

Domande a risposta multipla

Si risponda alle seguenti domande a risposta multipla. Almeno una delle risposte è vera. Per ciascuna domanda riportare sul foglio delle risposte le lettere di tutte le risposte che si ritengono vere.

1. Il tempo di salita  $T_s$  della risposta al gradino di un sistema retroazionato è definito come

- A. il tempo necessario per raggiungere il 50% del valore finale
- B. il tempo necessario per raggiungere il 90% del valore finale
- C. il tempo necessario per passare dal 10 al 90% del valore finale**
- D. il tempo necessario perchè l'uscita rimanga entro il  $\pm 5\%$  del valore finale

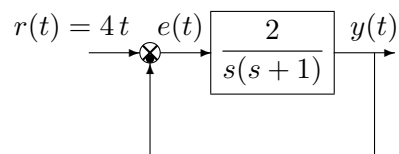
2. La pulsazione di risonanza  $\omega_R$  di un sistema del 2° ordine privo di zeri è:

- A.  $\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2}$
- B.  $\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2}$**
- C.  $\omega_R = \omega_n \delta \sqrt{1 - \delta^2}$
- D.  $\omega_R = \omega_n \delta \sqrt{1 - 2\delta^2}$

3. Sia dato il sistema retroazionato mostrato in figura.

L'errore a regime  $e(\infty)$  della variabile  $e(t)$  quando  $t \rightarrow \infty$  è:

- A.  $e(\infty) = 0$
- B.  $e(\infty) = 2$**
- C.  $e(\infty) = 4$
- D.  $e(\infty) = \infty$

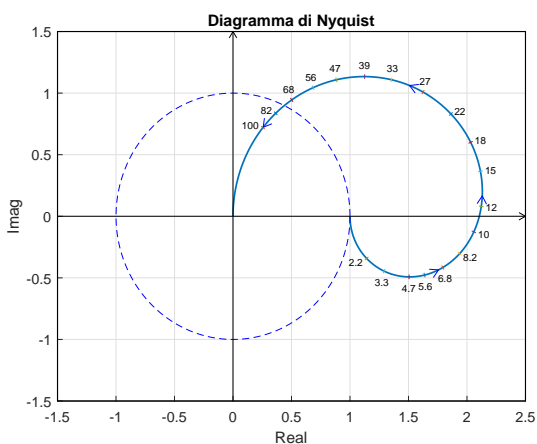


4. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione  $G(s) = \frac{80(3-s)}{(s-8)(s-30)}$ .

Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato  $K G(s)$  è stabile per i seguenti valori di  $K$ :

- A.  $\alpha^* < K < \beta^* < 0$ ;**
- B.  $-\infty < K < \beta^* < 0$ ;
- C.  $-\infty < \alpha^* < K < 0$ ;
- D. nessuno dei precedenti;

dove  $\alpha^*$  e  $\beta^*$  sono opportuni valori costanti.



5. In un sistema del 2° ordine la distanza dei poli dall'origine (a parità di direzione) influisce sui seguenti parametri della risposta al gradino
- tempo di salita**
  - tempo di ritardo**
  - tempo di assestamento**
  - coefficiente di smorzamento
6. La funzione di risposta armonica di un sistema lineare  $G(s)$  può essere determinata “sperimentalmente”
- anche se il sistema è instabile
  - se il sistema  $G(s)$  è a fase minima**
  - se il sistema  $G(s)$  è semplicemente stabile
  - se il sistema  $G(s)$  è asintoticamente stabile**
7. Un ritardo puro  $G(s) = e^{-s\theta}$  posto in retroazione negativa sul regolatore  $\frac{K}{s}$
- è sempre instabile per qualunque valore di  $K > 0$
  - è sempre stabile per qualunque valore di  $K > 0$
  - è instabile per valori di  $K$  sufficientemente elevati**
  - è stabile per valori di  $K$  sufficientemente piccoli**
8. Sia  $Y(X) \sin(\omega t + \varphi(X))$  la fondamentale del segnale periodico  $y(t)$  presente all'uscita della non linearità algebrica  $y(t) = f(x(t))$  in risposta all'ingresso  $x(t) = X \sin(\omega t)$ . La funzione descrittiva  $F(X)$  è definita nel seguente modo:
- $F(X) = \frac{Y(X)}{X} e^{j\varphi(X)}$
  - $F(X) = \frac{Y(X)}{\omega} e^{j\varphi(X)}$
  - $F(X) = \frac{Y(X)}{X} e^{-j\varphi(X)}$
  - $F(X) = \frac{Y(X)}{\omega} e^{-j\varphi(X)}$
9. Sul piano  $z$  i luoghi dei punti a pulsazione naturale  $\omega_n$  costante
- sono circonferenze centrate in  $z = 1$
  - sono circonferenze centrate nell'origine
  - sono tratti di spirali decrescenti verso l'origine
  - nessuna delle precedenti**
10. Sia  $X(z)$  la  $Z$ -trasformata della sequenza  $x(kT)$ . Il teorema del valore finale afferma che:
- $x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} zX(z)$
  - $x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 0} zX(z)$
  - $x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$
  - $x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 0} (1 - z^{-1})X(z)$

---

## Domande dirette

---

*Si risponda alle seguenti domande dirette. Per ciascuna domanda riportare sul foglio delle risposte la corrispondente risposta.*

---

11. Calcolare la trasformata di Laplace  $X(s)$  del seguente segnale temporale  $x(t)$ :

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[2t^2 e^{-5t} + 3 \cos(5t) e^{-2t}] = \boxed{X(s) = \frac{4}{(s+5)^3} + \frac{3(s+2)}{(s+2)^2 + 5^2}}$$

12. Calcolare la trasformata di Laplace inversa  $g(t)$  delle seguente funzione di trasferimento  $G(s)$ :

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[3 + \frac{30}{s(2s+1)(s+3)}\right] = \boxed{3\delta(t) + 10 - 12e^{-0.5t} + 2e^{-3t}}$$

Infatti si ha:

$$G(s) = 3 + \frac{15}{s(s+0.5)(s+3)} = 3 + \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+0.5} + \frac{K_3}{s+3} = \mathcal{L}^{-1}\left[3 + \frac{10}{s} - \frac{12}{s+0.5} + \frac{2}{s+3}\right]$$

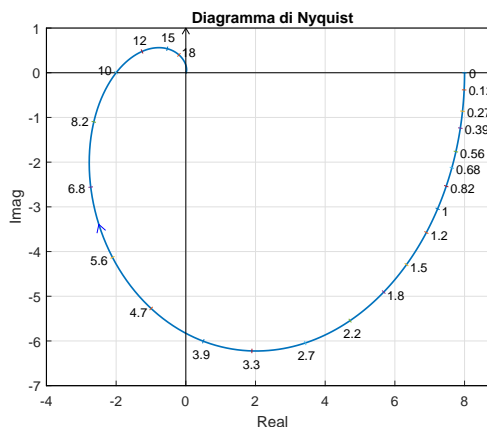
13. In figura é mostrato il diagramma di Nyquist di un sistema lineare  $G(s)$  a fase minima.

Calcolare la risposta a regime  $y(t)$  del sistema  $G(s)$ :

$$\boxed{y(t) \simeq 24 + 8 \sin(10t - 180^\circ)}$$

quando in ingresso è presente il seguente segnale temporale:

$$x(t) = 3 + 4 \sin(10t).$$



14. Scrivere la fase  $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$  della funzione di risposta armonica del seguente sistema  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{(s+2)}{s(3s-1)^2} e^{-4s} \quad \rightarrow \quad \boxed{\varphi(\omega) = \arctan \frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{2} - 2(\pi - \arctan 3\omega) - 4\omega}$$

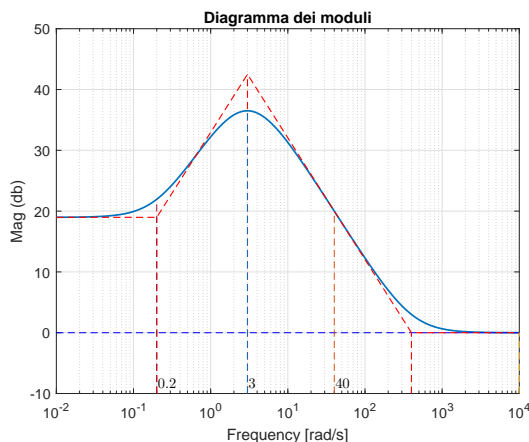
15. Calcolare l'evoluzione libera  $y(t)$  della seguente equazione differenziale a partire dalla condizione iniziale  $y(0) = y_0$ :

$$\dot{y}(t) + a y(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{y(t) = b e^{-at}}$$

16. A fianco è riportato il diagramma di Bode dei moduli di un sistema  $G(s)$  a fase minima.

Utilizzando in modo qualitativo la formula di Bode, calcolare in modo approssimato la fase  $\varphi$  del sistema  $G(s)$  in corrispondenza delle seguenti pulsazioni  $\omega$ :

$\omega_1 = 0.2 \rightarrow \varphi_1 \simeq \frac{\pi}{4}$
$\omega_2 = 3 \rightarrow \varphi_2 \simeq 0$
$\omega_3 = 40 \rightarrow \varphi_3 \simeq -\frac{\pi}{2}$



17. Scrivere la funzione descrittiva  $F(X)$  di un relé ideale di ampiezza  $Y$  sommato ad un elemento lineare di pendenza  $A$ :

$F(X) = \frac{4Y}{\pi X} + A$
-------------------------------

18. Scrivere la funzione di trasferimento  $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$  corrispondente alla seguente equazione alle differenze:

$y_k = -2y_{k-1} - 3y_{k-2} + 4x_{k-1} + 6x_{k-2}$	$\rightarrow$	$G(z) = \frac{4z^{-1} + 6z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}}$
--	---------------	--

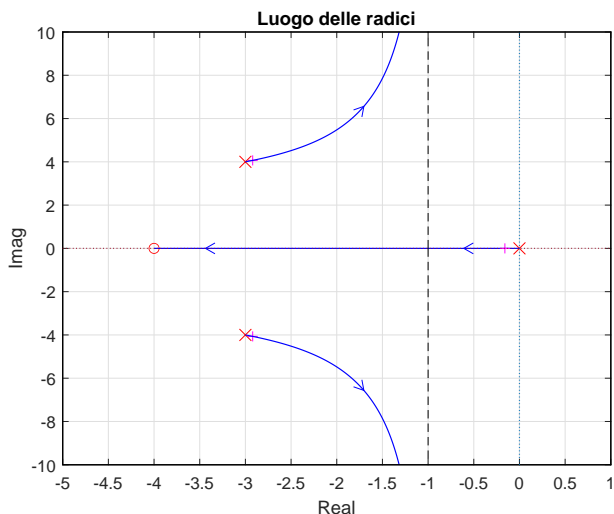
19. Calcolare la  $\mathcal{Z}$ -trasformata  $X(z)$  del seguente segnale tempo continuo  $x(t)$  quando  $t = kT$ :

$x(t) = 1 + 2t$	$\rightarrow$	$X(z) = \frac{z}{(z-1)} + \frac{2Tz}{(z-1)^2}$
-----------------	---------------	--

20. A fianco è riportato il luogo delle radici del sistema  $G(s) = \frac{s+4}{s(s^2+6s+25)}$  al variare del parametro  $K > 0$ .

Calcolare l'ascissa  $\sigma_0$  corrispondente alla condizione di allineamento dei tre poli e il corrispondente valore  $K_0$  del parametro  $K$ :

$\sigma_0 = -2, \quad K_0 = -\frac{1}{G(s)} \Big _{s=\sigma_0} = 17$
--

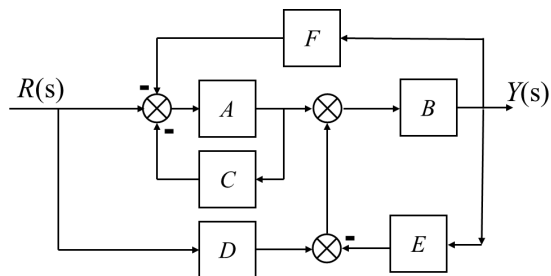


## Esercizi

Si svolgano i seguenti esercizi. La risposta di ciascun esercizio deve essere riportata sul foglio delle risposte nella sezione specificatamente riservata al corrispondente esercizio.

21. **(Mason)** Relativamente allo schema a blocchi mostrato in figura, calcolare la funzione di trasferimento  $G_1(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ :

$$G_1(s) = \frac{AB + DB(1 + AC)}{1 + AC + BE + ABF + ACBE}$$



22. **(Risposta al gradino)**

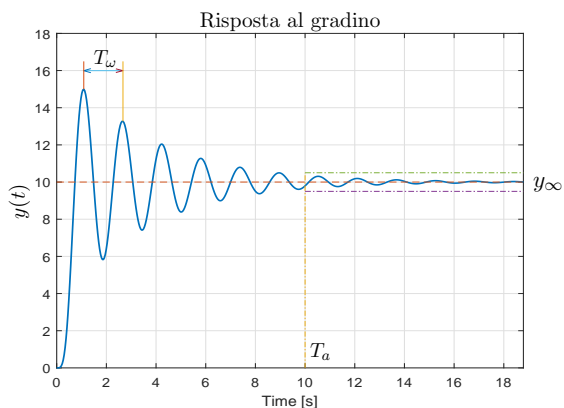
Disegnare l'andamento qualitativo  $y_1(t)$  della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{20(3 + 0.2s)(s^2 + 20s + 80^2)}{(s + 3)(0.2s + 8)(s^2 + 8s + 100)(s^2 + 0.6s + 16)}$$

Calcolare inoltre:

- il valore a regime  $y_\infty$  della risposta al gradino per  $t \rightarrow \infty$ ;
- il tempo di assestamento  $T_a$  della risposta al gradino  $y_1(t)$ ;
- il periodo  $T_\omega$  dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale  $y_1(t)$ ;

$$y_\infty = 10, \quad T_a \simeq \frac{3}{0.3} = 10 \text{ s}, \quad T_\omega \simeq \frac{2\pi}{4} \simeq 1.58.$$

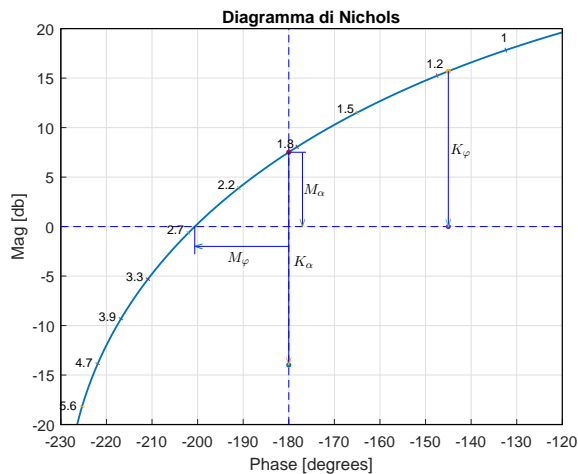


23. **(Margini di stabilità)** Sia data la funzione di risposta armonica, riportata in figura, di un sistema  $G(s)$  a fase minima. Nei limiti della precisione consentita dal grafico, calcolare:

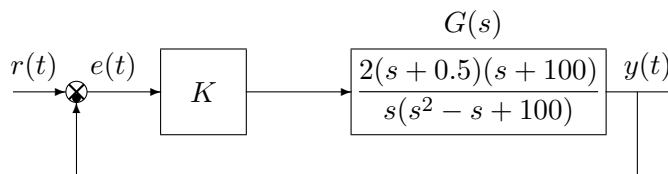
- il margine di ampiezza  $M_\alpha$  del sistema;
- il margine di fase  $M_\varphi$  del sistema;
- il guadagno  $K_\varphi$  per cui il sistema  $K_\varphi G(s)$  ha un margine di fase  $M_\varphi = 35$ ;
- il guadagno  $K_\alpha$  per cui il sistema  $K_\alpha G(s)$  ha un margine di ampiezza  $M_\alpha = 5$ ;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

- a)  $M_a = -7.51 \text{ db} = 0.42$
- b)  $M_\varphi = -20.62$
- c)  $K_\varphi = -15.6 \text{ db} = 0.164$
- d)  $K_\alpha = -21.49 \text{ db} = 0.0842$



24. (Criterio di Routh) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



Determinare per quali valori di  $K$  il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{2K(s+100)(s+0.5)}{s(s^2-s+100)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + (2K-1)s^2 + (100+201K)s + 100K = 0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & & 1 & 100 + 201K \\ 2 & & 2K - 1 & 100K \\ 1 & (2K - 1)(100 + 201K) - 100K & & \\ 0 & & 100K & \end{array}$$

Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 1, \quad 402K^2 - 101K - 100 > 0, \quad K > 0.$$

In base alla regola dei segni dei coefficienti di una equazione di secondo grado, è possibile affermare che le due soluzioni  $K_1$  e  $K_2$  dell'equazione di secondo grado della riga 1 sono reali e di segni opposti:  $K_1 < 0$  e  $K_2 > 0$ . Inoltre, la corrispondente disequazione è positiva all'esterno di tali valori. Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > K_2 = \frac{101 + \sqrt{101^2 + 400 \cdot 402}}{804} = 0.64 = K^*.$$

La pulsazione  $\omega^*$  corrispondente al valore limite  $K^*$  è:

$$\omega^* = \sqrt{100 + 201K^*} = 15.12.$$

25. **(Diagrammi asintotici di Bode)** Vedi (24). Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione  $G(s)$ .

Soluzione.

I diagrammi “asintotici” di Bode della funzione  $G_d(s)$  sono mostrati in Fig. 1. I diagrammi di Bode

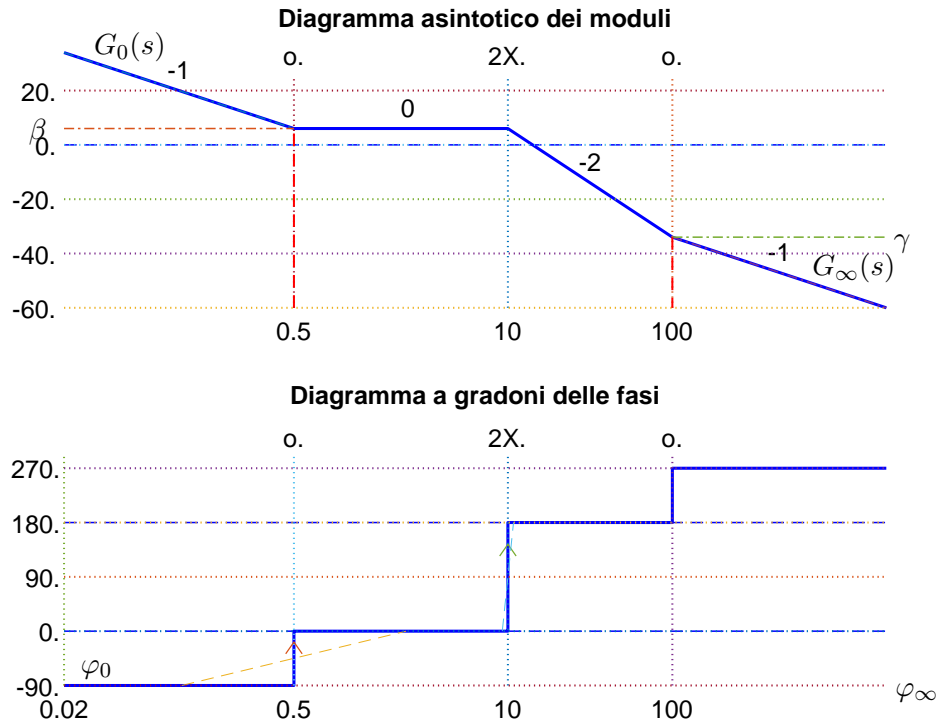


Figura 1: Diagrammi asintotici di Bode della funzione  $G_d(s)$ .

delle ampiezze e delle fasi della funzione  $G(s)$  sono mostrati in Fig. 2. Le funzioni approssimanti  $G_0(s)$  e  $G_\infty(s)$  per  $\omega \rightarrow 0$  ed  $\omega \rightarrow \infty$  sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{1}{s}, \quad G_\infty(s) = \frac{2}{s}.$$

Le corrispondenti fasi  $\varphi_0$  e  $\varphi_\infty$  hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2} \equiv \frac{3\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze, il guadagno  $\beta$  in corrispondenza della pulsazione  $\omega = 0.5$  e il guadagno  $\gamma$  in corrispondenza della pulsazione  $\omega = 100$  sono:

$$\beta = 2 = 6 \text{ db}, \quad \gamma = \frac{2}{100} = -34 \text{ db}.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli instabili è  $\delta = 0.05$ .

26. **(Diagramma di Nyquist)** Vedi (24). Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” della funzione  $G(s)$ . Calcolare esattamente la posizione  $\sigma_a$  di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni  $\sigma_i^*$  con l’asse reale negativo e i corrispondenti valori delle pulsazioni  $\omega_i^*$ .

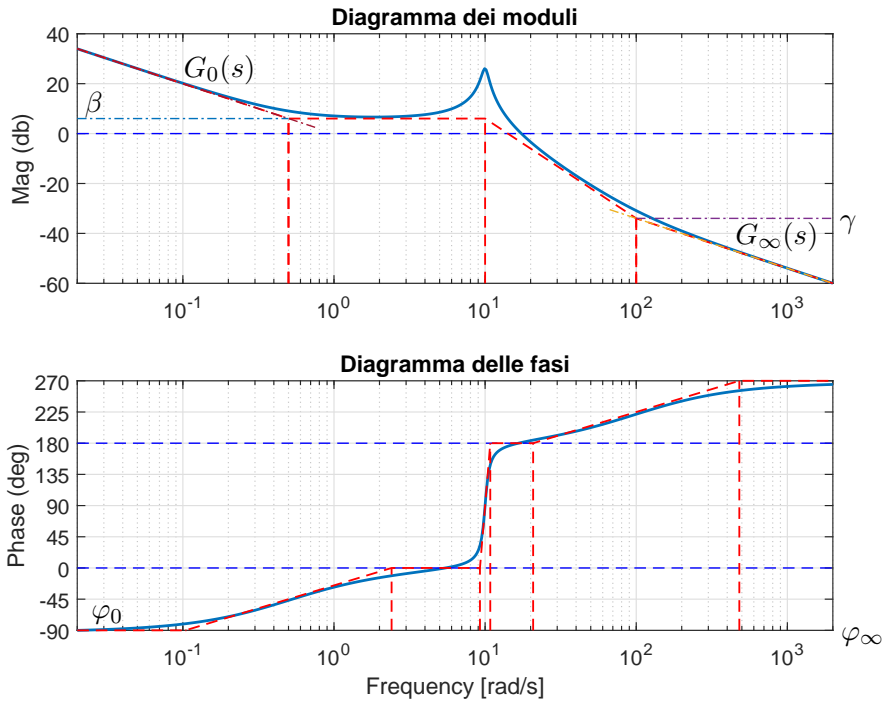


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione  $G(s)$ .

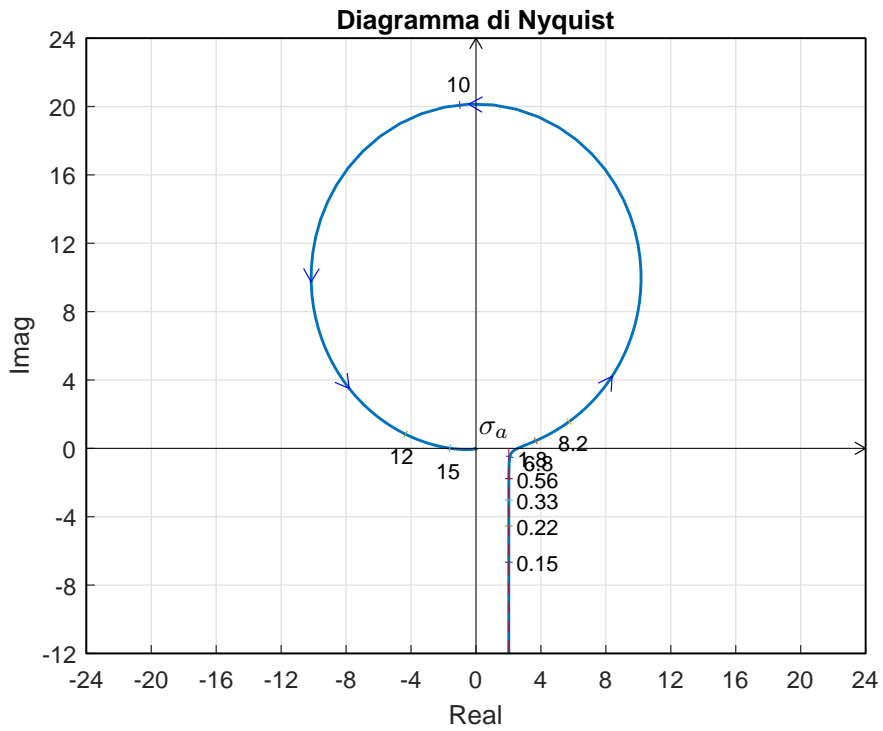


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione  $G(s)$  per  $\omega \in [0, \infty]$ .

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione  $G(s)$  per  $\omega \in [0, \infty]$  è mostrato in Fig. 3.

La fase iniziale del sistema è  $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$ . Per  $\omega \rightarrow 0^+$  il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = 2 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = 2.02 > 0.$$

Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale:

$$\sigma_a = K\Delta\tau = 1 \cdot 2.02 = 2.02.$$

Il seguente parametro  $\Delta_p$ :

$$\Delta_p = -0.5 - 100 - 1 = -101.5 < 0$$

indica che per  $\omega \rightarrow \infty$  la funzione  $G(j\omega)$  arriva in ritardo alla fase finale  $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ . La variazione di fase  $\Delta\varphi = 2\pi$  che il sistema subisce per  $\omega \in ]0, \infty[$  indica che il vettore  $G(j\omega)$  ruota di  $2\pi$  in senso antiorario per raggiungere la fase finale  $\varphi_\infty = \frac{3\pi}{2}$ . Esistono due intersezione con l'asse reale. L'intersezione con l'asse reale negativo avviene nel punto:

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{K^*} = -1.562.$$

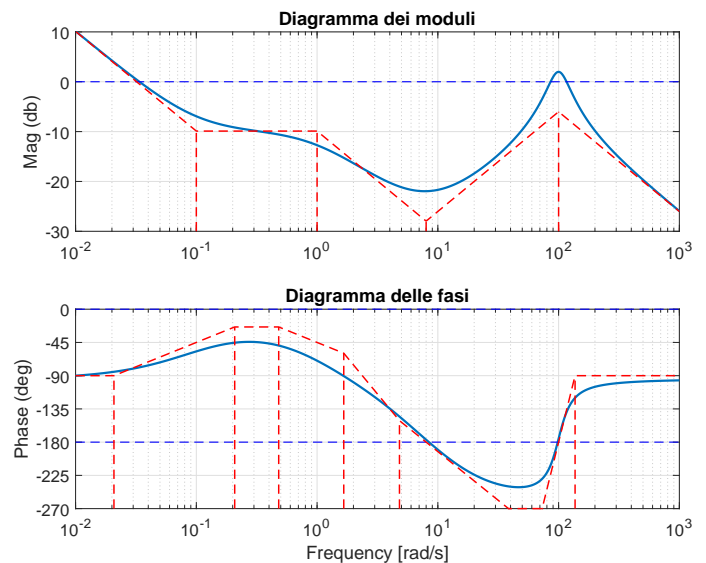
in corrispondente della pulsazione  $\omega_1^* = 15.12$ .

## 27. (Stima di una funzione $G(s)$ )

Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione  $G(s)$  mostrati in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione  $G(s)$ . Stimare in modo approssimato eventuali valori di  $\delta$ .

$$G(s) = \frac{50(s + 0.1)(s - 8)^2}{s(s + 1)(s^2 - 40s + 100^2)}.$$



Soluzione:

La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{50(s + 0.1)(s - 8)^2}{s(s + 1)(s^2 - 40s + 100^2)}.$$

Il valore  $K = 50$  si determina, per esempio, calcolando il modulo  $\beta$  dell'approssimante  $G_0(s)$  in corrispondenza della pulsazione  $\omega = 0.1$ :

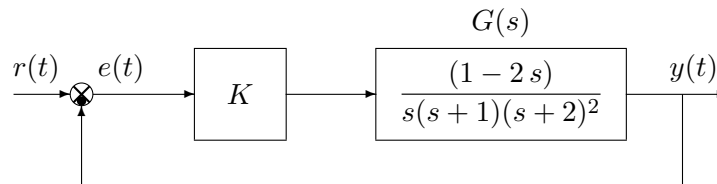
$$|G_0(s)|_{s=0.1j} = \left| \frac{6.4K}{-100^2 s} \right|_{s=0.1j} = \frac{6.4K}{1000} = \beta \simeq -10 \text{ db} \simeq 0.3162 \quad \rightarrow \quad K \simeq 50.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati stabili è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq \frac{1}{5} = 0.2.$$

La distanza  $M_{\omega_n} \simeq 8 \text{ db} \simeq 2.5$  si legge dal diagramma di Bode dei moduli.

28. **(Luogo delle radici)** Sia dato il seguente sistema retroazionato:



tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro  $K > 0$ . Determinare esattamente la posizione degli asintoti. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione “solo in modo qualitativo”.

*Sol.* L'equazione caratteristica del sistema retroazionato diventa:

$$1 + K \frac{(1-2s)}{s(s+1)(s+2)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + K_1 \frac{(s-0.5)}{s(s+1)(s+2)^2} = 0$$

dove  $K_1 = -2K$ . L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema  $G_1(s)$  al variare di  $K > 0$  è mostrato in Fig. 4. Sono presenti tre asintoti. Il centro degli asintoti  $\sigma_a$  è il seguente:

$$\sigma_a = \frac{1}{3} \left( -5 - \frac{1}{2} \right) = -\frac{11}{6} = -1.8333$$

29. **(Contorno delle radici)** Sia data la seguente equazione caratteristica di un sistema retroazionato:

$$1 + \frac{(s-5)}{(s+4)(\alpha s^2 + 2)} = 0$$

Tracciare qualitativamente il contorno delle radici dell'equazione caratteristica al variare del parametro  $\alpha > 0$ . Il calcolo di  $\alpha^*$  non è necessario. Determinare la posizione dei punti di diramazione “solo in modo qualitativo”.

*Sol.* L'equazione caratteristica può essere riscritta nel seguente modo  $1 + \alpha G_2(s) = 0$ :

$$1 + \frac{(s-5)}{(s+4)(\alpha s^2 + 2)} = 0 \quad \rightarrow \quad (s+4)(\alpha s^2 + 2) + (s-5) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{\alpha s^2(s+4)}{3(s+1)} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro  $\alpha > 0$  è mostrato in Fig. 5.

Il contorno delle radici ha due asintoti. Il centro degli asintoti  $\sigma_a$  è il seguente:

$$\sigma_a = \frac{1}{-2} (-1 + 4) = -1.5$$

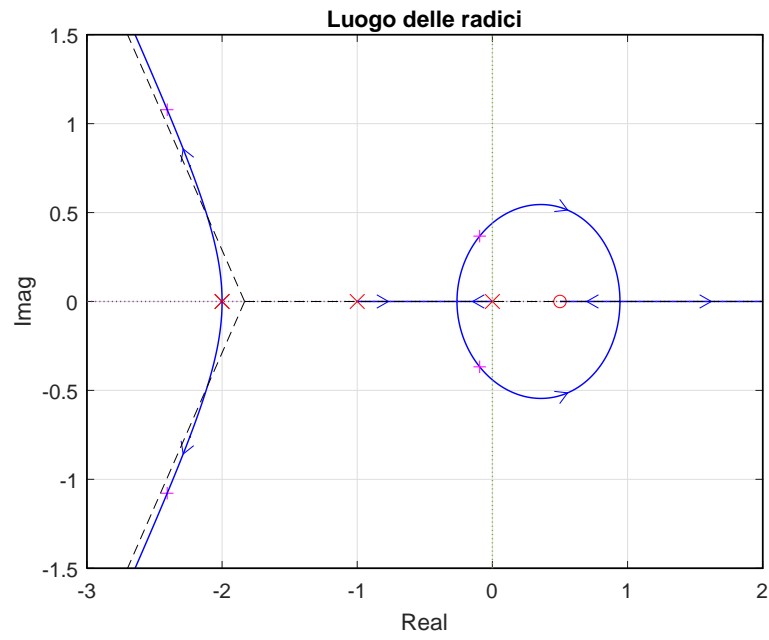


Figura 4: Luogo delle radici del sistema  $G_1(s)$  al variare di  $K > 0$ .

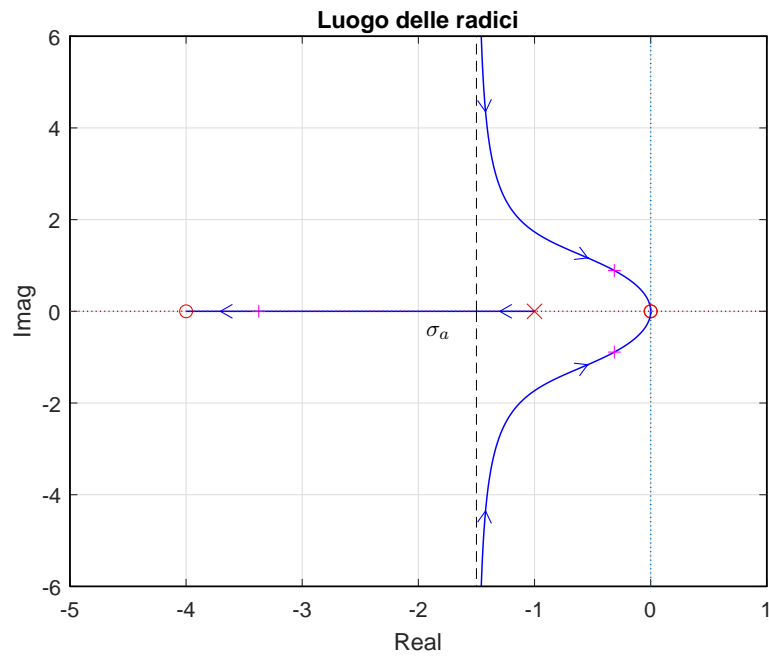


Figura 5: Contorno delle radici del sistema  $G_2(s)$  al variare del parametro  $\alpha > 0$ .

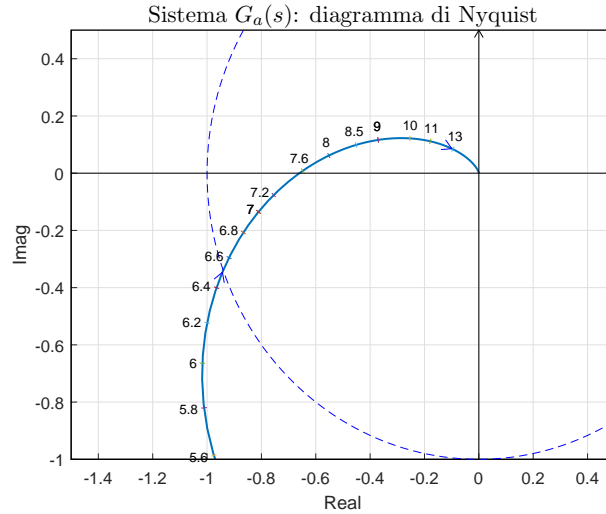
### 30. (Rete correttrice: Nyquist)

Sia data la funzione di risposta armonica del sistema  $G_a(s)$  riportata a fianco.

Progettare una rete correttrice

$$C_a(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

in modo da garantire che la funzione di risposta armonica del sistema compensato  $C_a(s)G_a(s)$  abbia un margine di fase  $M_\varphi = 45^\circ$ . Scegliere il valore della pulsazione  $\omega$  che si ritiene più opportuno.



*Sol.* Il modulo e la fase del punto  $B$  corrispondente alla specifica  $M_\varphi = 45^\circ$  sono i seguenti:

$$M_B = 1, \quad \varphi_B = 225^\circ.$$

Un punto  $A$  compatibile con la specifica di progetto richiesta è quello corrispondente alla pulsazione  $\omega = 8.0$ :

$$M_A = 0.555, \quad \varphi_A = 173.6^\circ \quad \rightarrow \quad M = \frac{M_B}{M_A} = 1.8, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 51.4^\circ$$

La rete correttrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi} = 0.1882, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi} = 0.011 \quad \rightarrow \quad C_a(s) = \frac{1 + 0.1882 s}{1 + 0.011 s}$$

Il diagramma di Nyquist delle funzioni  $G_a(s)$  e  $C_a(s)G_a(s)$  sono mostrati in Fig. 6.

Sintesi della rete correttrice  $C_1(s)$  con altri valori della pulsazione  $\omega_A$ :

$\omega_A = [$	7.2	7.6	8	8.5	9	10]
$M_A = [$	0.7586	0.6476	0.5554	0.4622	0.3883	0.2815]
$\varphi_A = [$	-174.2	179.2	173.6	167.6	162.6	154.4]
$M = [$	1.318	1.544	1.8	2.164	2.575	3.553]
$\varphi = [$	39.22	45.8	51.4	57.4	62.4	70.6]
$\tau_1 = [$	0.1194	0.1555	0.1882	0.2269	0.2648	0.3414]
$\tau_2 = [$	0.0035	0.0091	0.011	0.0107	0.0093	0.0053]

### 31. (Rete correttrice: Nichols)

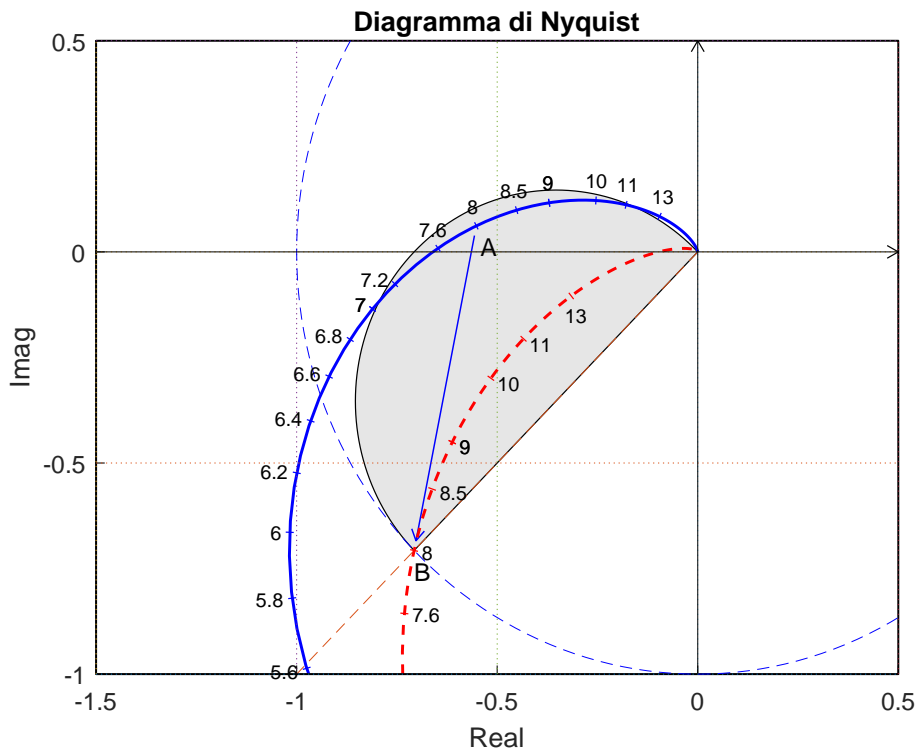


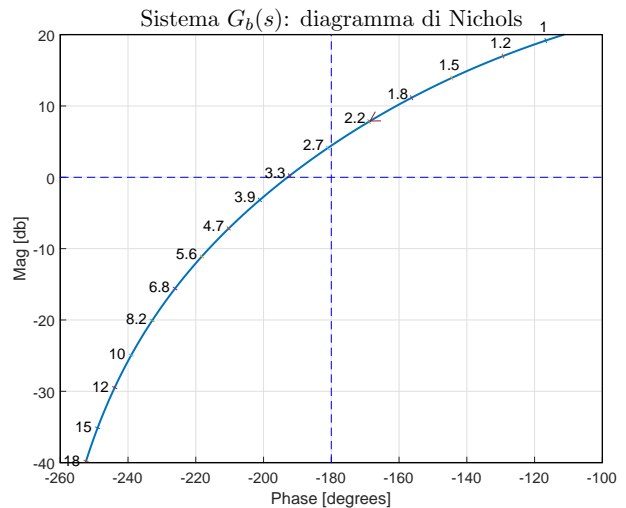
Figura 6: Diagrammi di Nyquist delle funzioni  $G_a(s)$  e  $C_a(s)G_a(s)$ .

Sia data la funzione di risposta armonica del sistema  $G_b(s)$  riportata a fianco.

Progettare una rete **ritardatrice**

$$C_b(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

in modo da garantire che la funzione di risposta armonica del sistema compensato passi per il punto  $B = (-160^\circ, -10 \text{ db})$ . Scegliere il valore della pulsazione  $\omega$  che si ritiene più opportuno.



*Sol.* La posizione del punto  $B$  coincide con la specifica di progetto  $B = M_B e^{j\varphi_B}$ :  $M_B = -10 \text{ db} = 0.3162$  e  $\varphi_B = -160^\circ$ . La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 7.

Il punto  $A = G_b(j\omega_A)$  scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione  $\omega_A = 1.5$ :

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 4.976, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -144.4^\circ.$$

Sostituendo i valori di  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega$  all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri

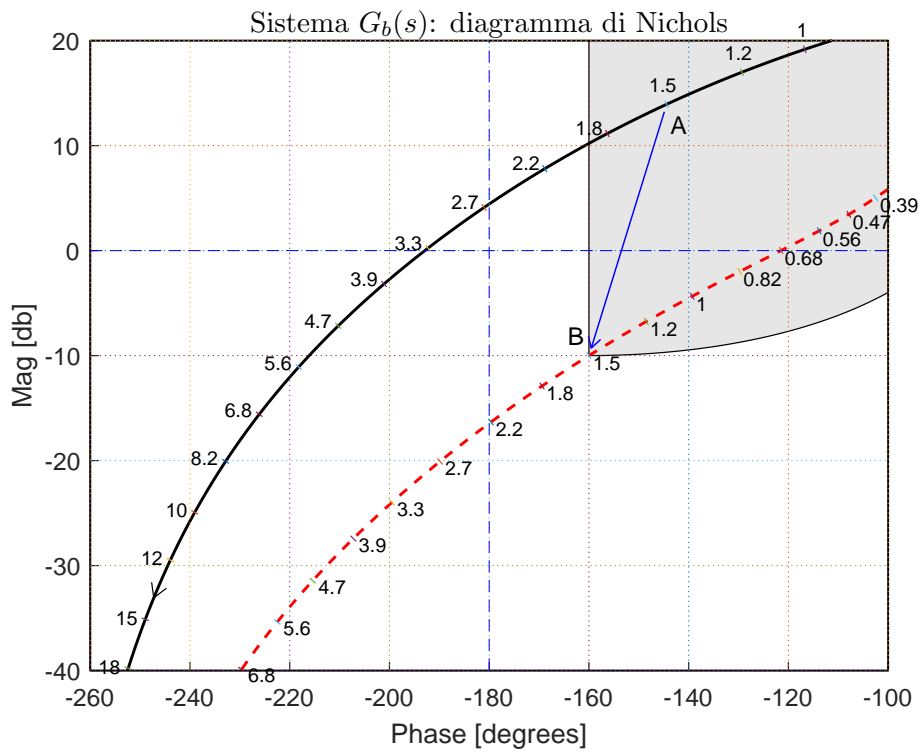


Figura 7: Diagrammi di Nyquist delle funzioni  $G_b(s)$  e  $C_b(s)G_b(s)$ .

$\tau_1 = 2.232$  e  $\tau_2 = 36.65$  della rete correttiva  $C_1(s)$ :

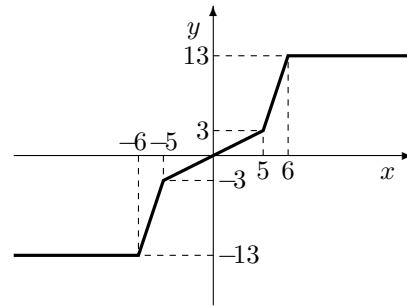
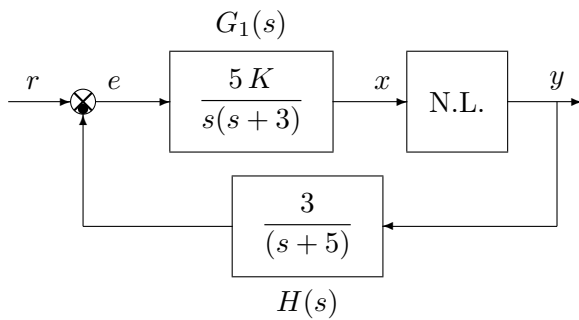
$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.0635, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -15.6^\circ \quad \rightarrow \quad C_b(s) = \frac{(1 + 2.232s)}{(1 + 36.65s)}.$$

I diagrammi di Nichols delle funzioni  $G_b(s)$  e  $C_b(s)G_b(s)$  sono mostrati in Fig. 7.

Sintesi della rete correttiva  $C_b(s)$  con altri valori della pulsazione  $\omega_A$ :

$$\begin{aligned} \omega_A &= [1 \quad 1.2 \quad 1.5 \quad 1.8] \\ M_A &= [9.086 \quad 7.073 \quad 4.976 \quad 3.61] \\ \varphi_A &= [-116.7 \quad -129.3 \quad -144.4 \quad -156.3] \\ M &= [0.0348 \quad 0.0447 \quad 0.0635 \quad 0.0875] \\ \varphi &= [-43.28 \quad -30.68 \quad -15.59 \quad -3.697] \\ \tau_1 &= [1.011 \quad 1.332 \quad 2.232 \quad 7.843] \\ \tau_2 &= [40.85 \quad 35.13 \quad 36.65 \quad 89.77] \end{aligned}$$

32. **(Punto di lavoro)** Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:



Posto  $K = 1$ , determinare per quale valore  $r^*$  del riferimento  $r$  il punto di lavoro del sistema retroazionato coincide con il punto  $(x_0, y_0) = (5, 3)$ .

*Soluzione.* Il guadagno statico del sistema  $G_1(s)$  è infinito, per cui la retta di carico è orizzontale:

$$y = \frac{r}{K_2 K_3} = \frac{5r}{3} \quad \text{dove} \quad K_2 = 1, \quad K_3 = \frac{3}{5}$$

Il valore  $r^*$  si ottiene ponendo  $y = 3$  nella retta di carico:

$$3 = \frac{5r^*}{3} \quad \rightarrow \quad r^* = \frac{9}{5} = 1.8$$

33. **(Criterio del cerchio)** Vedi (32). Posto  $K = 1$ ,  $r = r^*$  ed utilizzando il criterio del cerchio, dire se il sistema retroazionato è stabile nell'intorno del punto di lavoro  $(x_0, y_0) = (5, 3)$ .

*Soluzione.* Per  $r = r^*$  il punto di lavoro coincide con il punto  $(x_0, y_0) = (5, 3)$ . Le pendenze delle 2 rette che passano nel punto di lavoro e che racchiudono a settore tutta la non linearità sono:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 10.$$

In questo caso il cerchio critico degenera in un semipiano delimitato dalla retta verticale

$$x = -\frac{1}{\beta} = -\frac{1}{10}$$

Per  $K = 1$ , il guadagno d'anello del sistema è:

$$G(s) = G_1(s) H(s) = \frac{15}{s(s+5)(s+3)}$$

Il margine di ampiezza  $K^*$  e la pulsazione  $\omega^*$  della funzione  $G(s)$  sono i seguenti:

$$K^* = \frac{3 \cdot 5(3+5)}{15} = 8, \quad \omega^* = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15} = 3.873.$$

Il diagramma di Nyquist della funzione  $G(s)$  interseca sicuramente il cerchio critico per cui non si può dire nulla sulla stabilità del punto  $(x_0, y_0) = (5, 3)$  perchè il criterio del cerchio è un criterio solo sufficiente. In Fig. 8 è mostrato il diagramma di Nyquist della funzione  $G(s)$  sovrapposto al cerchio critico.

34. **(Funzione descrittiva)** Vedi (32). Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva  $F(X)$  della non linearità N.L. assegnata, prendendo l'origine come punto di lavoro. Utilizzare delle variabili (per esempio:  $m_1, m_2, \dots$ ) per rappresentare gli eventuali valori non noti minimi e massimi della funzione  $F(X)$ .

*Soluzione.* L'andamento qualitativo della funzione descrittiva  $F(X)$  è mostrato in Fig. 9. Indichiamo: a) con  $m_0 = 0.6$  il valore iniziale della funzione  $F(X)$  per  $X < 5$ ; b) con  $m_1 \simeq 1.62$  il valore massimo della funzione  $F(X)$  per  $X \simeq 7.3$ ; c) con  $m_2 = 0$  il valore finale della funzione  $F(X)$  per  $X \rightarrow \infty$ .

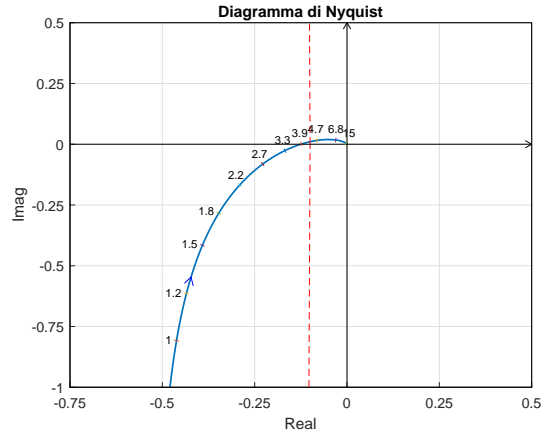
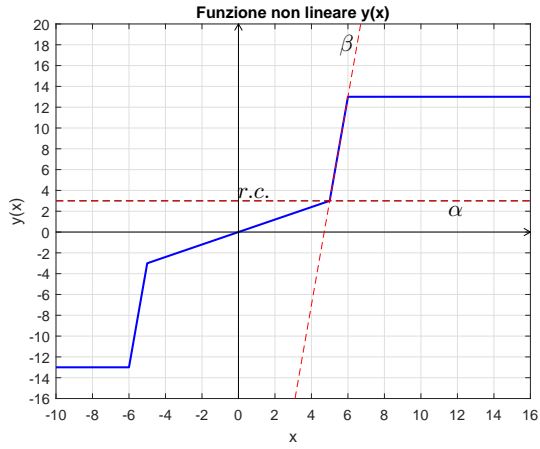


Figura 8: Diagramma di Nyquist della funzione  $G(s)$  e cerchio critico.

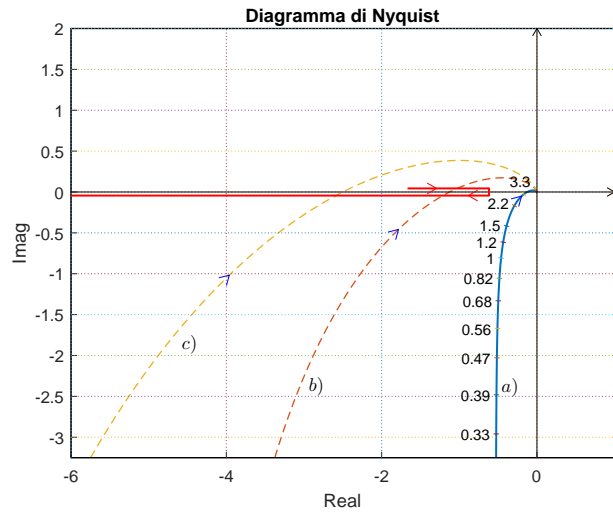
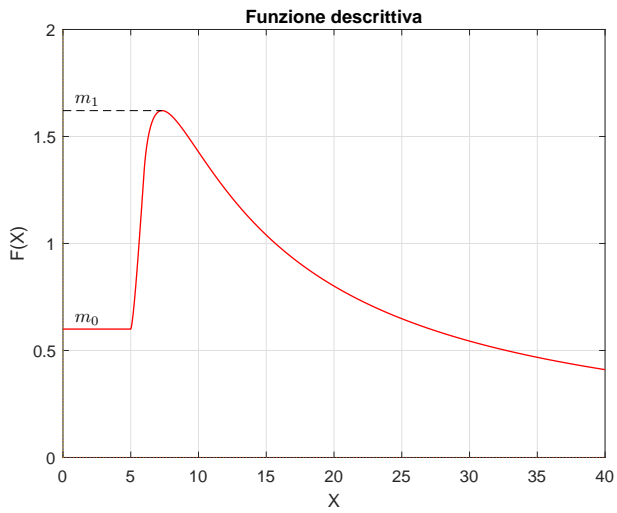


Figura 9: Andamento della funzione descrittiva  $F(X)$ .

35. **(Discussione al variare di  $K$ )** Vedi (32). Discutere “qualitativamente” (anche in funzione dei parametri  $m_1, m_2, \dots$ ) l’esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno  $K > 0$ .

*Soluzione. Sol.* Per  $K = 1$ , il margine di ampiezza  $K^*$  del sistema  $G(s)$  è  $K^* = 8$ . Per  $K \neq 1$ , il margine di ampiezza  $K^*$  del sistema  $K G_1(s)$  è:

$$K^* = \frac{\bar{K}^*}{K} = \frac{8}{K}$$

Al variare di  $K$  si hanno quindi queste 3 possibili soluzioni:

- 1)  $K^* > m_1$ : la funzione  $-1/F(X)$  è tutta esterna al diagramma completo della funzione  $G(s)$  per cui non vi sono cicli limite e l’origine è un punto di lavoro globalmente asintoticamente stabile.
- 2)  $m_0 < K^* < m_1$ : il diagramma di Nyquist della  $G(s)$  interseca la funzione  $-1/F(X)$  in 2 punti a cui corrispondono 2 cicli limite, uno stabile (quello uscente) e uno instabile (quello entrante).
- 3)  $K^* < m_0$ : il diagramma di Nyquist della  $G(s)$  interseca la funzione  $-1/F(X)$  in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile.

36. **(Discretizzazione)** Utilizzando il metodo della corrispondenza poli-zeri, discretizzare la seguente rete correttiva:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{2(s+3)}{s}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento  $T = 0.1$  e si imponga l’uguaglianza dei guadagni alle alte frequenze.

*Sol.* Utilizzando il metodo della corrispondenza poli-zeri si ottiene:

$$D(z) = K \frac{(1 - e^{-3T} z^{-1})}{(1 - z^{-1})}$$

Il valore di  $K$  si determina imponendo l’uguaglianza dei guadagni alle basse frequenze:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} D(s) = \lim_{z \rightarrow -1} D(z) \quad \rightarrow \quad 2 = K \frac{(1 + e^{-3T})}{2} \quad \rightarrow \quad K = \frac{4}{(1 + e^{-3T})} = 2.2978$$

Sostituendo in  $D(z)$  si ottiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = 2.2978 \frac{1 - 0.7408z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{2.2978 - 1.7023z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m_k = m_{k-1} + 2.2978 e_k - 1.7023 e_{k-1}.$$