

Domande a risposta multipla

Si risponda alle seguenti domande a risposta multipla. Almeno una delle risposte è vera. Per ciascuna domanda riportare sul foglio delle risposte le lettere di tutte le risposte che si ritengono vere.

1. La trasformata di Laplace del segnale $f(t)$ è definita come segue:

- A. $F(s) := \int_0^\infty f(t) e^{st} dt$
- B. $F(s) := \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$
- C. $F(s) := \int_{-\infty}^\infty f(\tau) e^{st} dt$
- D. $F(s) := \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-st} dt$

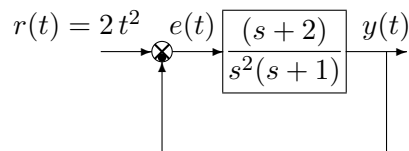
2. Un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati e privo di zeri, ha un picco di risonanza $M_R > 1$

- A. se e solo se $0 < \delta < 1$
- B. se e solo se $0 < \delta < 0.5$
- C. **se e solo se $0 < \delta < 1/\sqrt{2}$**
- D. se e solo se $0.5 < \delta < 1/\sqrt{2}$

3. Sia dato il sistema retroazionato mostrato in figura.

L'errore a regime $e(\infty)$ della variabile $e(t)$ quando $t \rightarrow \infty$ è:

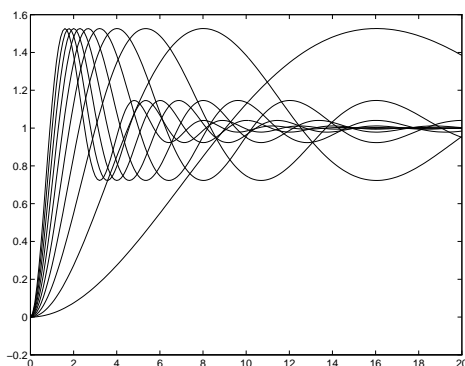
- A. $e(\infty) = 0$
- B. $e(\infty) = 1$
- C. **$e(\infty) = 2$**
- D. $e(\infty) = \infty$



4. Si considerino le risposte temporali al gradino unitario riportate in figura.

Quali di questi parametri rimangono costanti per tutti i sistemi che hanno generato gli andamenti temporali riportati in figura?

- A. **picco di risonanza M_R**
- B. tempo di assestamento T_a
- C. **coefficiente di smorzamento δ**
- D. **massima sovraelongazione $S\%$**



5. La funzione di risposta armonica di un ritardo puro $G(s) = e^{-t_0 s}$
- ha modulo costante e fase crescente
 - ha modulo costante e fase decrescente**
 - ha modulo decrescente e fase crescente
 - ha modulo decrescente e fase decrescente
6. La formula di Bode per il calcolo della fase di un sistema a partire dal diagramma delle ampiezze
- è una formula esatta**
 - è una formula approssimata
 - è valida per tutti sistemi lineari stabili
 - è valida per tutti i sistemi lineari a fase minima**
7. Un sistema $G(s)$ retroazionato è asintoticamente stabile:
- se e solo se il suo margine di fase M_φ è positivo**
 - se e solo se il suo margine di ampiezza M_α è positivo
 - se e solo se il suo margine di fase M_φ è maggiore di 1
 - se e solo se il suo margine di ampiezza M_α è maggiore di 1**
8. Sia $F(X)$ la funzione descrittiva di una non linearità posta in retroazione negativa sul sistema $G(s)$. Se sul piano complesso non vi sono intersezioni tra la $G(j\omega)$ e la $-1/F(X)$ allora nell'intorno del punto di lavoro
- il sistema retroazionato può essere stabile**
 - il sistema retroazionato può essere instabile**
 - il sistema retroazionato è sicuramente stabile
 - il sistema retroazionato non presenta oscillazioni autosostenute**
9. Sia $X(z)$ la Z-trasformata della sequenza $x(kT)$. Il teorema del valore iniziale
- afferma che $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$**
 - afferma che $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} zX(z)$
 - afferma che $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} (1 - z)X(z)$
 - si applica solamente se la funzione $X(z)$ ha tutti i poli stabili
10. Nel metodo di discretizzazione per corrispondenza poli/zeri applicato alla funzione $D(s)$, la compensazione del guadagno k alle alte frequenze prevede l'utilizzo della seguente relazione:
- $\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$
 - $\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{z \rightarrow \infty} G(z)$
 - $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{z \rightarrow \infty} G(z)$
 - $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{z \rightarrow -1} G(z)$**

Domande dirette

Si risponda alle seguenti domande dirette. Per ciascuna domanda riportare sul foglio delle risposte la corrispondente risposta.

11. Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ del seguente segnale temporale $x(t)$:

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[5 + 2t^4 + 3 \cos(6t) e^{-5t}] = \boxed{X(s) = \frac{5}{s} + \frac{48}{s^5} + \frac{3(s+5)}{(s+5)^2 + 6^2}}$$

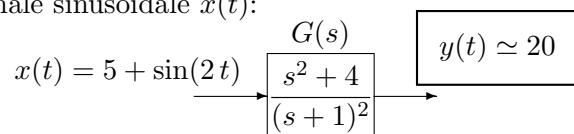
12. Calcolare la trasformata di Laplace inversa $g(t)$ delle seguente funzione di trasferimento $G(s)$:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s+1} + \frac{8}{(s+3)(s+5)}\right] = \boxed{\delta(t) + e^{-t} + 4e^{-3t} - 4e^{-5t}}$$

Infatti si ha:

$$G(s) = 1 + \frac{1}{s+1} + \frac{K_1}{s+3} + \frac{K_2}{s+5} = \mathcal{L}^{-1}[\delta(t) + e^{-t} + 4e^{-3t} - 4e^{-5t}]$$

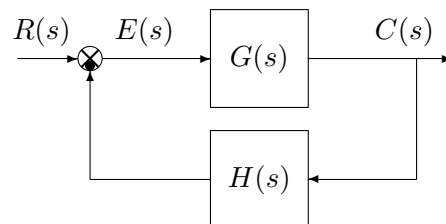
13. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ mostrato in figura quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale $x(t)$:



Infatti si ha che:

$$G(0) = 4, \quad \text{e} \quad G(j2) = \frac{(j2)^2 + 4}{(j2 + 1)^2} = \frac{-4 + 4}{(j2 + 1)^2} = 0$$

14. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere la funzione $K(s)$ che lega la variazione relativa del sistema $H(s)$ alla variazione relativa del sistema retroazionato $G_0(s)$ quando varia un parametro β interno alla funzione di trasferimento $H(s)$:



$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = K(s) \frac{\Delta H(s)}{H(s)}$$

$$\boxed{K(s) = \frac{-G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}}$$

15. Scrivere la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(s+5)^2 e^{-2s}}{(s+1)(s^2+4)} \quad \rightarrow \quad \boxed{\varphi(\omega) = 2 \arctan \frac{\omega}{5} - 2\omega - \arctan \omega - \frac{\pi}{2} [1 + \text{sign}(\omega - 2)]}$$

16. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $2\dot{y}(t) + 3y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = 4$. Applicando la trasformata di Laplace si ha:

$$2(sY(s) - 4) + 3Y(s) = 0 \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{4}{s + 1.5} \quad \rightarrow \quad \boxed{y(t) = 4e^{-1.5t}}$$

17. Scrivere l'equazione alle differenze corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{5 + 3z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2} = 5x_k + 3x_{k-1}}$$

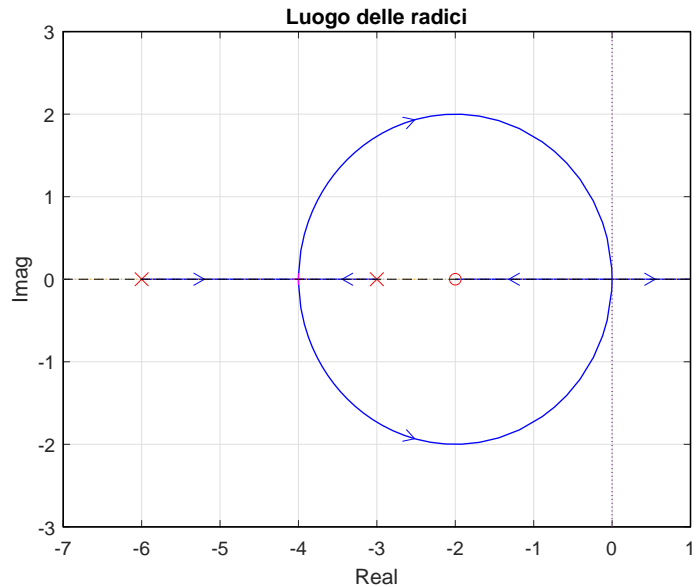
18. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{(4s + 5)(s + 4)}{s(2s + 1)(3s - 7)} \quad \rightarrow \quad \boxed{y_0 = \frac{2}{3}} \quad \boxed{y_\infty = \cancel{A}}$$

19. A fianco è riportato il luogo delle radici del sistema $G(s) = \frac{-(s+2)}{(s+3)(s+6)}$ posto in retroazione negativa al variare del parametro $K > 0$.

Calcolare il valore K_a corrispondente alla condizione di minimo tempo di assestamento del sistema retroazionato:

$$\boxed{K_a = - \left. \frac{1}{G(s)} \right|_{s=-4} = 1}$$



20. Sia $X(z) = \mathcal{Z}[x(k)]$ la \mathcal{Z} -trasformata della successione $x(k)$. Per $n = 1, 2, \dots$, enunciare il teorema della traslazione nel tempo in anticipo:

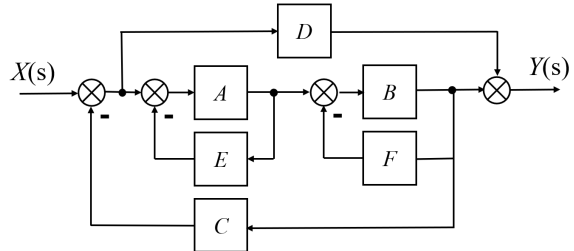
$$\boxed{\mathcal{Z}[x(t + nT)] = z^n \left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} \right]}$$

Esercizi

Si svolgano i seguenti esercizi. La risposta di ciascun esercizio deve essere riportata sul foglio delle risposte nella sezione specificatamente riservata al corrispondente esercizio.

21. **(Mason)** Relativamente allo schema a blocchi mostrato in figura, calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$:

$$G_1(s) = \frac{AB+D(1+AE+BF+AE BF)}{1+AE+BF+ABC+AE BF}$$



22. **(Risposta al gradino)**

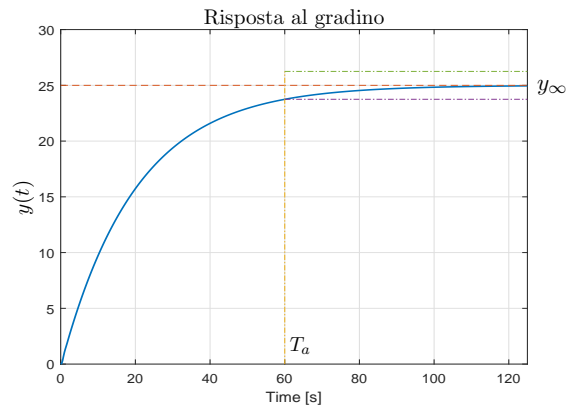
Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{90(5 + 0.2s)(s^2 + 25s + 10^2)}{(0.3s + 5)(4s + 0.2)(s^2 + 16s + 72)(s^2 + 4s + 25)}$$

Calcolare inoltre:

- il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \rightarrow \infty$;
- il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
- il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$$y_\infty = 25, \quad T_a \simeq \frac{3}{0.05} = 60 \text{ s}, \quad T_\omega \simeq \beta$$

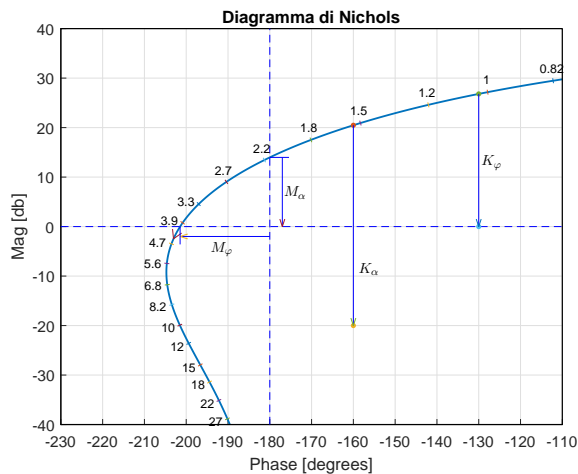


23. **(Margini di stabilità)** Sia data la funzione di risposta armonica, riportata in figura, di un sistema $G(s)$ a fase minima. Nei limiti della precisione consentita dal grafico, calcolare:

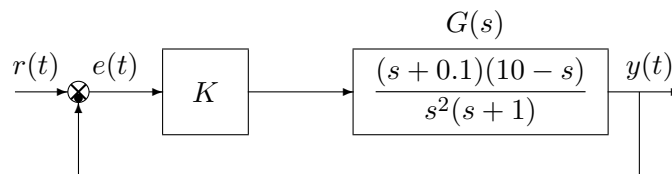
- il margine di ampiezza M_α del sistema;
- il margine di fase M_φ del sistema;
- il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 50$;
- il guadagno K_α per cui la funzione $K_\alpha G(j\omega)$ passa per il punto $B = (-160^\circ, -20 \text{ db})$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

- a) $M_a = -14 \text{ db} = 0.2$
- b) $M_\varphi = -21.46^\circ$
- c) $K_\varphi = -26.8 \text{ db} = 0.045$
- d) $K_\alpha = -40.47 \text{ db} = 0.0095$



24. (Criterio di Routh) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K(s + 0.1)(10 - s)}{s^2(s + 1)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + (1 - K)s^2 + 9.9 K s + K = 0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 9.9 K \\ 2 & 1 - K & K \\ 1 & 9.9 K(1 - K) - K & \\ 0 & K & \end{array}$$

Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$(8.9 - 9.9 K)K > 0, \quad K > 0.$$

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$0 < K \leq K^* = \frac{8.9}{9.9} = 0.8990$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{9.9K^*} = \sqrt{8.9} = 2.983.$$

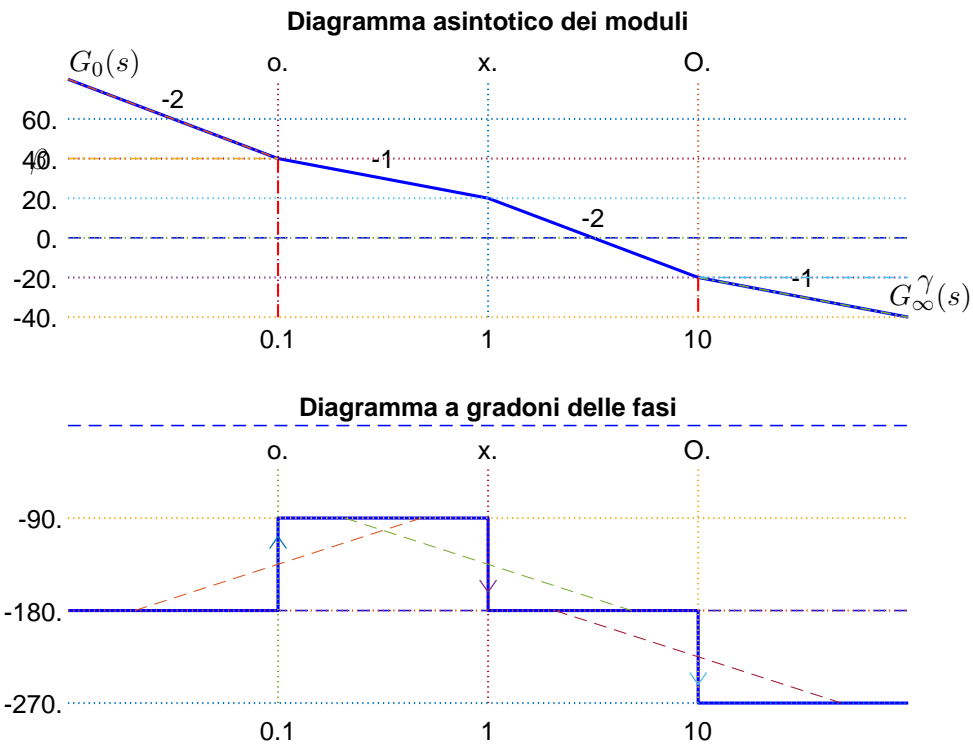


Figura 1: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_d(s)$.

25. **(Diagrammi asintotici di Bode)** Vedi (24). Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione.

I diagrammi “asintotici” di Bode della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 1. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2. Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \rightarrow 0$ ed $\omega \rightarrow \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{1}{s^2}, \quad G_\infty(s) = -\frac{1}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\pi, \quad \varphi_\infty = -\frac{3\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze, il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.1$ e il guadagno γ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = \frac{1}{0.1^2} = 100 = 40 \text{ db.} \quad \gamma = \frac{1}{10} = 0.1 = -20 \text{ db.}$$

26. **(Diagramma di Nyquist)** Vedi (24). Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l’asse reale negativo e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* .

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

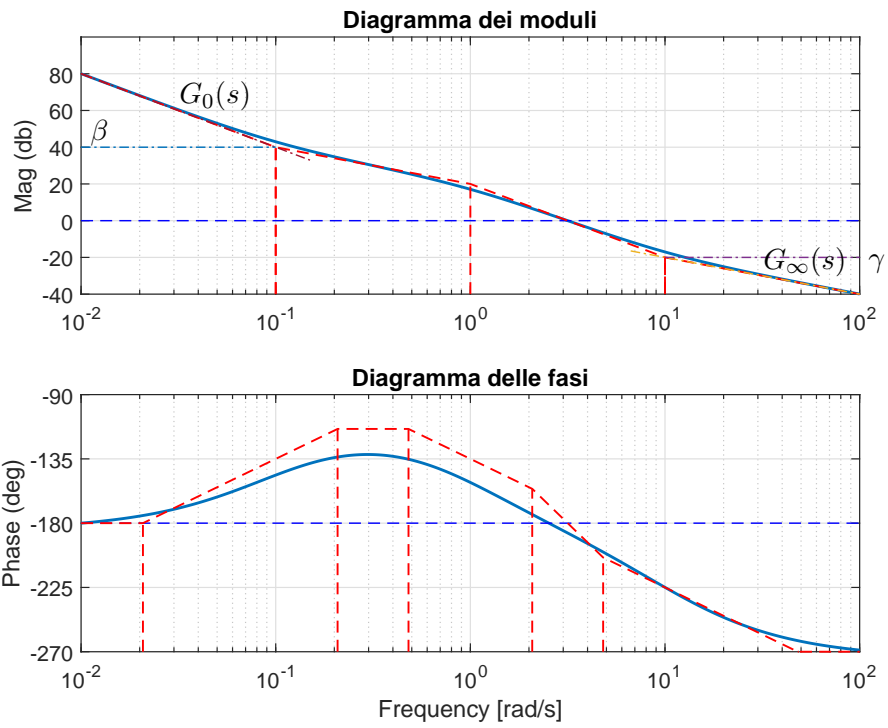


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

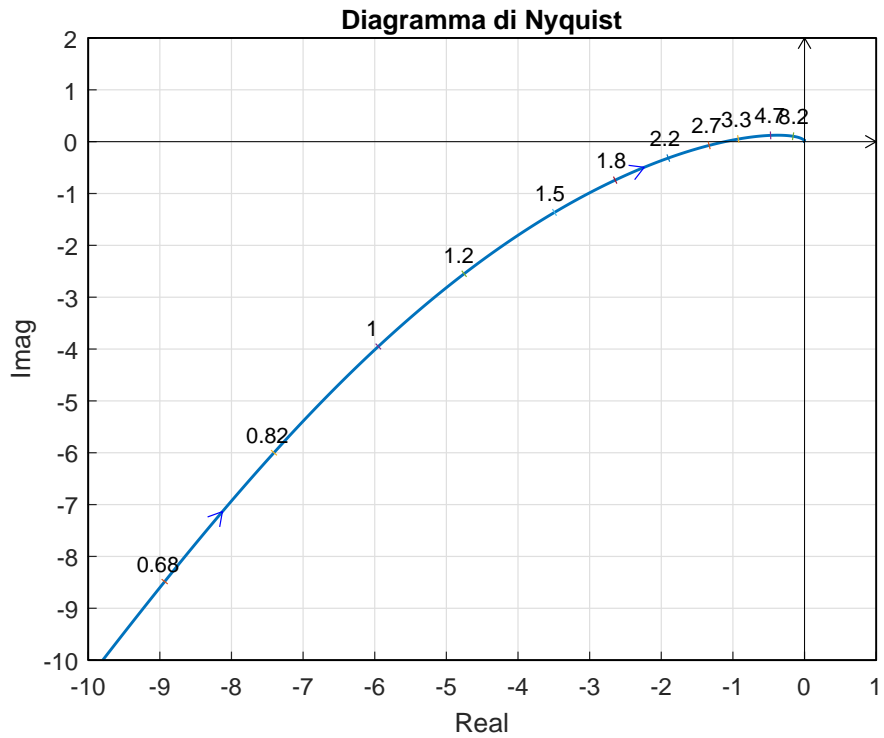


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\pi$. Per $\omega \rightarrow 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = \frac{1}{0.1} - \frac{1}{10} - 1 = 8.9 > 0.$$

Il sistema è di tipo 2 per cui non esiste nessun asintoto verticale. Il seguente parametro Δ_p :

$$\Delta_p = -0.1 + 10 + 1 = 10.9 > 0$$

indica che per $\omega \rightarrow \infty$ la funzione $G(j\omega)$ arriva in anticipo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{3\pi}{2}$. La variazione di fase $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ indica che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $-\frac{\pi}{2}$ in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{3\pi}{2}$. Esiste una intersezione con l'asse reale. L'intersezione con l'asse reale avviene nel punto:

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{K^*} = -1.112.$$

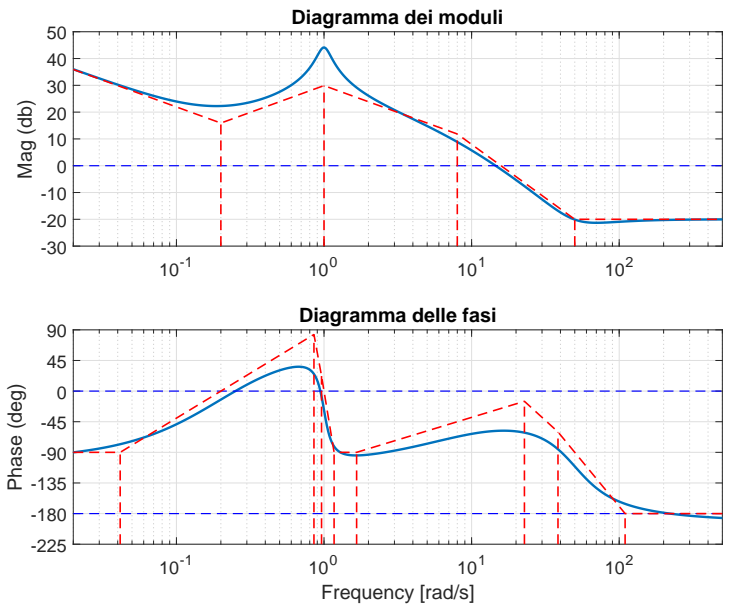
in corrispondente della pulsazione $\omega_1^* = 2.983$.

27. (Stima di una funzione $G(s)$)

Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$. Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ .

$$G(s) = \frac{-0.1(s + 0.2)^2(s^2 - 50s + 50^2)}{s(s^2 + 0.2s + 1)(s - 8)}.$$



Soluzione:

La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{-0.1(s + 0.2)^2(s^2 - 50s + 50^2)}{s(s^2 + 0.2s + 1)(s - 8)}.$$

Il valore $K = -0.1$ si determina, per esempio, calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 50$:

$$|G_\infty(s)|_{s=50} = \left| \frac{K s^4}{s^4} \right| = |K| = \beta \simeq -20 \text{ db} \simeq 0.1 \quad \rightarrow \quad |K| \simeq 0.1.$$

e tenendo conto del fatto che

$$\arg |G_\infty(0)| = \arg [K] = -\pi$$

La coppia di zeri in $\omega = 0.2$ è costituita da due zeri reali coincidenti perché in $\omega = 0.2$ la distanza tra diagramma reale e diagramma asintotico è di 6 db.

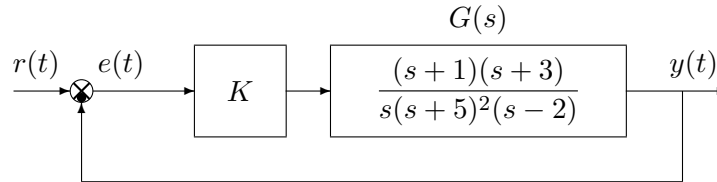
Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati in $\omega = 1$ è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq \frac{1}{10} = 0.1.$$

La distanza $M_{\omega_n} \simeq 14 \text{ db} \simeq 5$ si legge dal diagramma di Bode dei moduli.

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati in $\omega = 50$ è $\delta = 0.5$ perché in $\omega = 50$ il diagramma reale coincide con il diagramma asintotico.

28. **(Luogo delle radici)** Sia dato il seguente sistema retroazionato:



tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione “solo in modo qualitativo”.

Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato diventa:

$$1 + K \frac{(s+1)(s+3)}{s(s+5)^2(s-2)} = 0$$

L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare di $K > 0$ è mostrato in Fig. 4. Sono presenti due asintoti. Il centro degli asintoti σ_a è il seguente:

$$\sigma_a = \frac{1}{2} (-5 - 5 + 2 + 3 + 1) = -\frac{4}{2} = -2$$

29. **(Contorno delle radici)** Sia data la seguente equazione caratteristica di un sistema retroazionato:

$$1 + \frac{10(s+\alpha)(s+7)}{s^3} = 0$$

Tracciare qualitativamente il contorno delle radici dell'equazione caratteristica al variare del parametro $\alpha > 0$. Il calcolo di α^* non è necessario. Determinare la posizione dei punti di diramazione “solo in modo qualitativo”.

Sol. L'equazione caratteristica può essere riscritta nel seguente modo $1 + \alpha G_2(s) = 0$:

$$s^3 + 10s(s+7) + 10\alpha(s+7) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{\alpha 10(s+7)}{s(s^2 + 10s + 70)} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{\alpha 10(s+7)}{s[(s+5)^2 + 6.708^2]} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\alpha > 0$ è mostrato in Fig. 5. Il contorno delle radici ha due asintoti verticali. Il centro degli asintoti σ_a è il seguente:

$$\sigma_a = \frac{1}{2} (-10 + 7) = -1.5$$

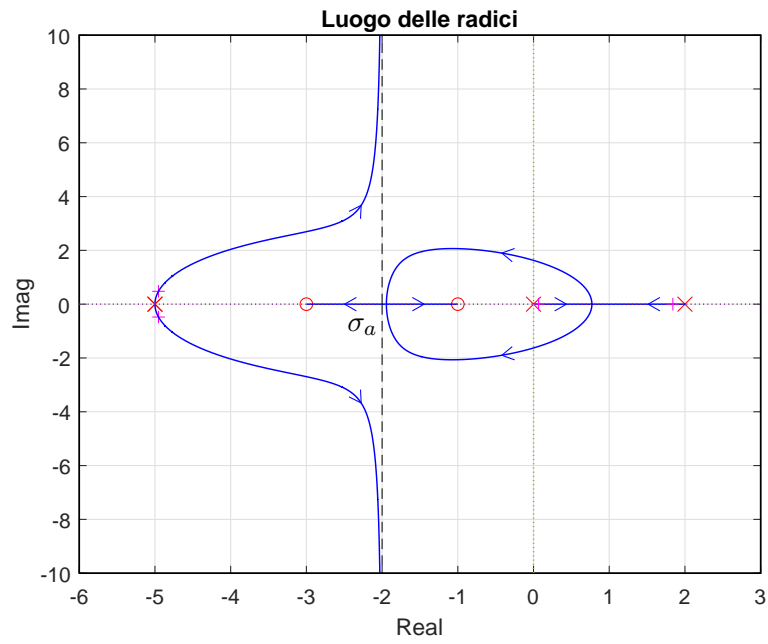


Figura 4: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare di $K > 0$.

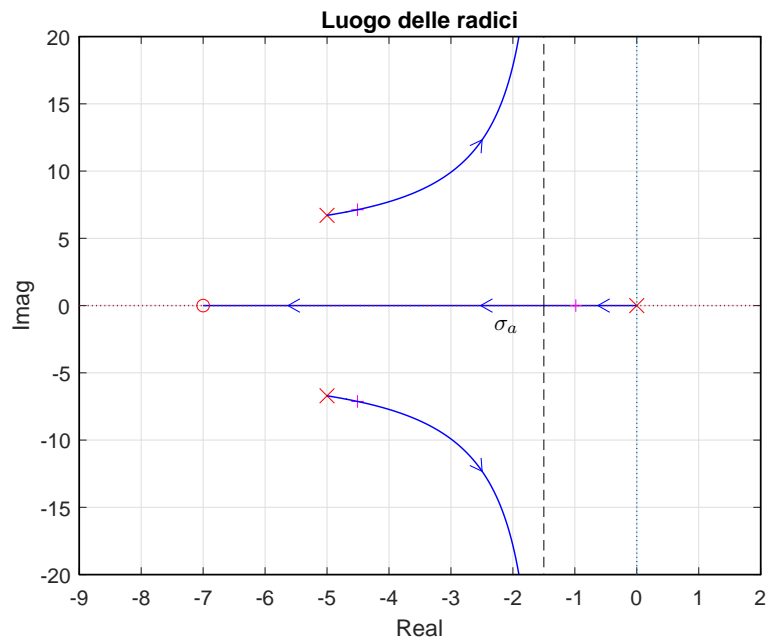


Figura 5: Contorno delle radici del sistema $G_2(s)$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

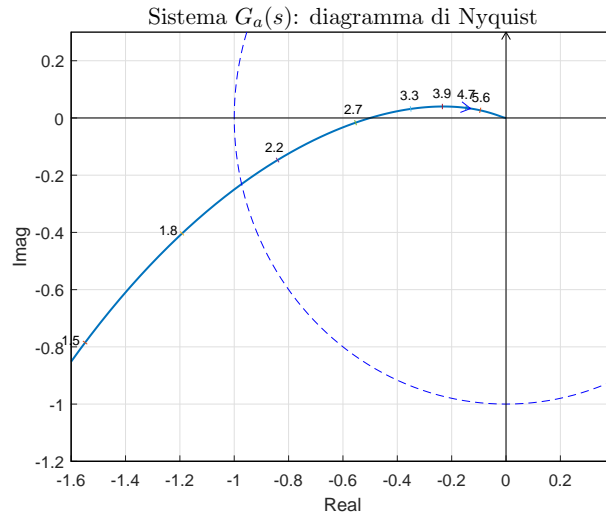
30. (Rete correttrice: Nyquist)

Sia data la funzione di risposta armonica del sistema $G_a(s)$ riportata a fianco.

Progettare una rete correttrice

$$C_a(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

in grado di garantire al sistema compensato $C_a(s)G_a(s)$ un margine di fase $M_\varphi = 50^\circ$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.



Sol. Il modulo e la fase del punto B si ricava dalle specifiche di progetto:

$$M_B = 1, \quad \varphi_B = 230^\circ$$

In questo caso è possibile utilizzare solo una rete anticipatrice. La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 6. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per la sintesi della rete correttrice è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 3.3$:

$$M_A = 0.352, \quad \varphi_A = 174.8^\circ \quad \rightarrow \quad M = \frac{M_B}{M_A} = 2.839, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 55.14^\circ$$

La rete correttrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi} = 0.8373, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi} = 0.0809 \quad \rightarrow \quad C_a(s) = \frac{1 + 0.8373 s}{1 + 0.0809 s}$$

Il diagramma di Nyquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_a(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 6.

Reti corretttrici relative ad altre scelte della pulsazione ω_A :

$$\begin{aligned} \omega_A &= [\quad 2.7 \quad 3.3 \quad 3.9 \quad 4.7 \quad 5.7] \\ M_A &= [\quad 0.554 \quad 0.3522 \quad 0.2376 \quad 0.1513 \quad 0.0944] \\ \varphi_A &= [-178.3 \quad 174.9 \quad 170.3 \quad 166.5 \quad 164.1] \\ M &= [\quad 1.805 \quad 2.839 \quad 4.209 \quad 6.608 \quad 10.59] \\ \varphi &= [\quad 48.29 \quad 55.1 \quad 59.70 \quad 63.5 \quad 65.9] \\ \tau_1 &= [\quad 0.5655 \quad 0.8373 \quad 1.1 \quad 1.465 \quad 1.957] \\ \tau_2 &= [\quad 0.0552 \quad 0.0809 \quad 0.0792 \quad 0.0702 \quad 0.0604] \end{aligned}$$

31. (Rete correttrice: Nichols)

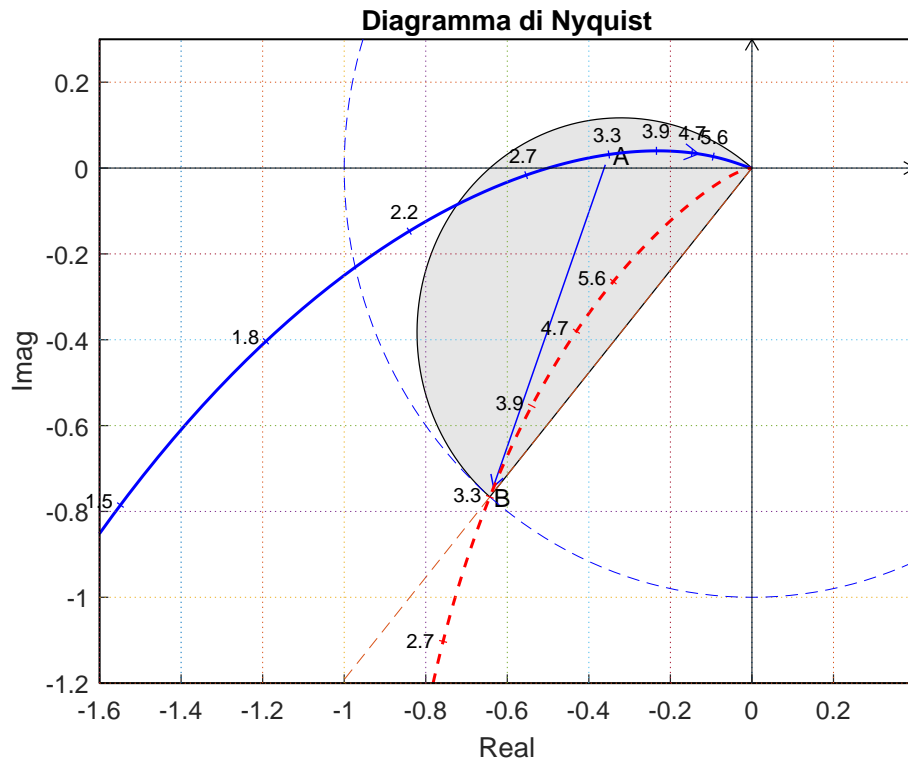


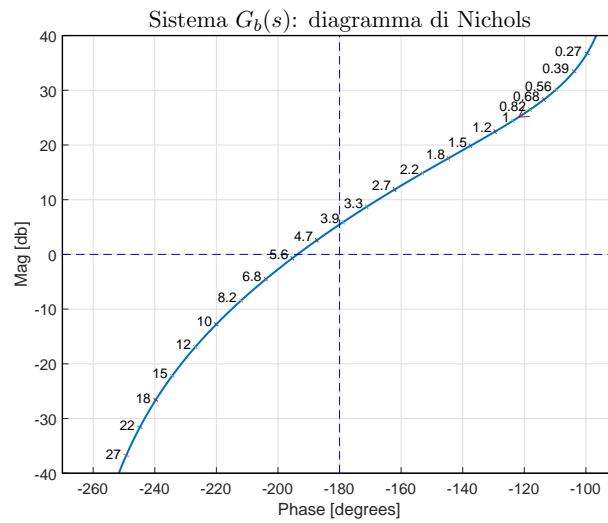
Figura 6: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_a(s)G_a(s)$.

Sia data la funzione di risposta armonica del sistema $G_b(s)$ riportata a fianco.

Progettare una rete **ritardatrice**

$$C_b(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

in modo da garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_\alpha = 10$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.



Sol. La specifica di progetto definisce univocamente la posizione del punto B : $M_B = -20 \text{ db} = 0.1$ e $\varphi_B = -180^\circ$. La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 7.

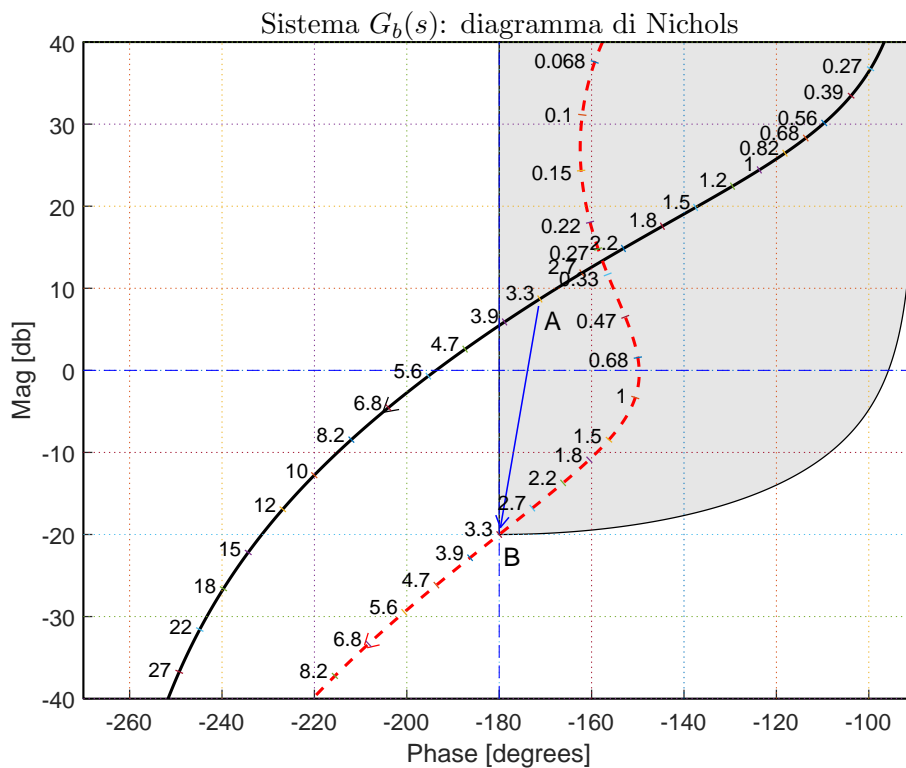


Figura 7: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_b(s)G_b(s)$.

Il punto $A = G(j\omega_A)$ scelto per la sintesi della rete correttiva è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 3.3$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 2.722, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -171.19^\circ.$$

I valori di M e φ da usare nelle formule di inversione sono i seguenti:

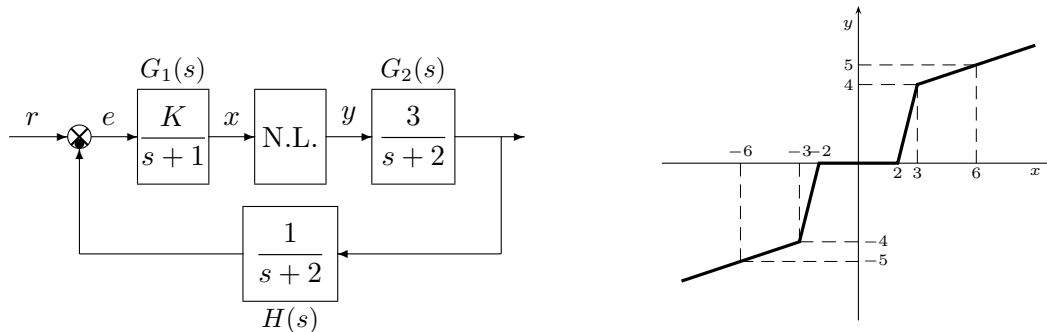
$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.0367, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -8.80^\circ \quad \rightarrow \quad C_b(s) = \frac{(1 + 1.884 s)}{(1 + 51.95 s)}.$$

I diagrammi di Nichols delle funzioni $G_b(s)$ e $C_b(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 7.

Sintesi della rete correttiva $C_b(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A :

$\omega_A = [$	3.3	2.7	2.2	1.8	1.5	1.2	1	0.82]
$M_A = [$	2.722	3.916	5.528	7.554	9.829	13.25	16.64	21.05]
$\varphi_A = [$	-171.2	-162.1	-153.1	-144.7	-137.5	-129.5	-123.7	-118.1]
$M = [$	0.0367	0.0255	0.0180	0.0132	0.0101	0.0075	0.0060	0.0047]
$\varphi = [$	-8.802	-17.88	-26.9	-35.33	-42.51	-50.51	-56.31	-61.85]
$\tau_1 = [$	1.884	1.117	0.8779	0.771	0.7172	0.6787	0.6594	0.6458]
$\tau_2 = [$	51.95	46.1	54.64	71.78	96.24	142.4	199.3	290.4]

32. **(Punto di lavoro)** Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:



Posto $K = 1$, determinare per quale valore r_1 del riferimento r il punto di lavoro del sistema retroazionato coincide con il punto $(x_1, y_1) = (3, 4)$.

Soluzione. La retta di carico del sistema é:

$$x = K_1(r - K_2 K_3 y) \quad \text{dove} \quad K_1 = 1, \quad K_2 = \frac{3}{2}, \quad K_3 = \frac{1}{2}.$$

da cui si ricava

$$x = r - \frac{3}{4}y \quad \rightarrow \quad r = x + \frac{3}{4}y$$

Il valore r_1 si ottiene ponendo $x = 3$ e $y = 4$ nella retta di carico:

$$r_1 = 3 + \frac{3}{4}4 = 6.$$

33. **(Criterio del cerchio)** Vedi (32). Posto $K = 1$, $r = r^*$ ed utilizzando il criterio del cerchio, dire se il sistema retroazionato è stabile nell'intorno del punto di lavoro $(x_0, y_0) = (3, 4)$.

Soluzione. Per $r = r^*$ il punto di lavoro coincide con il punto $(x_0, y_0) = (3, 4)$. Le pendenze delle 2 rette che passano nel punto di lavoro e che racchiudono a settore tutta la non linearità sono:

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = 4.$$

Per $K = 1$, il guadagno d'anello del sistema è:

$$G(s) = G_1(s)H(s) = \frac{3}{(s+1)(s+2)^2}$$

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{3K}{(s+1)(s+2)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + 5s^2 + 8s + 4 + 3K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 5 & 4 + 3K \\ 1 & 40 - 4 - 3K & \\ 0 & 4 + 3K & \end{array}$$

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$-\frac{4}{3} < K \leq K^* = 12$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{8} = 2.8284.$$

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ non interseca il cerchio critico e quindi, in base al criterio del cerchio, si può affermare che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile nell'intorno del punto di lavoro $(x_0, y_0) = (3, 4)$. In Fig. 8 è mostrato il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ sovrapposto al cerchio critico.

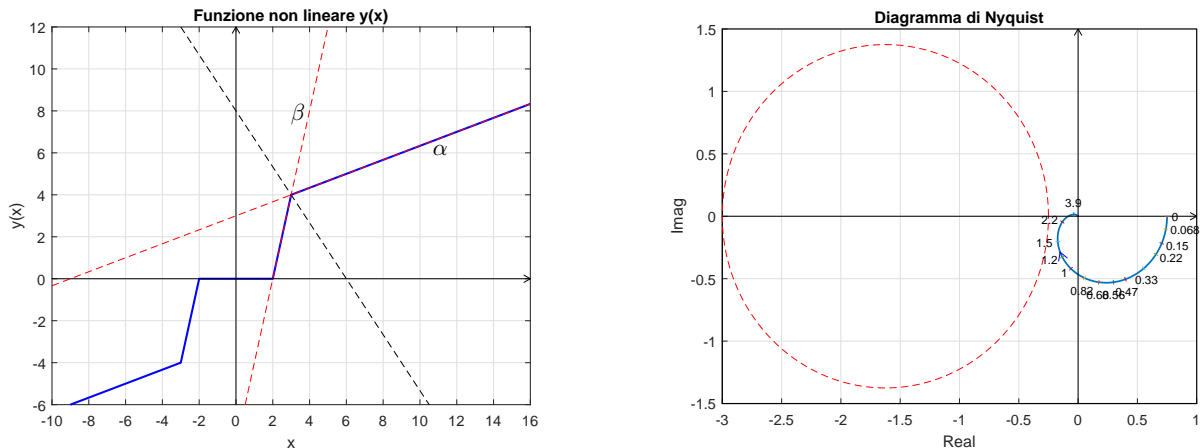


Figura 8: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ e cerchio critico.

34. **(Funzione descrittiva)** Vedi (32). Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità N.L. assegnata, prendendo l'origine come punto di lavoro. Utilizzare delle variabili (per esempio: m_1, m_2, \dots) per rappresentare gli eventuali valori non noti minimi e massimi della funzione $F(X)$.

Soluzione. L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ è mostrato in Fig. 9. Indichiamo: a) con $m_0 = 0$ il valore iniziale della funzione $F(X)$ per $X < 2$; b) con $m_1 \simeq 1.04$ il valore massimo della funzione $F(X)$ per $X \simeq 3.8$; c) con $m_\infty = 0.333$ il valore finale della funzione $F(X)$ per $X \rightarrow \infty$.

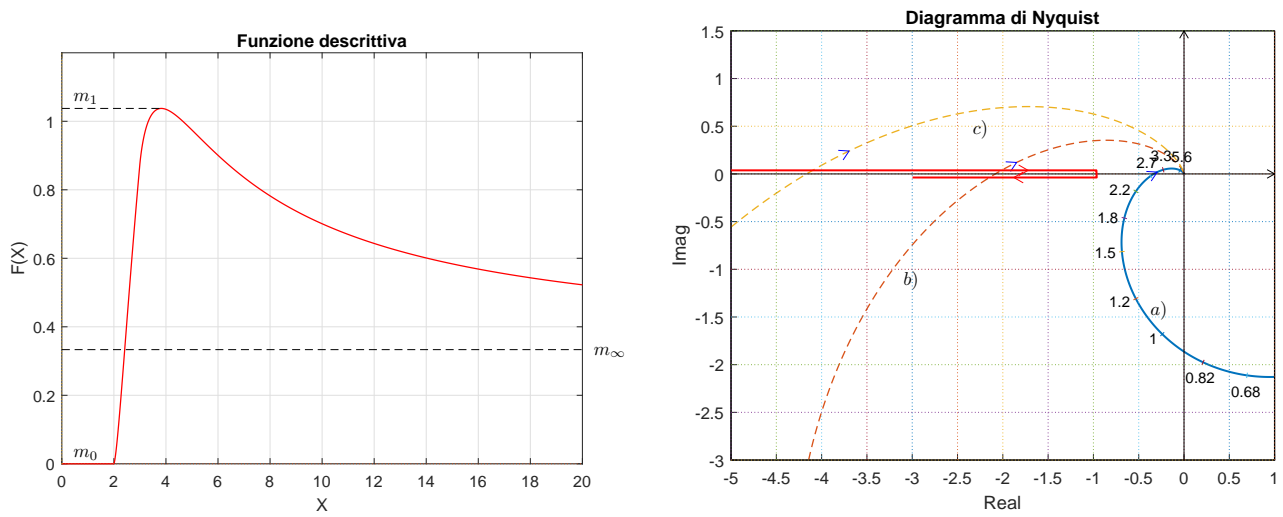


Figura 9: Andamento della funzione descrittiva $F(X)$.

35. **(Discussione al variare di K)** Vedi (32). Discutere “qualitativamente” (anche in funzione dei parametri m_1, m_2, \dots) l’esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno $K > 0$.

Soluzione. Sol. Per $K = 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $G(s)$ è $K^* = 12$. Per $K \neq 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $K G_1(s)$ è:

$$K^* = \frac{\bar{K}^*}{K} = \frac{12}{K}$$

Al variare di K si hanno quindi queste 3 possibili soluzioni:

- a) $K^* > m_1$: la funzione $-1/F(X)$ è tutta esterna al diagramma completo della funzione $G(s)$ per cui non vi sono cicli limite e l’origine è un punto di lavoro globalmente asintoticamente stabile.
- b) $m_\infty < K^* < m_1$: il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in 2 punti a cui corrispondono 2 cicli limite, uno stabile (quello uscente) e uno instabile (quello entrante).
- c) $0 < K^* < m_\infty$: il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in un punto a cui corrisponde un ciclo limite instabile.

36. **(Discretizzazione)** Utilizzando il metodo delle differenze all’indietro, discretizzare la seguente rete corretrice:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s+1)}{s^2}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

Sol. Utilizzando il metodo delle differenze all’indietro si ottiene:

$$D(z) = \frac{(s+1)}{s^2} \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{T(1-z^{-1}+T)}{(1-z^{-1})^2}$$

Per $T = 0.2$ si ha:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{0.1(1.1 - z^{-1})}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{0.11 - 0.1 z^{-1}}{1 - 2 z^{-1} + z^{-2}}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m(k) = 2 m(k - 1) - m(k - 2) + 0.11 e(k) - 0.1 e(k - 1)$$