

Firma:

**Esame scritto di Controlli Automatici**  
**Foglio delle risposte. Data del compito: 10 Giugno 2020**

**Domande a risposta multipla.** Per ciascun domanda riportare nella seguente tabella le lettere di tutte le risposte che si ritengono vere.

1) A D	2) B C	3) A C D	4) C	5) B
6) A C D	7) A D	8) A C	9) A B D	10) C

**Domande dirette.** Per ciascuna domanda riportare nella seguente tabella la corrispondente risposta.

11) $X(s) = \frac{12}{s^4} + \frac{5(s+7)}{(s+7)^2 + 3^2}$	12) $g(t) = 2t - 4 + 4e^{-0.5t}$
13) $y(t) \simeq \frac{20}{\sqrt{29}} \sin(5t + \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{5}{2})$	14) $M(\omega) = \frac{\sqrt{25 + 16\omega^2}}{\omega(\omega^2 + 9)}$
15) $y_1(t) = \frac{2}{\pi} \cos(3t)$	16) $G(z) = \frac{2z^2 + z + 7}{z^3 + 5z^2 + 3z + 4}$
17) $H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$	18) $z^n \left[ X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} \right]$
19) $y(n) = 3(0.4)^n$	20) $k = \frac{1 + e^{-2T}}{2}$

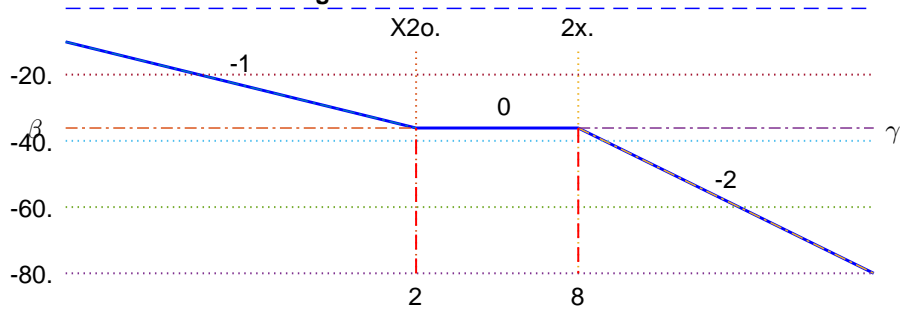
**Esercizi.** Per ciascun esercizio riportare negli spazi indicati i risultati finali e principali passaggi necessari per ottenerli. Si raccomanda di scrivere in maniera chiara.

<b>21. Mason</b>	$G_1(s) = \frac{BC + AC(1+BD)}{1+BD+CE+BCF+BDCE}$
<b>22. Risposta al gradino</b>	<p>a) Il valore a regime:</p> $y_\infty = 0.138,$ <p>b) Il tempo di assestamento:</p> $T_a \simeq \frac{3}{0.2} = 15 \text{ s},$ <p>c) Il periodo dell'eventuale oscillazione:</p> $T_w \simeq \frac{\pi}{3} = 2.1 \text{ s}$

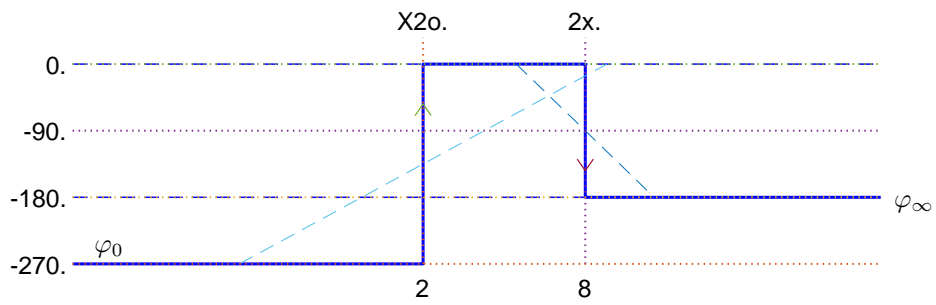
23. Margini	<p>a) <math>M_\alpha = -7.9 \text{ db} = 0.4</math>   b) <math>M_\varphi = -25.1^\circ</math>   c) <math>K_\varphi = -16.98 \text{ db} = 0.14</math>   d) <math>K_\alpha = -21.94 \text{ db} = 0.08</math></p>																				
24. Criterio di Routh	<p>Equazione caratteristica del sistema retroazionato:</p> $1 + \frac{K(s+2)^2}{s(s-2)(s^2+6s+64)} = 0 \quad \rightarrow \quad s(s-2)(s^2+6s+64) + K(s+2)^2 = 0$ $s^4 + 4s^3 + (K+52)s^2 + (4K-128)s + 4K = 0$ <p>Tabella di Routh:</p> <table style="margin-left: 40px;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;"><math>(K+52)</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>4K</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;"><math>(4K-128)</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;">336</td> <td style="padding: 5px;"><math>16K</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;"><math>336(4K-128) - 64K</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;"><math>16K</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table> <p>Calcoli: Dalle ultime due righe della tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:</p> $1280K - 43008 > 0, \quad K > 0.$ <p>Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:</p> $K > \frac{43008}{1280} = 33.6 = K^* \quad \omega^* = \sqrt{\frac{16K^*}{336}} = 1.2649$	4	1	$(K+52)$	$4K$	3	4	$(4K-128)$		2	336	$16K$		1	$336(4K-128) - 64K$			0	$16K$		
4	1	$(K+52)$	$4K$																		
3	4	$(4K-128)$																			
2	336	$16K$																			
1	$336(4K-128) - 64K$																				
0	$16K$																				
25. Diagrammi asintotici di Bode	<p>La funzione approssimante <math>G_0(s)</math>, fase <math>\varphi_0</math> e modulo <math>M_0</math>:</p> $G_0(s) = -\frac{1}{32s} = -\frac{0.03125}{s}, \quad \varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}, \quad M_0 = \infty$ <p>La funzione approssimante <math>G_\infty(s)</math>, fase <math>\varphi_\infty</math> e modulo <math>M_\infty</math>:</p> $G_\infty(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \varphi_\infty = -\pi, \quad M_\infty = 0$ <p>Guadagno <math>\beta</math> in corrispondenza della pulsazione <math>\omega_0</math> dove si ha il primo cambio di pendenza:</p> $\omega_0 = 2, \quad \beta = \frac{1}{64} \simeq -36.12 \text{ db}$ <p>Guadagno <math>\gamma</math> in corrispondenza della pulsazione <math>\omega_\infty</math> dove si ha l'ultimo cambio di pendenza:</p> $\omega_\infty = 8, \quad \gamma = \frac{1}{64} \simeq -36.12 \text{ db.}$																				

Dopo aver indicato i valori degli assi, riportare i diagrammi asintotici di Bode delle fase e delle ampiezze.

**Diagramma asintotico dei moduli**



**Diagramma a gradoni delle fasi**



25. Diagrammi asintotici di Bode (scale logaritmiche)

26. Diagramma di Nyquist

Fase iniziale  $\varphi_0$ , modulo iniziale  $M_0$  e parametro  $\Delta_\tau$ :

$$\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2} \quad M_0 = \infty \quad \Delta_\tau = 0.5 + 0.5 + 0.5 - \frac{6}{64} = 1.4063 > 0$$

Fase finale  $\varphi_\infty$ , modulo finale  $M_\infty$  e parametro  $\Delta_p$ :

$$\varphi_\infty = -\pi \quad M_\infty = 0 \quad \Delta_p = -4 - 2 + 6 = 0$$

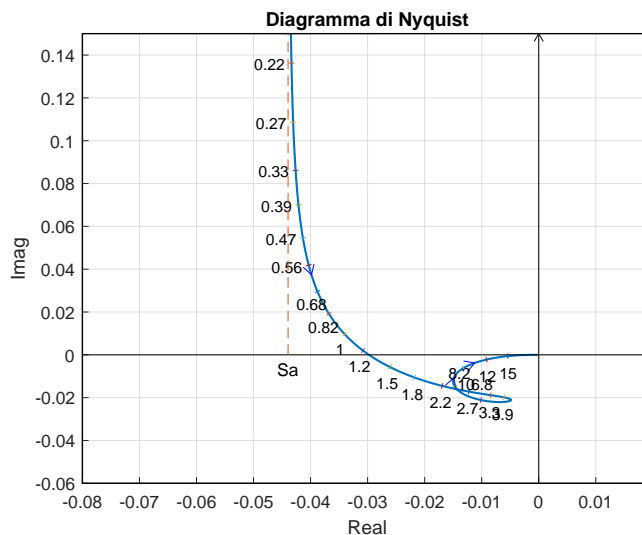
Indicare se nel diagramma di Nyquist é presente un asintoto verticale: Si , No .

Se si, fornire la posizione dell'asintoto verticale:  $\sigma_a = -\frac{\Delta_\tau}{32} = -\frac{1.4063}{32} = -0.0439$

Variazione di fase  $\Delta\varphi$  per  $\omega \in ]0, \infty[$ :  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$

Eventuale intersezione con il semiasse reale:  $\sigma_1^* = -\frac{1}{K^*} = -0.0298$

Tracciamento qualitativo del diagramma di Nyquist completo:



27. Stima di una funzione  $G(s)$

Eventuali calcoli:

Funzione di trasferimento del sistema:

$$G(s) = \frac{200(s - 0.3)(s + 9)^2}{s(s - 2)(s^2 + 40s + 200^2)}$$

Il valore  $K = 200$  si determina, per esempio, calcolando il modulo  $\gamma$  dell'approssimante  $G_\infty(s)$  in corrispondenza della pulsazione  $\omega = 200$ :

$$|G_\infty(s)|_{s=200j} = \left| \frac{K}{s} \right|_{200j} = \frac{K}{200} = \gamma \simeq 0 \text{ db} \simeq 1 \quad \rightarrow \quad K \simeq 200.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati stabili è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} = \frac{1}{10} = 0.1.$$

La distanza  $M_{\omega_n} \simeq 14 \text{ db} = 5$  di legge dal diagramma di Bode dei moduli.

28. Luogo delle Radici

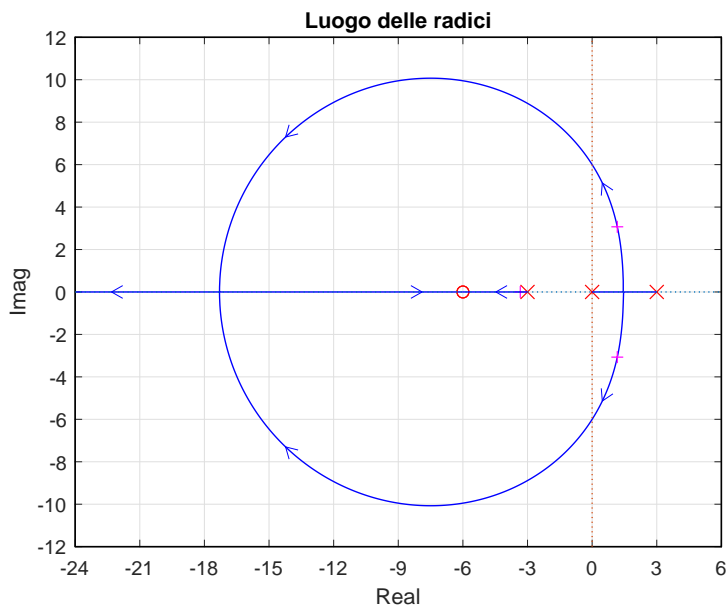
Equazione caratteristica del sistema retroazionato:

$$1 + K_1 G_1(s) = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + K \frac{(s + 6)^2}{s(s + 3)(s - 3)} = 0$$

Numeri  $r$  degli asintoti e posizione  $\sigma_a$  del centro degli asintoti (solo se  $r \geq 2$ ):

$$r = 1 \quad \sigma_a = .$$

Tracciamento qualitativo del luogo delle radici per  $K > 0$ :



29. Contorno delle Radici

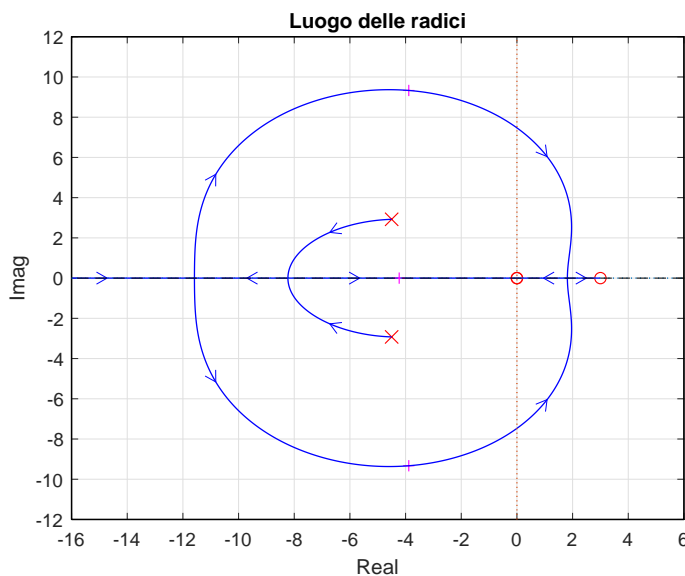
Equazione caratteristica del sistema dinamico assegnato posto nella forma  $1 + \alpha G_2(s)$ :

$$1 + \frac{12(s + 4)^2}{s(\alpha s + 3)(s - 3)} = 0 \quad \rightarrow \quad 3s(s - 3) + 12(s + 4)^2 + \alpha s^2(s - 3) = 0$$

Funzione  $G_2(s)$  fattorizzata, grado relativo  $r$  e posizione  $\sigma_a$  del centro degli asintoti (se  $|r| > 1$ ):

$$G_2(s) = \frac{\alpha s^2(s - 3)}{15s^2 + 135s + 432} \quad r = -1 \quad \sigma_a =$$

Tracciamento qualitativo del contorno delle radici della funzione  $G_2(s)$  per  $\alpha > 0$ :



30. Rete correttrice: Nyquist

Modulo e fase del punto B:

$$M_B = 1 \quad \varphi_B = 240^\circ$$

Pulsazione  $\omega_A$  del punto A:

$$\omega_A = 1.5$$

Modulo e fase del punto A:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.45, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)]$$

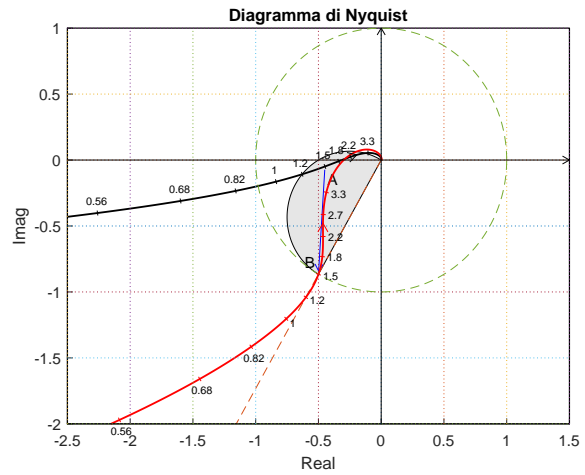
Parametri  $M$  e  $\varphi$ :

$$M = 2.22 \quad \varphi = 53.78^\circ$$

Parametri  $\tau_1$  e  $\tau_2$ :

$$\tau_1 = 1.346 \quad \tau_2 = 0.1158$$

Disegnare su questo piano di Nyquist la posizione del punto B e la zona di ammissibilit :



Rete correttrice:

$$C(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s} = \frac{(1 + 1.346 s)}{(1 + 0.1158 s)}$$

31. Rete correttrice: Nichols

Modulo e fase del punto B:

$$M_B = 0.1 \quad \varphi_B = -180^\circ$$

Pulsazione  $\omega_A$  del punto A:

$$\omega_A = 6.8$$

Modulo e fase del punto A:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 3.467, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)]$$

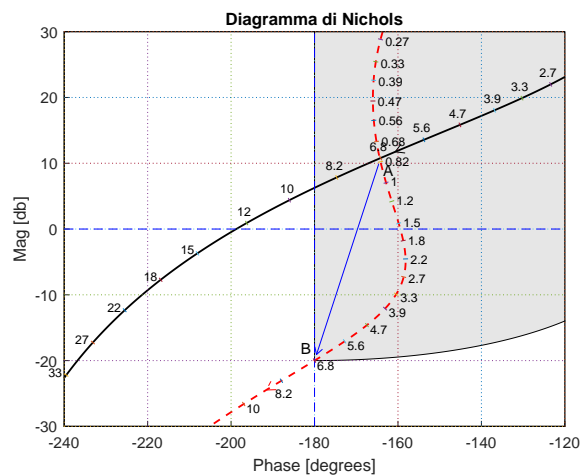
Parametri  $M$  e  $\varphi$ :

$$M = \frac{M_B}{M_{A'}} = 0.0288, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_{A'} = -15.85^\circ$$

Parametri  $\tau_1$  e  $\tau_2$ :

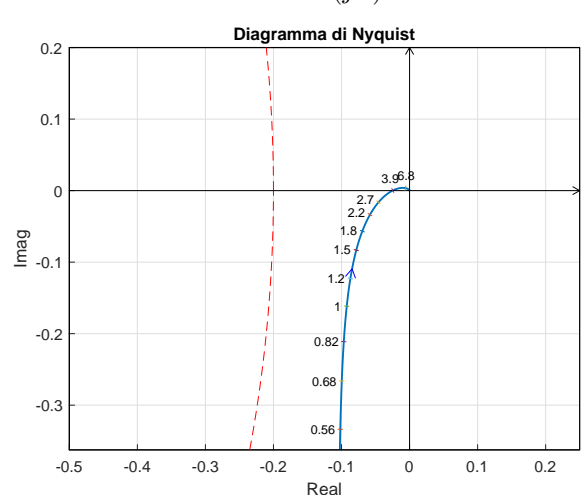
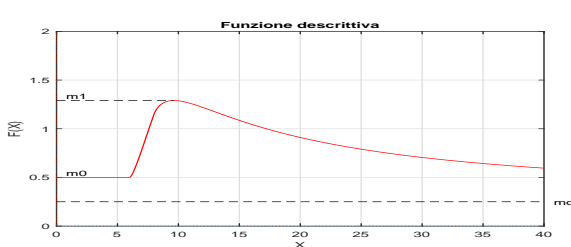
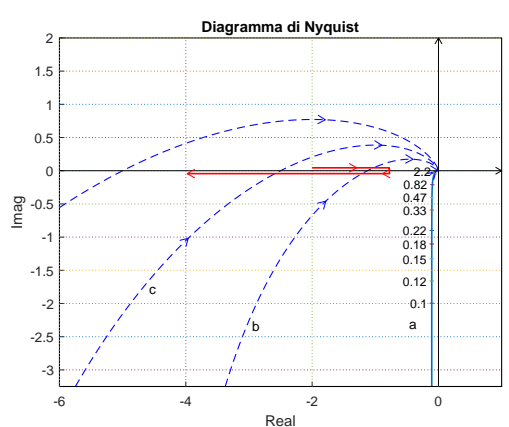
$$\tau_1 = 0.5023 \quad \tau_2 = 18.15$$

Disegnare sul questo piano di Nichols la posizione del punto B e la zona di ammissibilit :



Rete correttrice:

$$C(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s} = \frac{(1 + 0.5023 s)}{(1 + 18.15 s)}$$

<b>32. Punti di lavoro</b>	<p>Guadagni statici: <math>K_1 = \infty</math>                      <math>K_2 = 1</math>                      <math>K_3 = \frac{3}{5}</math></p> <p>Retta di carico:</p> $y = \frac{r}{K_2 K_3} = \frac{5r}{3}$ <p>Valori <math>r_1</math> ed <math>r_2</math> del segnale di ingresso <math>r</math> corrispondenti ai punti di lavoro <math>(x_1, y_1)</math> e <math>(x_2, y_2)</math>:</p> $3 = \frac{5r_1}{3} \quad \rightarrow \quad r_1 = \frac{9}{5} = 1.8.$
<b>33. Criterio del cerchio</b>	<p>Pendenze delle rette del settore:</p> $\alpha = 0.25 \qquad \beta = 5$ <p>Funzione d'anello <math>G(s)</math>:</p> $G(s) = \frac{3}{s(s+3)(s+5)}$ <p>Parametri della funzione <math>G(s)</math>:</p> $\bar{K}^* = 40 \qquad \omega^* = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15} = 3.873$ <p>Il sistema retroazionato é:</p> <p><input checked="" type="radio"/> globalmente asintoticamente stabile;</p> <p><input type="radio"/> instabile;</p> <p><input type="radio"/> non si può dire nulla;</p> <div style="text-align: right;"> <p>Disegnare su questo piano di Nyquist la posizione del cerchio critico e della <math>G(j\omega)</math>:</p>  </div>
<b>34. Funzione descrittiva</b>	<p>Valore della <math>F(X)</math> per <math>X = 0^+</math>:</p> $m_0 = 0.5$ <p>Valore della <math>F(X)</math> per <math>X = \infty</math>:</p> $m_\infty = 0.25$ <p>Note:</p> <div style="text-align: right;"> <p>Andamento qualitativo della funzione descrittiva <math>F(X)</math>:</p>  </div>
<b>35. Discussione al variare di K</b>	<p>Per <math>K \neq 1</math>, il margine di ampiezza <math>K^*</math> del sistema <math>K G_1(s)</math> è:</p> $K^* = \frac{\bar{K}^*}{K} = \frac{40}{K}$ <p>Discussione al variare di <math>K</math>:</p> <p>a) Per <math>K^* &gt; m_1</math>, non vi sono cicli limite e l'origine è un punto di lavoro globalmente asintoticamente stabile.</p> <p>b) Per <math>m_0 &lt; K^* &lt; m_1</math>: 2 cicli limite, uno stabile (quello uscente) e uno instabile (quello entrante).</p> <p>c) Per <math>m_0 &lt; K^* &lt; m_3</math>: un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile.</p> <p>d) Per <math>K^* &lt; m_3</math>: non vi sono cicli limite e il sistema retroazionato è instabile.</p> <div style="text-align: right;"> <p>Rappresentazione grafica delle funzioni <math>G(j\omega)</math> e <math>-\frac{1}{F(X)}</math>:</p>  </div>

36. Discretizzazione

Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(z) = \frac{(s+2)}{s(s+1)} \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{T(1-z^{-1}+2T)}{(1-z^{-1})(1-z^{-1}+T)}$$

Per  $T = 0.2$  si ha:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{0.2(1.4 - z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1.2 - z^{-1})} = \frac{0.28 - 0.2z^{-1}}{1.2 - 2.2z^{-1} + z^{-2}}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m(k) = \frac{1}{1.2} [2.2m(k-1) - m(k-2) + 0.28e(k) - 0.2e(k-1)]$$

cioè:

$$m(k) = 1.8333m(k-1) - 0.8333m(k-2) + 0.2333e(k) - 0.1667e(k-1)]$$

37. Esercizio opzionale (se previsto)

Cognome:

Nome:

N. Matr.:  9

A. Foglio di Brutta

Cognome:

Nome:

N. Matr.: 10

**B. Foglio di Brutta**

Cognome:

Nome:

N. Matr.: 11

C. Foglio di Brutta