Cognome: Nome: N. Matr.:☐☐☐☐☐☐

Firma:

Esame scritto di Controlli Automatici

Foglio delle risposte. Data del compito: 13 Luglio 2021

Domande a risposta multipla. Per ciascun domanda riportare nella seguente tabella le lettere di tutte le risposte che si ritengono vere.

1) B	2) C	3) C	4) A C D	5) B
6) A D	7) A D	8) A B D	9) A	10) D

Domande dirette. Per ciascuna domanda riportare nella seguente tabella la corrispondente risposta.

11) $X(s) = \dfrac{5}{s} + \dfrac{48}{s^5} + \dfrac{3(s+5)}{(s+5)^2+6^2}$	12) $g(t) = \delta(t) + e^{-t} + 4\,e^{-3t} - 4\,e^{-5t}$
13) $y(t) \simeq 20$	14) $K(s) = \dfrac{-G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}$
15) $\varphi(\omega) = 2\arctan\dfrac{\omega}{5} - 2\,\omega - \arctan\omega - \dfrac{\pi}{2}[1 + \mathrm{sign}(\omega-2)]$	16) $y(t) = 4\,e^{-1.5\,t}$
17) $y_k - 2\,y_{k-1} + y_{k-2} = 5\,x_k + 3\,x_{k-1}$	18) $y_0 = \dfrac{2}{3}$ $\quad y_\infty = \nexists$
19) $K_a = -\left.\dfrac{1}{G(s)}\right\vert_{s=-4} = 1$	20) $\mathcal{Z}[x(t+nT)] = z^n\left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}\right]$

Esercizi. Per ciascun esercizio riportare negli spazi indicati i risultati finali e principali passaggi necessari per ottenerli. Si raccomanda di scrivere in maniera chiara.

21. Mason

$$G_1(s) = \frac{A\,B + D\,(1 + A\,E + B\,F + A\,E\,B\,F)}{1 + A\,E + B\,F + A\,B\,C + A\,E\,B\,F}$$

22. Risposta al gradino

a) Il valore a regime:

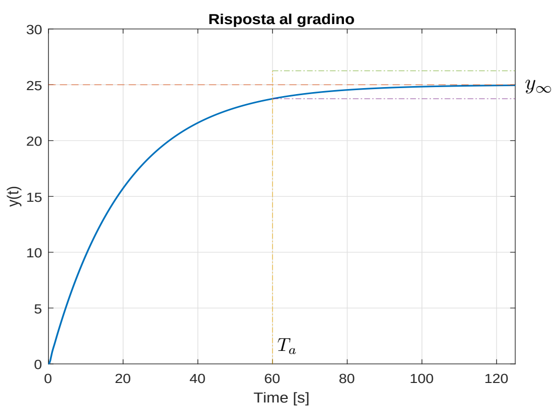
$$y_\infty = 25,$$

b) Il tempo di assestamento:

$$T_a \simeq \frac{3}{0.05} = 60\,\mathrm{s},$$

c) Il periodo dell'eventuale oscillazione:

$$T_\omega \simeq \nexists.$$



23. Margini

a) $M_\alpha = -14$ db $= 0.2$ *b)* $M_\varphi = -21.46°$ *c)* $K_\varphi = -26.8$ db $= 0.045$ *d)* $K_\alpha = -40.47$ db $= 0.0095$

24. Criterio di Routh

Equazione caratteristica del sistema retroazionato:

$$1 + \frac{K(s+0.1)(10-s)}{s^2(s+1)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + (1-K)s^2 + 9.9\,Ks + K = 0.$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 9.9\,K \\ 2 & 1-K & K \\ 1 & 9.9\,K(1-K)-K & \\ 0 & K & \end{array}$$

Calcoli: Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$(8.9 - 9.9\,K)K > 0, \qquad K > 0.$$

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$0 < K <= K^* = \frac{8.9}{9.9} = 0.8990$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{9.9K^*} = \sqrt{8.9} = 2.983.$$

25. Diagrammi asintotici di Bode

La funzione approssimante $G_0(s)$, la fase φ_0 e il modulo M_0:

$$G_0(s) = \frac{1}{s^2}, \qquad \varphi_0 = -\pi, \qquad M_0 = \infty$$

La funzione approssimante $G_\infty(s)$, fase φ_∞ e modulo M_∞:

$$G_\infty(s) = -\frac{1}{s}. \qquad \varphi_\infty = -\frac{3\pi}{2}, \qquad M_\infty = 0$$

Guadagno β in corrispondenza della pulsazione ω_0 dove si ha il primo cambio di pendenza:

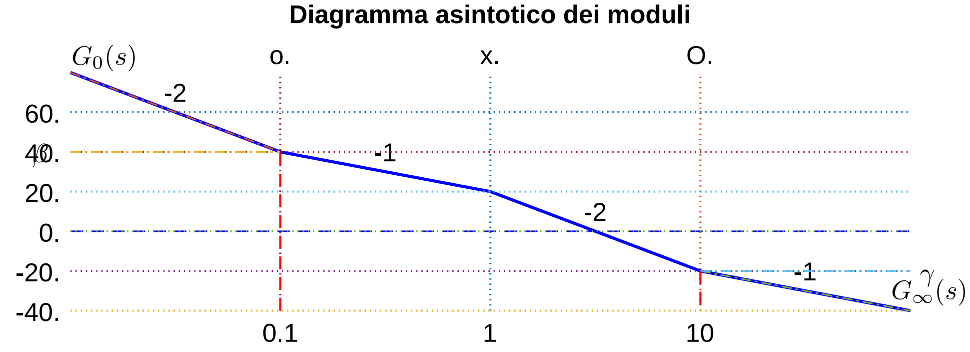
$$\omega_0 = 0.1, \qquad \beta = \frac{1}{0.1^2} = 100 = 40 \text{ db}$$

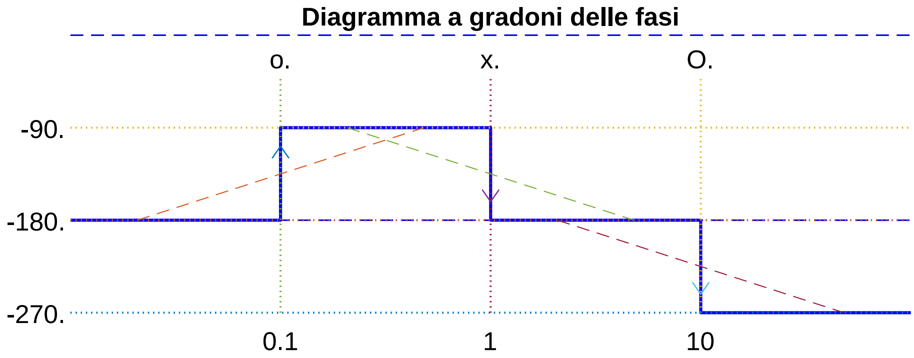
Guadagno γ in corrispondenza della pulsazione ω_∞ dove si ha l'ultimo cambio di pendenza:

$$\omega_\infty = 10, \qquad \gamma = \frac{1}{10} = 0.1 = -20 \text{ db}.$$

25. Diagrammi asintotici di Bode (scale logaritmiche)

Dopo aver indicato i valori degli assi, riportare i diagrammi asintotici di Bode delle fase e delle ampiezze.





26. Diagramma di Nyquist

Fase iniziale φ_0, modulo iniziale M_0 e parametro Δ_τ:

$$\varphi_0 = -\pi, \qquad M_0 = \infty, \qquad \Delta\tau = \frac{1}{0.1} - \frac{1}{10} - 1 = 8.9 > 0$$

Fase finale φ_∞, modulo finale M_∞ e parametro Δ_p:

$$\varphi_\infty = -\frac{3\,\pi}{2} \qquad M_\infty = 0 \qquad \Delta_p = -0.1 + 10 + 1 = 10.9 > 0$$

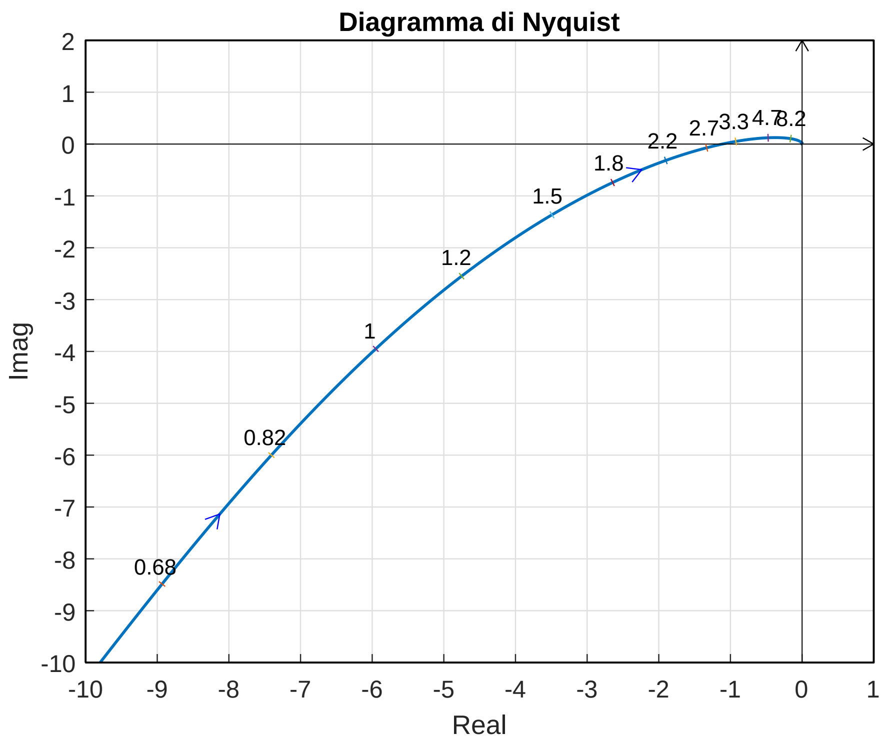
Indicare se nel diagramma di Nyquist é presente un asintoto verticale: Si ☐, No ☒.

Se si, fornire la posizione dell'asintoto verticale: $\sigma_a = \nexists$

Variazione di fase $\Delta\varphi$ per $\omega \in]0, \infty[$: $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$

Eventuale intersezione con il semiasse reale: $\sigma_1^* == -\frac{1}{K^*} = -1.112$

Tracciamento qualitativo del diagramma di Nyquist completo:



27. Stima di una funzione $G(s)$

Funzione di trasferimento del sistema:

$$G(s) = \frac{-0.1(s+0.2)^2(s^2-50s+50^2)}{s(s^2+0.2s+1)(s-8)}.$$

Il valore $K = -0.1$ si determina, per esempio, calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 50$:

$$|G_\infty(s)|_{s=50} = \left|\frac{K\,s^4}{s^4}\right| = |K| = \beta \simeq -20 \text{ db} \simeq 0.1 \qquad \rightarrow \qquad |K| \simeq 0.1.$$

e tenendo conto del fatto che

$$\arg|G_\infty(0)| = \arg[K] = -\pi$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati in $\omega = 1$ è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{\ } \simeq \frac{1}{\ } = 0.1$$

28. Luogo delle Radici

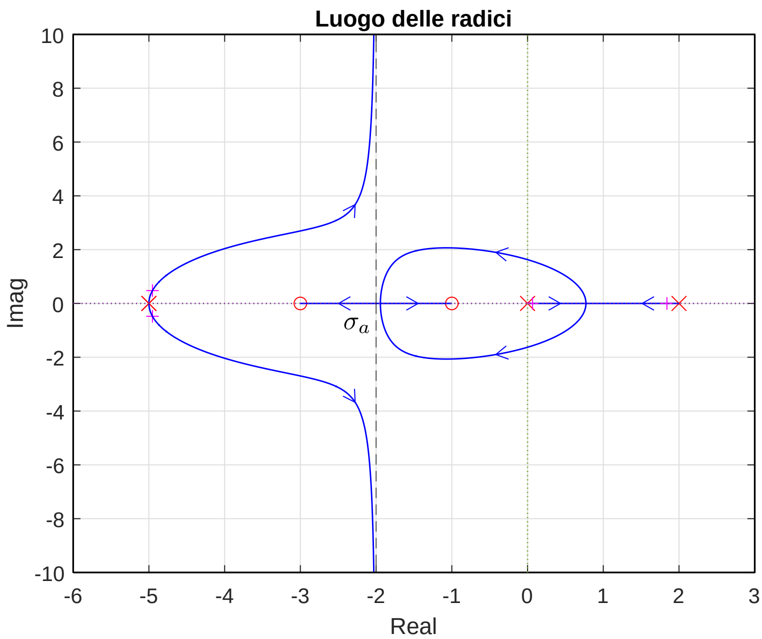
Equazione caratteristica del sistema retroazionato:

$$1 + K\frac{(s+1)(s+3)}{s(s+5)^2(s-2)} = 0$$

Numeri r degli asintoti e posizione σ_a del centro degli asintoti (solo se $r \geq 2$):

$$r = 2 \qquad\qquad \sigma_a = \frac{1}{2}(-5-5+2+3+1) = -\frac{4}{2} = -2$$

Tracciamento qualitativo del luogo delle radici per $K > 0$:



29. Contorno delle Radici

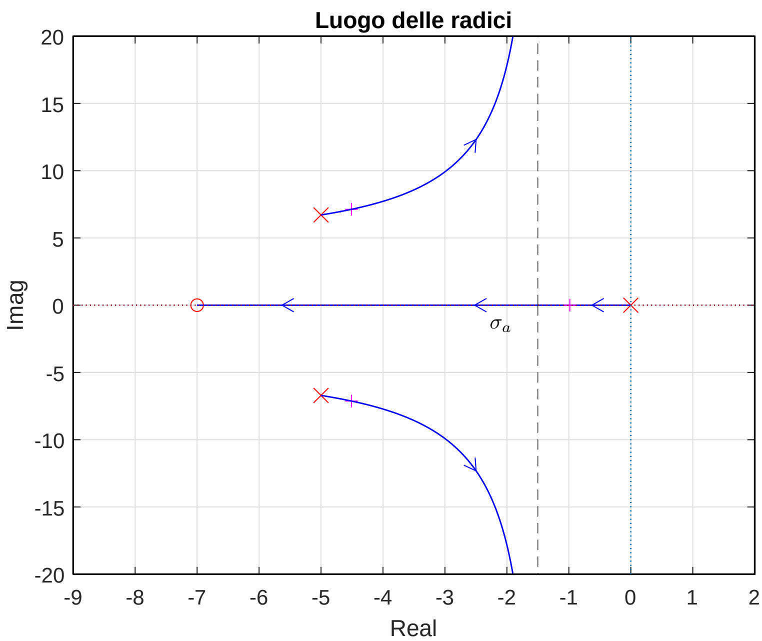
Equazione caratteristica del sistema dinamico assegnato posto nella forma $1 + \alpha\, G_2(s)$:

$$s^3+10s(s+7)+10\,\alpha\,(s+7) = 0 \quad\rightarrow\quad 1+\frac{\alpha\,10\,(s+7)}{s(s^2+10\,s+70)} = 0 \quad\rightarrow\quad 1+\frac{\alpha\,10\,(s+7)}{s[(s+5)^2+6.708^2]} = 0$$

Funzione $G_2(s)$ fattorizzata, grado relativo r e posizione σ_a del centro degli asintoti (se $|r| > 1$):

$$G_2(s) = \frac{10\,(s+7)}{s[(s+5)^2+6.708^2]} \qquad r = 2 \qquad \sigma_a = \frac{1}{2}(-10+7) = -1.5$$

Tracciamento qualitativo del contorno delle radici della funzione $G_2(s)$ per $\alpha > 0$:



30. Rete correttrice: Nyquist

Modulo e fase del punto B:

$$M_B = 1 \qquad \varphi_B = 230^o$$

Pulsazione ω_A del punto A:

$$\omega_A = 3.3$$

Modulo e fase del punto A:

$$M_A = 0.352, \qquad \varphi_A = 174.8^o.$$

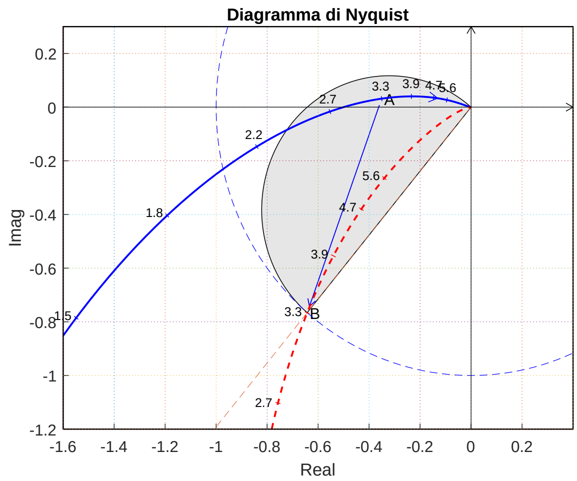
Parametri M e φ:

$$M = 2.839, \qquad \varphi = 55.14^\circ$$

Parametri τ_1 e τ_2:

$$\tau_1 = 0.8373 \qquad \tau_2 = 0.0809$$

Disegnare su questo piano di Nyquist la posizione del punto B e la zona di ammissibilitá:



Rete correttrice:

$$C(s) = \frac{1 + \tau_1\, s}{1 + \tau_2\, s} = \frac{1 + 0.8373\, s}{1 + 0.0809\, s}$$

31. Rete correttrice: Nichols

Modulo e fase del punto B:

$$M_B = -20 \text{ db} = 0.1 \qquad \varphi_B = -180^\circ$$

Pulsazione ω_A del punto A:

$$\omega_A = 3.3$$

Modulo e fase del punto A:

$$M_A = 2.722, \qquad \varphi_A = -171.19^\circ.$$

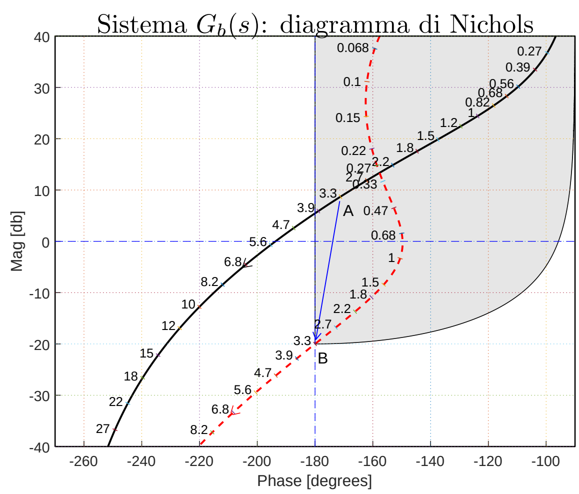
Parametri M e φ:

$$M = 0.0367, \quad \varphi = -8.80^\circ$$

Parametri τ_1 e τ_2:

$$\tau_1 = 1.884 \qquad \tau_2 = 51.95$$

Disegnare sul questo piano di Nichols la posizione del punto B e la zona di ammissibilitá:



Rete correttrice:

$$C(s) = \frac{1 + \tau_1\, s}{1 + \tau_2\, s} = \frac{(1 + 1.884\, s)}{(1 + 51.95\, s)}$$

32. Punti di lavoro

Guadagni statici: $K_1 = 1$ $K_2 = \frac{3}{2}$ $K_3 = \frac{1}{2}$

Retta di carico:

$$x = K_1(r - K_2 K_3 y) = r - \frac{3}{4}y$$

Valori r_1 ed r_2 del segnale di ingresso r corrispondenti ai punti di lavoro $(x_1,\ y_1)$ e $(x_2,\ y_2)$:

$$r = x + \frac{3}{4}y \qquad \rightarrow \qquad r_1 = 3 + \frac{3}{4}4 = 6$$

33. Criterio del cerchio

Pendenze delle rette del settore:

$$\alpha = \frac{1}{3}, \qquad \beta = 4.$$

Funzione d'anello $G(s)$:

$$G(s) = \frac{3}{(s+1)(s+2)^2}$$

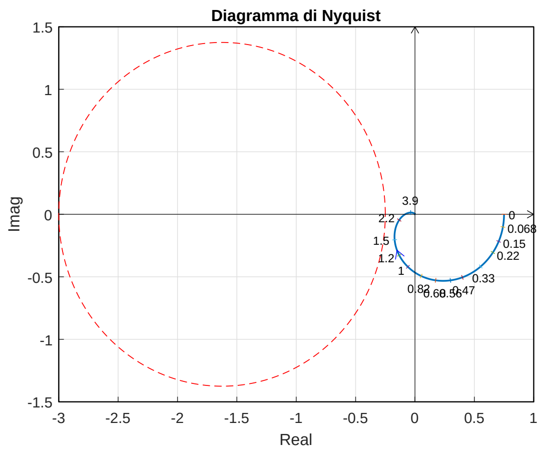
Parametri della funzione $G(s)$:

$$K^* = 12, \qquad \omega^* = 2.8284.$$

Il sistema retroazionato é:

- ⊗ globalmente asintoticamente stabile;
- ◯ instabile;
- ◯ non si puó dire nulla;

Disegnare su questo piano di Nyquist la posizione del cerchio critico e della $G(j\omega)$:



34. Funzione descrittiva

Valore della $F(X)$ per $X = 0^+$:

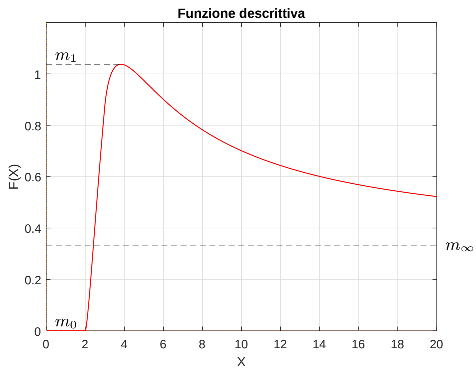
$$m_0 = 0$$

Valore della $F(X)$ per $X = \infty$:

$$m_\infty = \frac{1}{3}$$

Note:

Andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$:



35. Discussione al variare di K

Per $K \neq 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $K\,G_1(s)$ è:

$$K^* = \frac{\bar{K}^*}{K} = \frac{12}{K}$$

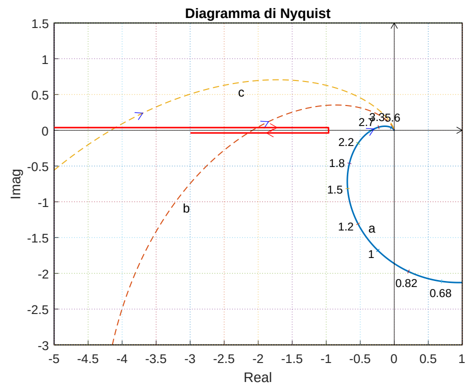
Discussione al variare di K:

a) $K^* > m_1$: l'origine è un punto di lavoro globalmente asintoticamente stabile.

b) $m_\infty < K^* < m_1$: 2 cicli limite, uno stabile (quello uscente) e uno instabile (quello entrante).

c) $0 < K^* < m_\infty$: un ciclo limite instabile.

Rappresentazione grafica delle funzioni $G(j\omega)$ e $-\frac{1}{F(X)}$:



36. Discretizzazione

Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(z) = \left.\frac{(s+1)}{s^2}\right|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{T(1-z^{-1}+T)}{(1-z^{-1})^2}$$

Per $T = 0.2$ si ha:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{0.1(1.1-z^{-1})}{(1-z^{-1})^2} = \frac{0.11-0.1\,z^{-1}}{1-2\,z^{-1}+z^{-2}}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m(k) = 2\,m(k-1) - m(k-2) + 0.11\,e(k) - 0.1\,e(k-1)$$

37. Esercizio opzionale (se previsto)

A. Foglio di Brutta

B. Foglio di Brutta

C. Foglio di Brutta