi_B = 180^o$$

Pulsazione $\omega_A$ del punto $A$:

$$\omega_A = 1.8$$

Modulo e fase del punto $A$:

$$M_A = 2.1, \qquad \varphi_A = 197.3^o.$$

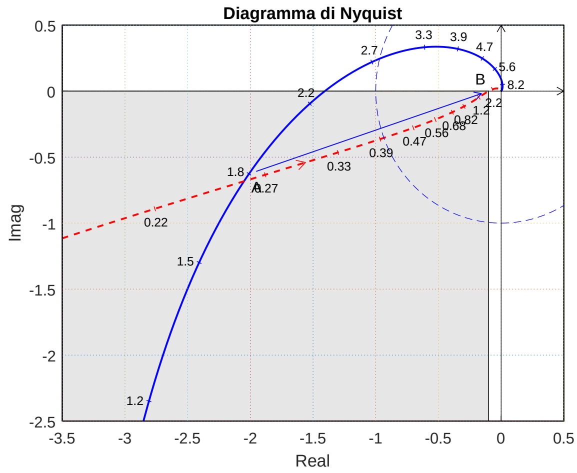
Parametri $M$ e $\varphi$:

$$M = 0.0474, \qquad \varphi = -17.3°$$

Parametri $\tau_1$ e $\tau_2$:

$$\tau_1 = 1.693 \qquad \tau_2 = 37.54$$

Disegnare su questo piano di Nyquist la posizione del punto $B$ e la zona di ammissibilitá:




Rete correttrice:

$$C(s) = \frac{1 + \tau_1\, s}{1 + \tau_2\, s} = \frac{1 + 1.693\, s}{1 + 37.54\, s}$$

## 31. Rete correttrice: Nichols

Modulo e fase del punto $B$:

$$M_B = 1 \qquad \varphi_B = 240°$$

Pulsazione $\omega_A$ del punto $A$:

$$\omega_A = 8.2$$

Modulo e fase del punto $A$:

$$M_A = 0.466, \qquad \varphi_A = 191.3°.$$

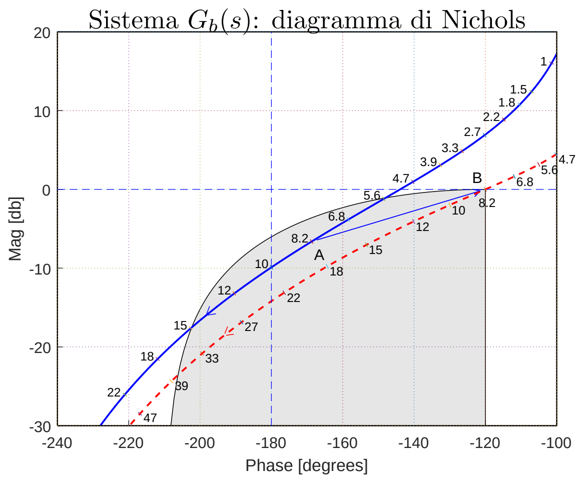
Parametri $M$ e $\varphi$:

$$M = 2.14, \qquad \varphi = 48.7°$$

Parametri $\tau_1$ e $\tau_2$:

$$\tau_1 = 0.2407 \qquad \tau_2 = 0.0313$$

Disegnare sul questo piano di Nichols la posizione del punto $B$ e la zona di ammissibilitá:




Rete correttrice:

$$C(s) = \frac{1 + \tau_1\, s}{1 + \tau_2\, s} = \frac{(1 + 0.2407\, s)}{(1 + 0.0313\, s)}$$

## 32. Punti di lavoro

Guadagni statici: $K_1 = \infty$ $K_2 = 1$ $K_3 = \frac{1}{2}$

Retta di carico:

$$r_1 = y\, K_2\, K_3$$

Valori $r_1$ ed $r_2$ del segnale di ingresso $r$ corrispondenti ai punti di lavoro $(x_1,\ y_1)$ e $(x_2,\ y_2)$:

$$r_1 = 5 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

## 33. Criterio del cerchio

Pendenze delle rette del settore:

$$\alpha = \frac{1}{7}, \qquad \beta = \frac{9}{7}.$$

Funzione d'anello $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

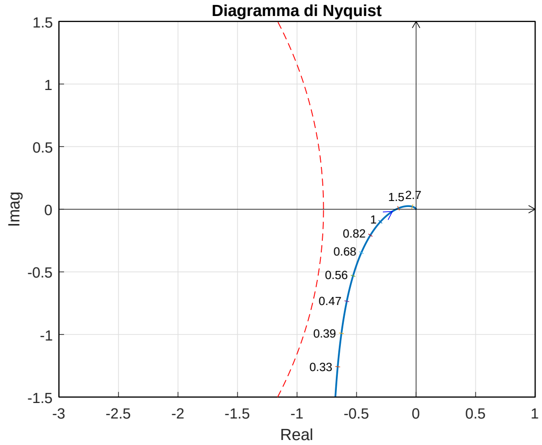
Parametri della funzione $G(s)$:

$$K^* = 6, \qquad \omega^* = 1.414.$$

Il sistema retroazionato é:

- ⊗ globalmente asintoticamente stabile;
- ○ instabile;
- ○ non si puó dire nulla;

Disegnare su questo piano di Nyquist la posizione del cerchio critico e della $G(j\omega)$:




## 34. Funzione descrittiva

Valore della $F(X)$ per $X = 0^+$:

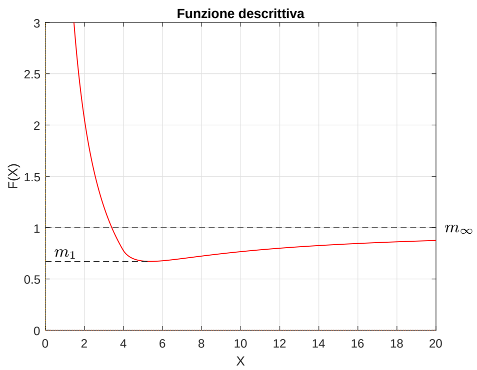
$$m_0 = \infty$$

Valore della $F(X)$ per $X = \infty$:

$$m_\infty = 1$$

Note:

Andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$:




## 35. Discussione al variare di $K$

Per $K \neq 1$, il margine di ampiezza $K^*$ del sistema $K\, G_1(s)$ è:

$$K^* = \frac{\bar{K}^*}{K} = \frac{6}{K}$$

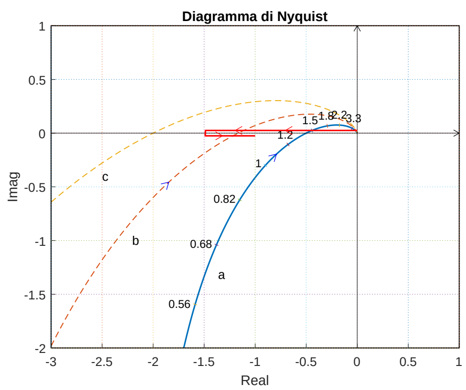
Discussione al variare di $K$:

a) $K^* > m_\infty$: un ciclo limite stabile.

b) $m_1 < K^* < m_\infty$: 2 cicli limite, uno stabile (quello uscente) e uno instabile (quello entrante).

c) $K^* < m_1$: la funzione $-1/F(X)$ è tutta interna al diagramma completo per cui l'origine è un punto instabile.

Rappresentazione grafica delle funzioni $G(j\omega)$ e $-\frac{1}{F(X)}$:



**36. Discretizzazione**

Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(z) = \left.\frac{(s+3)}{(s+1)}\right|_{s=\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}} = \frac{2(1-z^{-1})+3\,T(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})+T(1+z^{-1})} = \frac{3\,T+2+(3\,T-2)z^{-1}}{T+2+(T-2)z^{-1}}$$

Per $T = 0.2$ si ha:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{2.6 - 1.4\,z^{-1}}{2.2 - 1.8\,z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m(k) = \frac{1}{2.2}[1.8\,m(k-1) + 2.6\,e(k) - 1.4\,e(k-1)]$$

cioè:

$$m(k) = 0.818\,m(k-1) + 1.182\,e(k) - 0.636\,e(k-1)]$$

**37. Esercizio opzionale (se previsto)**

**A. Foglio di Brutta**

**B. Foglio di Brutta**

**C. Foglio di Brutta**