

Firma:

Esame scritto di Controlli Automatici

Foglio delle risposte. Data del compito: 10 giugno 2021

Domande a risposta multipla. Per ciascun domanda riportare nella seguente tabella le lettere di tutte le risposte che si ritengono vere.

1) C	2) B	3) B	4) A	5) A B C
6) B D	7) C D	8) A	9) D	10) C

Domande dirette. Per ciascuna domanda riportare nella seguente tabella la corrispondente risposta.

11) $X(s) = \frac{4}{(s+5)^3} + \frac{3(s+2)}{(s+2)^2 + 5^2}$	12) $g(t) = 3\delta(t) + 10 - 12e^{-0.5t} + 2e^{-3t}$
13) $y(t) \simeq 24 + 8\sin(10t - 180^\circ)$	14) $\varphi(\omega) = \arctan \frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{2} - 2(\pi - \arctan 3\omega) - 4\omega$
15) $y(t) = be^{-at}$	16) $\varphi_1 \simeq \frac{\pi}{4}, \quad \varphi_2 \simeq 0, \quad \varphi_3 \simeq -\frac{\pi}{2}$
17) $F(X) = \frac{4Y}{\pi X} + A$	18) $G(s) = \frac{4z^{-1} + 6z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}}$
19) $X(z) = \frac{z}{(z-1)} + \frac{2Tz}{(z-1)^2}$	20) $\sigma_0 = -2, \quad K_0 = -\left. \frac{1}{G(s)} \right _{s=\sigma_0} = 17$

Esercizi. Per ciascun esercizio riportare negli spazi indicati i risultati finali e principali passaggi necessari per ottenerli. Si raccomanda di scrivere in maniera chiara.

21. Mason	$G_1(s) = \frac{AB + DB(1 + AC)}{1 + AC + BE + ABF + ACBE}$
22. Risposta al gradino	<p>a) Il valore a regime:</p> $y_\infty = 10,$ <p>b) Il tempo di assestamento:</p> $T_a \simeq \frac{3}{0.3} = 10 \text{ s},$ <p>c) Il periodo dell'eventuale oscillazione:</p> $T_\omega \simeq \frac{2\pi}{4} \simeq 1.58.$

23. Margini

$$a) M_\alpha = -7.51 \text{ db} = 0.42 \quad b) M_\varphi = -20.62^\circ \quad c) K_\varphi = -15.6 \text{ db} = 0.164 \quad d) K_\alpha = -21.49 \text{ db} = 0.0842$$

24. Criterio di Routh

Equazione caratteristica del sistema retroazionato:

$$1 + \frac{2K(s+100)(s+0.5)}{s(s^2-s+100)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + (2K-1)s^2 + (100+201K)s + 100K = 0.$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 100+201K \\ 2 & 2K-1 & 100K \\ 1 & (2K-1)(100+201K) - 100K & \\ 0 & 100K & \end{array}$$

Calcoli: Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 1, \quad 402K^2 - 101K - 100 > 0, \quad K > 0.$$

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > K_2 = \frac{101 + \sqrt{101^2 + 400 \cdot 402}}{804} = 0.64 = K^*.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{100 + 201K^*} = 15.12.$$

25. Diagrammi asintotici di Bode

La funzione approssimante $G_0(s)$, la fase φ_0 e il modulo M_0 :

$$G_0(s) = \frac{1}{s} = \frac{K_0}{s}, \quad \varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad M_0 = \infty$$

La funzione approssimante $G_\infty(s)$, fase φ_∞ e modulo M_∞ :

$$G_\infty(s) = \frac{2}{s}. \quad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2} \equiv \frac{3\pi}{2}, \quad M_\infty = 0$$

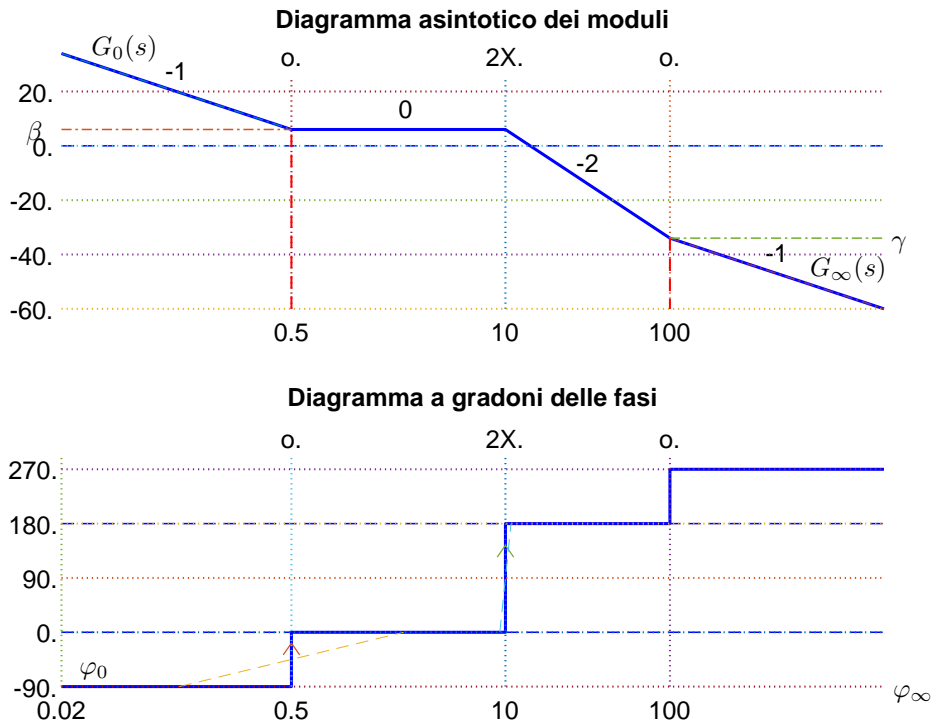
Guadagno β in corrispondenza della pulsazione ω_0 dove si ha il primo cambio di pendenza:

$$\omega_0 = 0.5, \quad \beta = 2 = 6 \text{ db},$$

Guadagno γ in corrispondenza della pulsazione ω_∞ dove si ha l'ultimo cambio di pendenza:

$$\omega_\infty = 100, \quad \gamma = \frac{2}{100} = -34 \text{ db}.$$

Dopo aver indicato i valori degli assi, riportare i diagrammi asintotici di Bode delle fasi e delle ampiezze.



25. Diagrammi asintotici di Bode (scale logaritmiche)

26. Diagramma di Nyquist

Fase iniziale φ_0 , modulo iniziale M_0 e parametro Δ_τ :

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad M_0 = \infty, \quad \Delta\tau = 2 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = 2.02 > 0$$

Fase finale φ_∞ , modulo finale M_∞ e parametro Δ_p :

$$\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}, \quad M_\infty = 0, \quad \Delta_p = -0.5 - 100 - 1 = -101.5 < 0$$

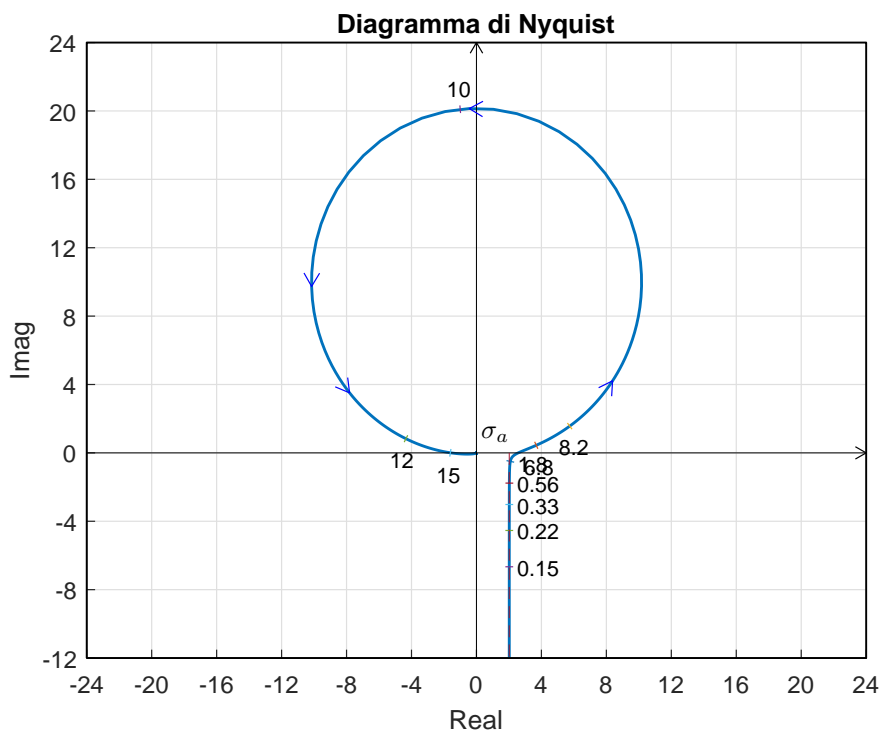
Indicare se nel diagramma di Nyquist é presente un asintoto verticale: Si , No .

Se si, fornire la posizione dell'asintoto verticale: $\sigma_a = K\Delta_\tau = 1 \cdot 2.02 = 2.02$

Variazione di fase $\Delta\varphi$ per $\omega \in]0, \infty[$: $\Delta\varphi = 2\pi$

Eventuale intersezione con il semiasse reale: $\sigma_1^* = -\frac{1}{K^*} = -1.562$.

Tracciamento qualitativo del diagramma di Nyquist completo:



27. Stima di una funzione $G(s)$

Funzione di trasferimento del sistema:

$$G(s) = \frac{50(s + 0.1)(s - 8)^2}{s(s + 1)(s^2 - 40s + 100^2)}$$

Il valore $K = 50$ si determina, per esempio, calcolando il modulo β dell'approssimante $G_0(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.1$:

$$|G_0(s)|_{s=0.1j} = \left| \frac{6.4K}{-100^2 s} \right|_{s=0.1j} = \frac{6.4K}{1000} = \beta \simeq -10 \text{ db} \simeq 0.3162 \quad \rightarrow \quad K \simeq 50.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati stabili è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq \frac{1}{5} = 0.2.$$

28. Luogo delle Radici

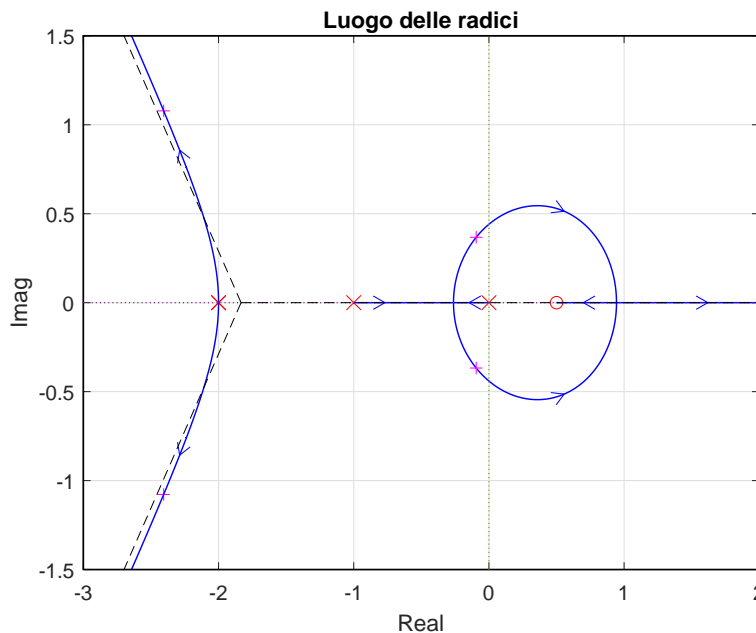
Equazione caratteristica del sistema retroazionato:

$$1 + K \frac{(1 - 2s)}{s(s+1)(s+2)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + K_1 \frac{(s - 0.5)}{s(s+1)(s+2)^2} = 0$$

dove $K_1 = -2K$. Numeri r degli asintoti e posizione σ_a del centro degli asintoti (solo se $r \geq 2$):

$$r = 3 \qquad \sigma_a = \frac{1}{3} \left(-5 - \frac{1}{2} \right) = -\frac{11}{6} = -1.8333$$

Tracciamento qualitativo del luogo delle radici per $K > 0$:



29. Contorno delle Radici

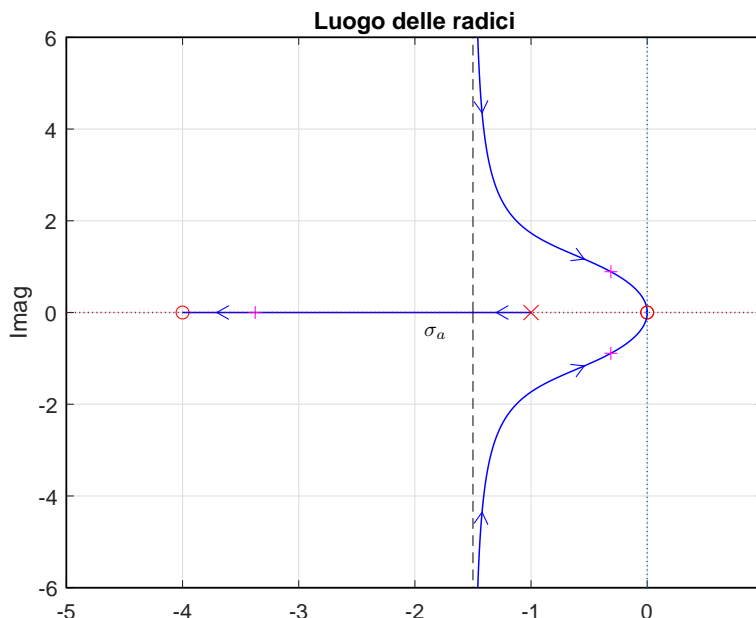
Equazione caratteristica del sistema dinamico assegnato posto nella forma $1 + \alpha G_2(s)$:

$$1 + \frac{(s - 5)}{(s + 4)(\alpha s^2 + 2)} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{\alpha s^2(s + 4)}{3(s + 1)} = 0$$

Funzione $G_2(s)$ fattorizzata, grado relativo r e posizione σ_a del centro degli asintoti (se $|r| > 1$):

$$G_2(s) = \frac{s^2(s + 4)}{3(s + 1)} \qquad r = -2 \qquad \sigma_a = \frac{1}{-2} (-1 + 4) = -1.5$$

Tracciamento qualitativo del contorno delle radici della funzione $G_2(s)$ per $\alpha > 0$:



30. Rete correttrice: Nyquist

Modulo e fase del punto B:

$$M_B = 1 \quad \varphi_B = 225^\circ$$

Pulsazione ω_A del punto A:

$$\omega_A = 8$$

Modulo e fase del punto A:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.555, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)]$$

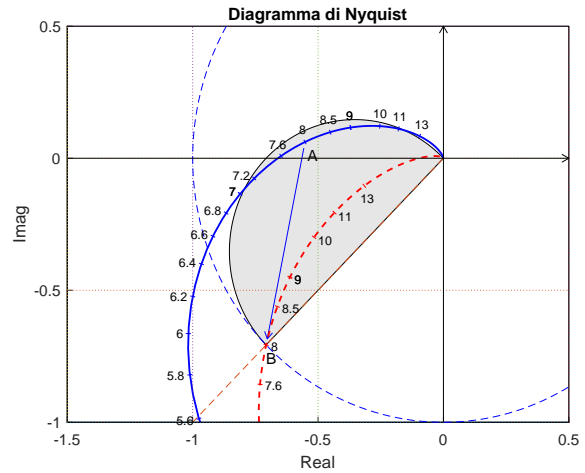
Parametri M e φ :

$$M = 1.8, \quad \varphi = 51.4^\circ$$

Parametri τ_1 e τ_2 :

$$\tau_1 = 0.1882 \quad \tau_2 = 0.011$$

Disegnare su questo piano di Nyquist la posizione del punto B e la zona di ammissibilit :



Rete correttrice:

$$C(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s} = \frac{1 + 0.1882 s}{1 + 0.011 s}$$

31. Rete correttrice: Nichols

Modulo e fase del punto B:

$$M_B = -10 \text{ db} = 0.3162 \quad \varphi_B = -160^\circ$$

Pulsazione ω_A del punto A:

$$\omega_A = 1.5$$

Modulo e fase del punto A:

$$M_A = 4.976, \quad \varphi_A = -144.4^\circ$$

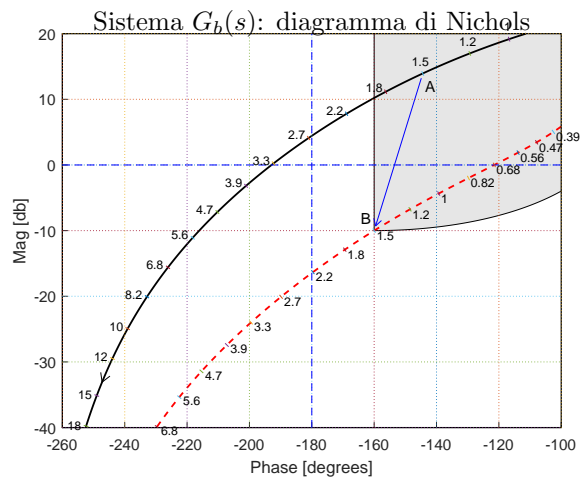
Parametri M e φ :

$$M = 0.0635, \quad \varphi = -15.6^\circ$$

Parametri τ_1 e τ_2 :

$$\tau_1 = 2.232 \quad \tau_2 = 36.65$$

Disegnare sul questo piano di Nichols la posizione del punto B e la zona di ammissibilit :



Rete correttrice:

$$C(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s} = \frac{(1 + 2.232 s)}{(1 + 36.65 s)}$$

32. Punti di lavoro

Guadagni statici: $K_1 = \infty$ $K_2 = 1$ $K_3 = \frac{3}{5}$

Retta di carico:

$$y = \frac{r}{K_2 K_3} = \frac{5r}{3}$$

Valori r_1 ed r_2 del segnale di ingresso r corrispondenti ai punti di lavoro (x_1, y_1) e (x_2, y_2) :

$$3 = \frac{5r^*}{3} \quad \rightarrow \quad r^* = \frac{9}{5} = 1.8$$

33. Criterio del cerchio

Pendenze delle rette del settore:
 $\alpha = 0,$ $\beta = 10.$

Funzione d'anello $G(s)$:

$$G(s) = \frac{15}{s(s+5)(s+3)}$$

Parametri della funzione $G(s)$:

$$K^* = \frac{3 \cdot 5(3+5)}{15} = 8, \quad \omega^* = \sqrt{15} = 3.873.$$

Il sistema retroazionato é:

- globalmente asintoticamente stabile;
- instabile;
- non si può dire nulla;

Disegnare su questo piano di Nyquist la posizione del cerchio critico e della $G(j\omega)$:

34. Funzione descrittiva

Andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$:

Valore della $F(X)$ per $X = 0^+$:

$$m_0 = 0.6$$

Valore della $F(X)$ per $X = \infty$:

$$m_\infty = 0$$

Note:

35. Discussione al variare di K

Per $K \neq 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $K G_1(s)$ è:

$$K^* = \frac{\bar{K}^*}{K} = \frac{8}{K}$$

Discussione al variare di K :

- 1) $K^* > m_1$: non vi sono cicli limite e l'origine è un punto di lavoro globalmente asintoticamente stabile.
- 2) $m_0 < K^* < m_1$: si hanno 2 cicli limite, uno stabile (quello uscente) e uno instabile (quello entrante).
- 3) $K^* < m_0$: si ha un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile.

Rappresentazione grafica delle funzioni $G(j\omega)$ e $-\frac{1}{F(X)}$:

36. Discretizzazione

Utilizzando il metodo della corrispondenza poli-zeri si ottiene:

$$D(z) = K \frac{(1 - e^{-3T} z^{-1})}{(1 - z^{-1})}$$

Il valore di K si determina imponendo l'uguaglianza dei guadagni alle basse frequenze:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} D(s) = \lim_{z \rightarrow -1} D(z) \quad \rightarrow \quad 2 = K \frac{(1 + e^{-3T})}{2} \quad \rightarrow \quad K = \frac{4}{(1 + e^{-3T})} = 2.2978$$

Sostituendo in $D(z)$ si ottiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = 2.2978 \frac{1 - 0.7408z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{2.2978 - 1.7023z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m_k = m_{k-1} + 2.2978 e_k - 1.7023 e_{k-1}.$$

37. Esercizio opzionale (se previsto)

Cognome:

Nome:

N. Matr.: 9

A. Foglio di Brutta

Cognome:

Nome:

N. Matr.: 10

B. Foglio di Brutta

Cognome:

Nome:

N. Matr.: 11

C. Foglio di Brutta