Controlli Automatici - Prima parte
30 Gennaio 2024 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = 4\cos(2t)\,e^{-3t} - 7\,t\,e^{-4t}, \qquad x_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ 2\,e^{-4\,(t-3)}\sin(5(t-3)) & t \geq 3 \end{cases}$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{4\,(s+3)}{(s+3)^2+4} - \frac{7}{(s+4)^2}, \qquad X_2(s) = \frac{10}{(s+4)^2+25}\,e^{-3s}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{14}{(1+2\,s)(s+4)} \qquad G_2(s) = 4 + \frac{12}{(s+3)^4}$$

Soluzione:

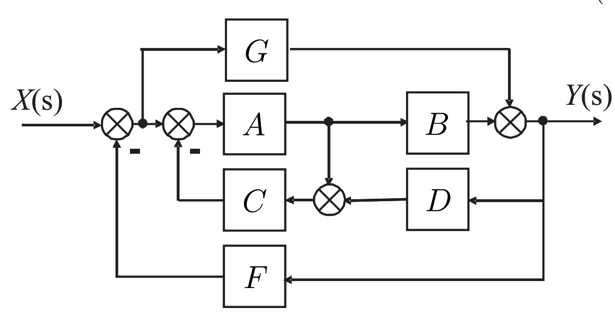
$$g_1(t) = 2\,e^{-0.5\,t} - 2\,e^{-4\,t}, \qquad g_2(t) = 4\,\delta(t) + 2\,t^3 e^{-3\,t}$$

Infatti, per la funzione $G_1(s)$ si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G_1(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{7}{(s+0.5)(s+4)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+0.5) - \frac{2}{(s+4)}}\right] = 2\,e^{-0.5\,t} - 2\,e^{-4\,t}.$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$:

$$G_1(s) = \frac{AB + G(1+AC)}{1 + AC + GF + ABCD + ABF + ACGF}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;

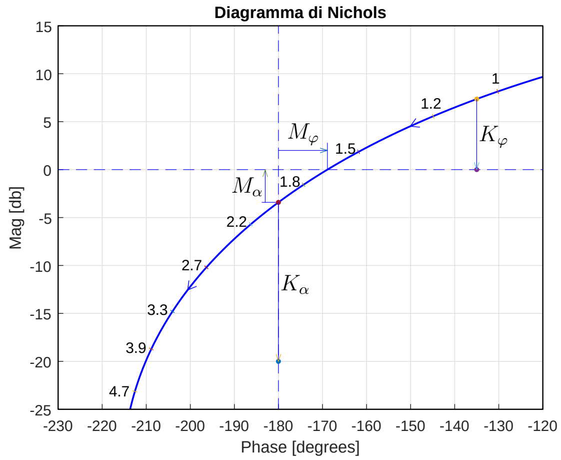
c.2) il margine di fase M_φ del sistema;

c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\,G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 45$;

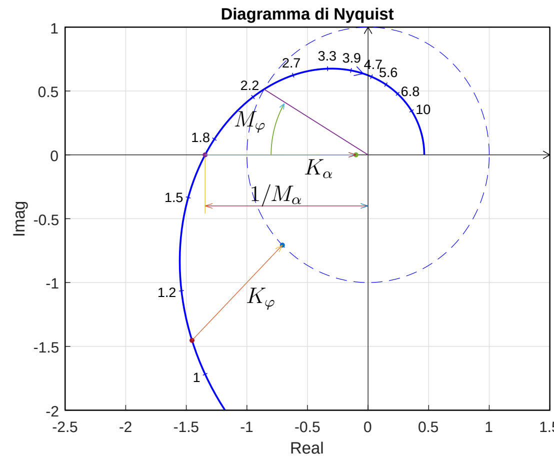
c.4) il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha\,G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 10$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$



$G_2(j\omega)$



c.1) $M_a = 3.41$ db $= 1.48$

c.2) $M_\varphi = 11.1$

c.3) $K_\varphi = -7.36$ db $= 0.429$

c.4) $K_\alpha = -16.6$ db $= 0.148$

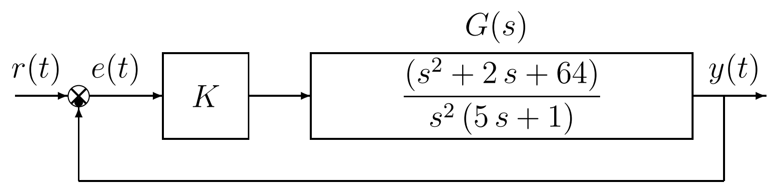
c.1) $M_a = 0.744$

c.2) $M_\varphi = -30.9$

c.3) $K_\varphi = 0.487$

c.4) $K_\alpha = 0.0744$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K\,\frac{(s^2+2\,s+64)}{s^2\,(5\,s+1)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad 5s^3 + (K+1)s^2 + 2Ks + 64K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 5 & 2K \\ 2 & K+1 & 64K \\ 1 & 2K^2 - 318K & \\ 0 & 64K & \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano positivi si ricavano i seguenti vincoli:

$$K+1 > 0, \qquad 2K^2 - 318K > 0, \qquad 64K > 0,$$

dai quali si ricava:

$$K > -1, \qquad (K < 0) \cup (K > 159), \qquad K > 0.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 159 = K_1.$$

La pulsazione ω_1 corrispondente al valore limite K_1 è:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{64K_1}{K_1+1}} = 7.975.$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

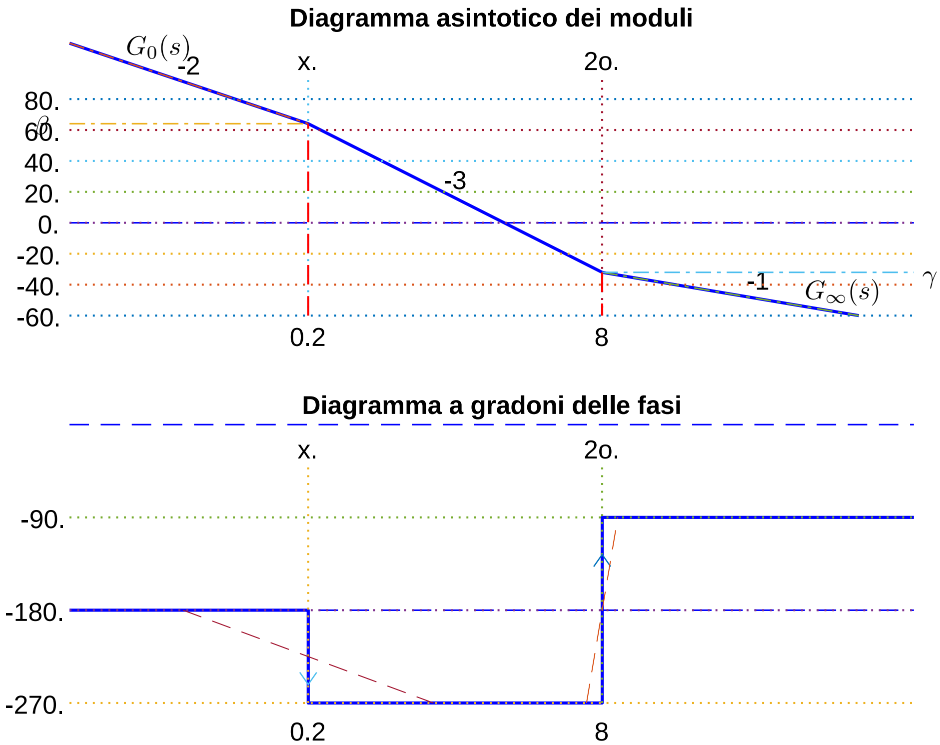


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{64}{s^2}, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{0.2}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\pi, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.2$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 8$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.2} = 1600 = 64.08 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=8} = 0.025 = -32.04 \text{ db}.$$

Coefficienti di smorzamento degli zeri complessi coniugati: $\delta_1 = 0.125$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con il semiasse reale negativo e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 3. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\pi$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è negativa:

$$\Delta\tau = \frac{2}{64} - 5 = -4.969 < 0.$$

Il sistema è di tipo 2 per cui nel diagramma di Nyquist non è presente nessun asintoto. Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = -\pi$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

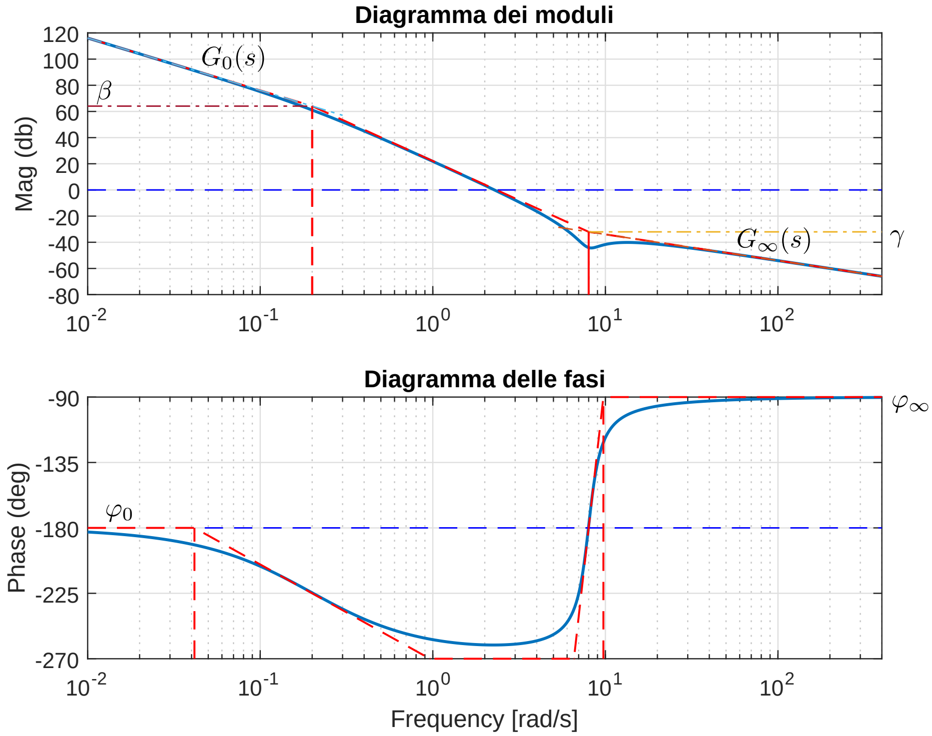


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

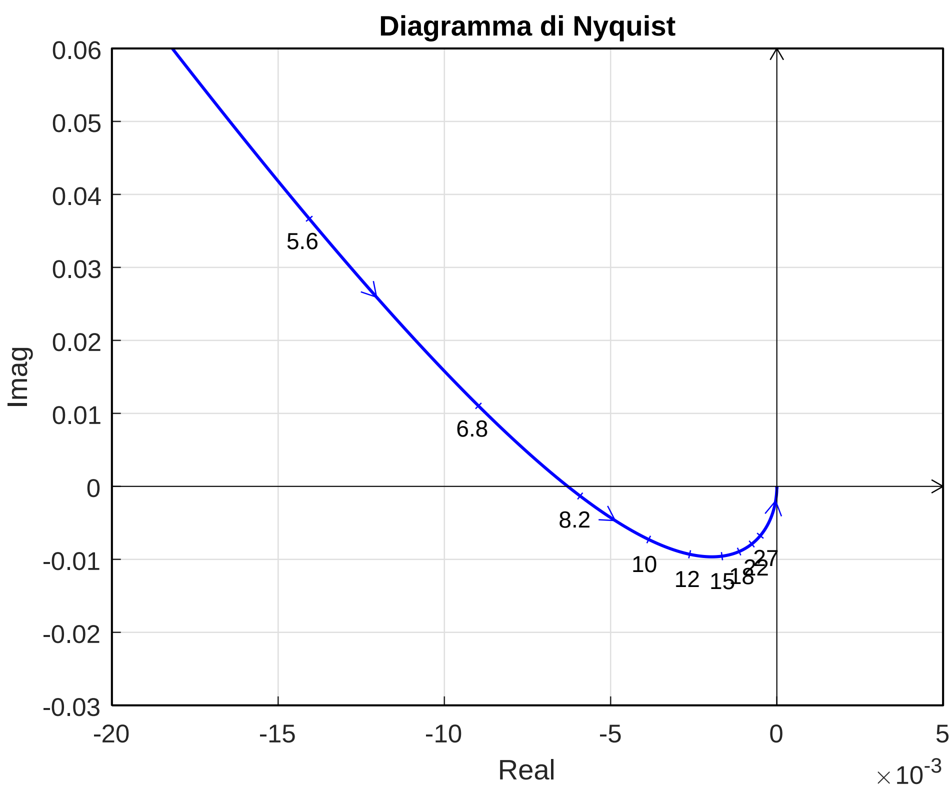


Figura 3: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p del sistema è negativa:

$$\Delta_p = -2 + 0.2 = -1.8 < 0.$$

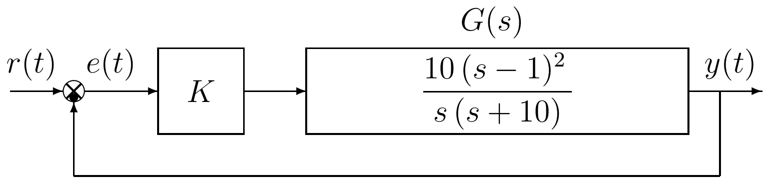
d.4) Calcolare i valori di K necessari per avere un errore a regime $|e_a| < 0.01$ per ingresso a parabola $x(t) = 2\,t^2$.

Soluzione. L'errore a regime e_a del sistema retroazionato per ingresso a parabola $x(t) = 2\,t^2 = \frac{R_0}{2}\,t^2$ è:

$$e_a = \frac{R_0}{K_a} = \frac{4}{64\,K} < 0.01 \qquad \to \qquad K > \frac{4}{64 \cdot 0.01} \simeq 6.25.$$

Siccome il sistema retroazionato è stabile per $K > 159$, i valori di K che garantiscono sia la stabilitá del sistema retroazionato che l'errore a regime richiesto sono $K > 159$.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K\,\frac{10\,(s-1)^2}{s\,(s+10)} = 0 \qquad \to \qquad (10K+1)s^2 + (10.0 - 20K)s + 10K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 10K+1 & 10K \\ 1 & 10.0-20K & \\ 0 & 10K & \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano positivi si ricavano i seguenti vincoli:

$$10K + 1 > 0, \qquad 10.0 - 20K > 0, \qquad 10K > 0,$$

dai quali si ricava:

$$K > -0.1, \qquad K < 0.5, \qquad K > 0.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$0 < K < 0.5 = K^*.$$

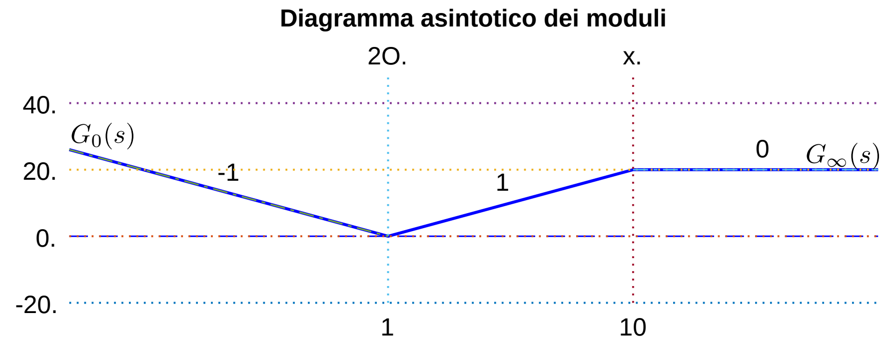
La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{10K^*}{10K^*+1}} = 0.91287.$$

e.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$.

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 4.



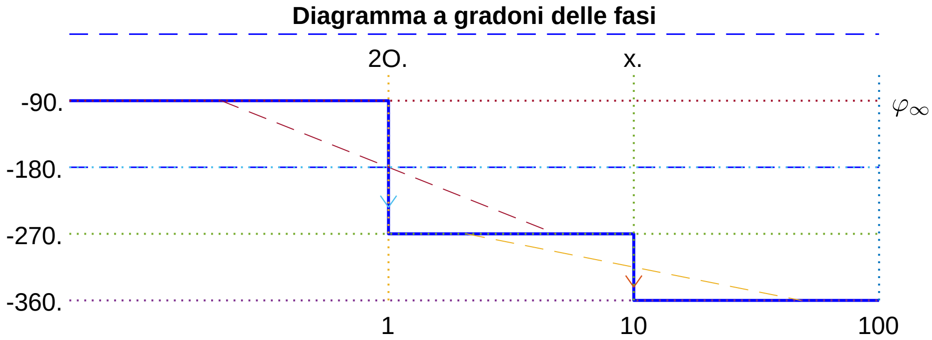


Figura 4: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{1}{s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = 10.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \qquad\qquad \varphi_\infty = 0.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=1} = 1 = 0 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = 10 = 20 \text{ db}.$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

e.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G_e(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 6. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è negativa:

$$\Delta\tau = \frac{1}{-1} + \frac{1}{-1} - \frac{1}{10} = -2.1 < 0.$$

Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto. La posizione dell'asintoto è la seguente:

$$\sigma_a = K\Delta_\tau = 1 \cdot (-2.1) = -2.1.$$

Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0,\ \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\,\pi}{2}.$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $-\frac{3\pi}{2}$ in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = 0$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = 0$ in quanto la somma Δ_p del sistema è positiva:

$$\Delta_p = 1 + 1 + 10 = 12 > 0.$$

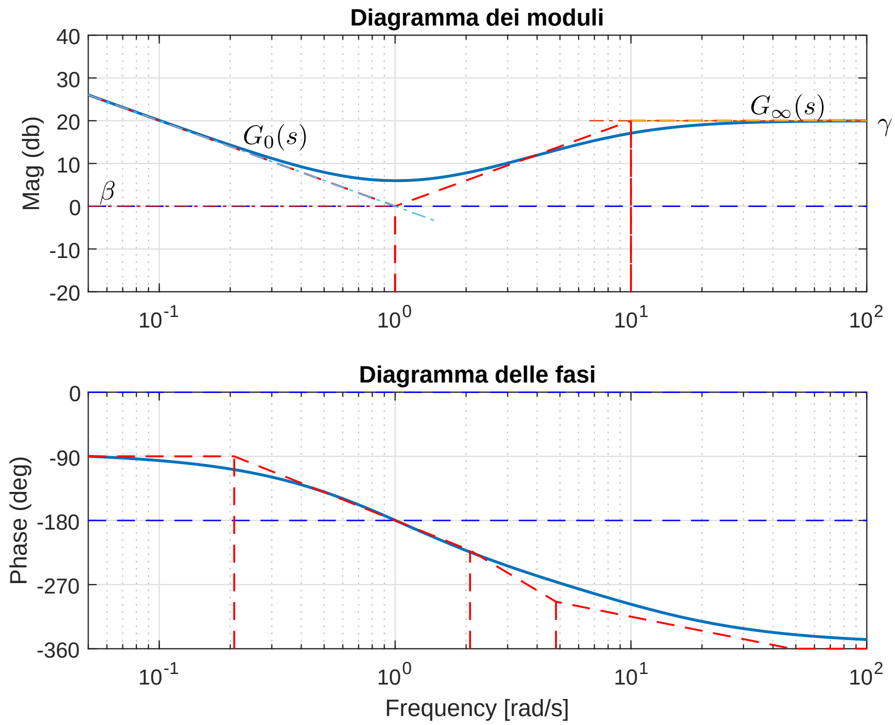


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

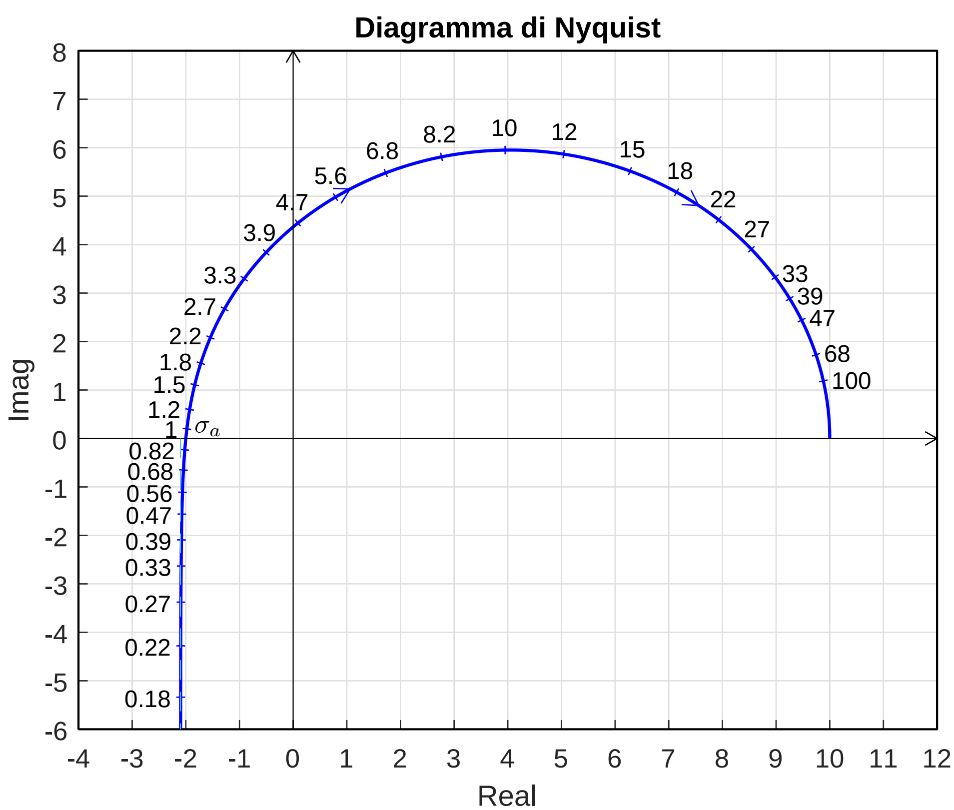


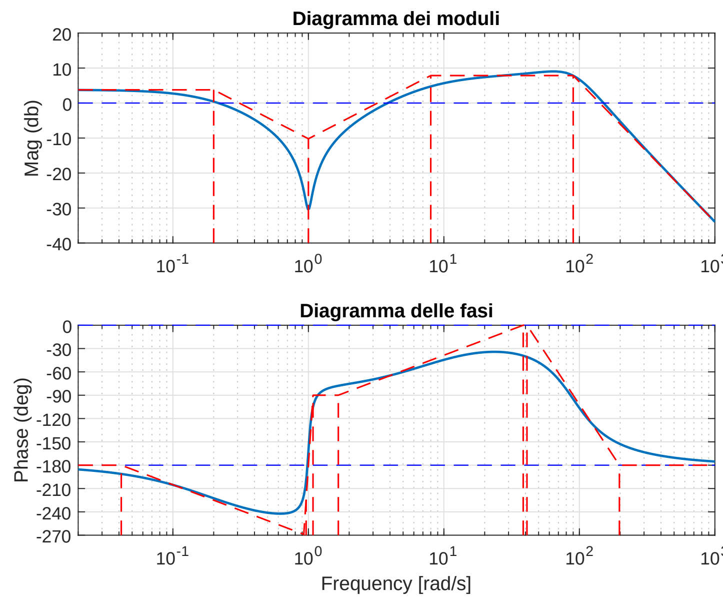
Figura 6: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

Per $K = K^*$, l'intersezione del diagramma di Nyquist con l'asse reale negativo si ha nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{0.5} = -2.$$

in corrispondente della pulsazione $\omega^* = 0.91287$.

f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.



Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{20000\,(s^2 + 0.1\,s + 1)}{(s + 0.2)\,(s - 8)\,(s^2 + 90\,s + 8100)}$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.

Soluzione. La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{20000\,(s^2 + 0.1\,s + 1)}{(s + 0.2)\,(s - 8)\,(s^2 + 90\,s + 8100)}$$

Il valore $K = 20000$ puó essere calcolato in due modi diversi:

1) calcolando il modulo β dell'approssimante $G_0(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.2$:

$$|G_0(s)|_{s=0.2\,j} = |-7.716e - 05\,K|_{s=0.2\,j} = 7.716e05\,K = \beta \simeq 3.77 \text{ db} \simeq 1.54 \qquad \rightarrow \qquad K \simeq 20000.$$

2) calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 90$:

$$|G_\infty(s)|_{s=90\,j} = \left|\frac{K}{s^2}\right|_{s=90\,j} = \frac{K}{90^2} = \gamma \simeq 7.85 \text{ db} \simeq 2.47 \qquad \rightarrow \qquad K \simeq 20000.$$

I coefficienti di smorzamento δ delle coppie di poli o zeri complessi coniugati presenti all'interno della funzione G(s) sono i seguenti:

$$\begin{array}{lclcl} (s^2 + 0.1\,s + 1^2) & \rightarrow & M_{\omega_n} \simeq 20 \text{ db} = 10 & \rightarrow & \delta = \frac{1}{2\,M_{\omega_n}} \simeq 0.05 \\ (s^2 + 90\,s + 90^2) & \rightarrow & M_{\omega_n} \simeq 0 \text{ db} = 1 & \rightarrow & \delta = \frac{1}{2\,M_{\omega_n}} \simeq 0.5 \end{array}$$

I valori M_{ω_n} si leggono sul diagramma di Bode dei moduli come distanza tra il diagramma asintotico e il diagramma reale alla pulsazione ω_n.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Controlli Automatici - Prima parte

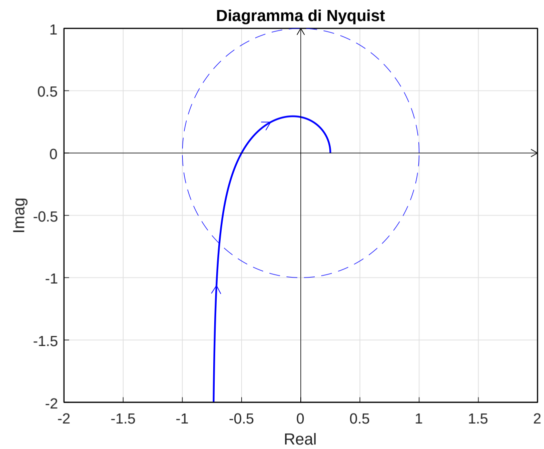
30 Gennaio 2024 - Domande

Si risponda alle seguenti domande.

1. Scrivere, in funzione dei segnali $x(t)$ e $y(t)$, l'equazione differenziale corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + 6\,s + 4}{s(s^2 + 3\,s + 5)} \qquad \rightarrow \qquad \dddot{y} + 3\,\ddot{y} + 5\,\dot{y} = \ddot{x} + 6\dot{x} + 4\,x$$

2. Sul piano di Nyquist riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ di un sistema $G(s)$ a fase minima caratterizzato dai seguenti parametri:
   a) Approssimante per $\omega = 0$: $G_0(s) = \frac{1}{4\,s}$;
   b) Parametro $\Delta\tau < 0$;
   c) Margine di fase $M_\varphi \simeq 45°$;
   d) Margine di ampiezza $M_\alpha \simeq 2$;
   e) Approssimante per $\omega = \infty$: $G_\infty(s) = 0.25$;



3. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del seguente sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il seguente segnale $x(t)$:

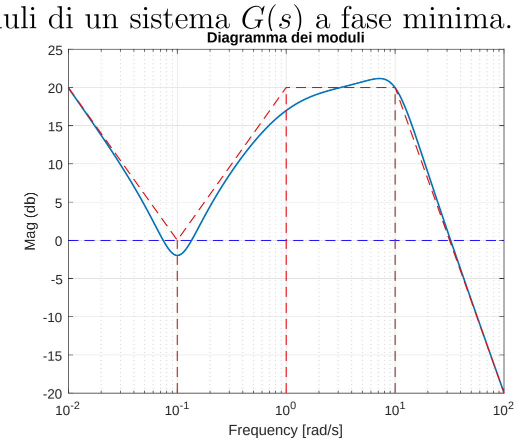
$$x(t) = 5\sin(3\,t) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{12}{s(s+4)}} \longrightarrow y(t) \simeq 4\,\sin\left(3\,t - \tfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\tfrac{3}{4}\right)\right)$$

Infatti si ha che:

$$G(j3) = \frac{12}{j3(j3+4)} \quad \rightarrow \quad |G(j4)| = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}, \qquad \arg G(j3) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{3}{4}\right) = 126.7°$$

4. Si faccia riferimento al diagramma di Bode dei moduli di un sistema $G(s)$ a fase minima. Utilizzando la formula di Bode, calcolare in modo approssimato la fase φ del sistema $G(s)$ in corrispondenza delle seguenti pulsazioni ω:

$$\omega_1 = 0.03 \quad \rightarrow \quad \varphi_1 \simeq -\tfrac{\pi}{2}$$
$$\omega_2 = 1 \quad \rightarrow \quad \varphi_2 \simeq \tfrac{\pi}{4}$$
$$\omega_3 = 10 \quad \rightarrow \quad \varphi_3 \simeq -\tfrac{\pi}{2}$$
$$\omega_4 = 70 \quad \rightarrow \quad \varphi_4 \simeq -\pi$$



5. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $2\dot{y}(t) + 3\,y(t) = 0$ con condizione iniziale $y(0) = 5$. Applicando la trasformata di Laplace si ha:

$$2\,(s\,Y(s) - 5) + 3\,Y(s) = 0 \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{5}{s + 1.5} \quad \rightarrow \quad y(t) = 5\,e^{-1.5\,t}.$$

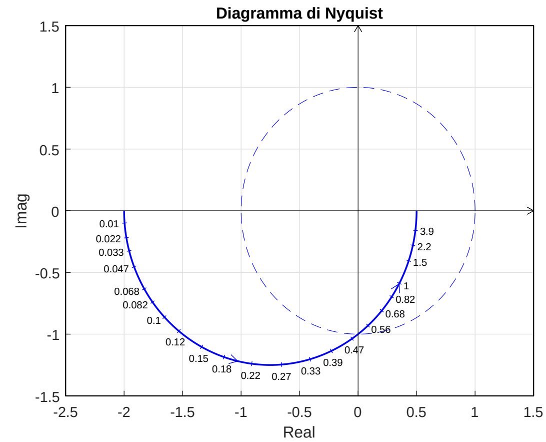
6. Un sistema $G(s)$ retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se :

   ◯ il margine di fase $M_\varphi > 1$;
   ⊗ il margine di ampiezza $M_a > 1$;
   ⊗ il margine di fase $M_\varphi > 0$;
   ◯ il margine di ampiezza $M_a > 0$;

7. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $G(s) = \frac{2(s+1)}{(4s-1)}$.

   Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

   ◯ $-\frac{1}{2} < K < 2$;
   ◯ $-2 < K < \frac{1}{2}$;
   ◯ $(K < -\frac{1}{2}) \cup (K > 2)$;
   ⊗ $(K < -2) \cup (K > \frac{1}{2})$;



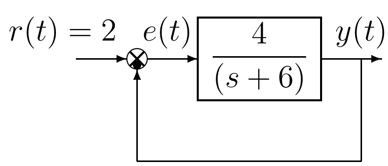
8. Per un sistema del 2^o ordine privo di zeri, scrivere le funzioni $S(\delta)$ e $M_R(\delta)$ che legano la massima sovraelongazione $S\%$ e il picco di risonanza M_R al coefficiente di smorzamento δ:

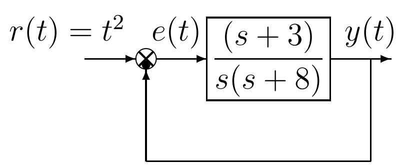
$$S(\delta) = 100\, e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}, \qquad M_R(\delta) = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$$

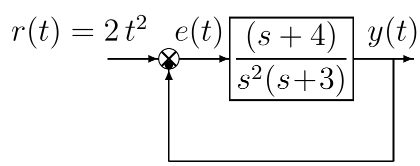
9. Calcolare il valore dei parametri a, b e c della seguente funzione di trasferimento $G(s)$ in modo che la risposta $y(t)$ al gradino unitario della funzione $G(s)$ sia caratterizzato da: un valore iniziale $y(0^+) = 3$, un valore finale $y(\infty) = 2$ e una costante di tempo del polo $\tau = 0.2$ s:

$$G(s) = \frac{a\,s + b}{s + c} \qquad \rightarrow \qquad a = 3, \qquad b = 10, \qquad c = 5.$$

10. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:







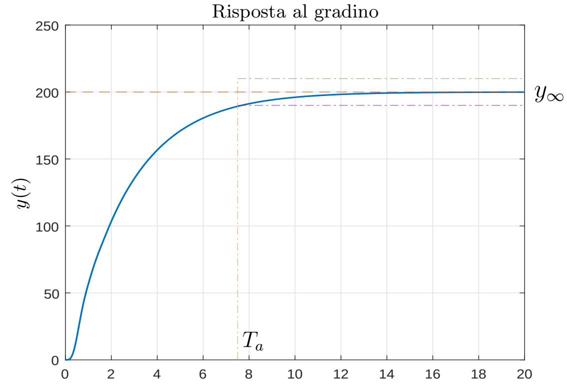
$$e(\infty) = \frac{2}{1+\frac{2}{3}} = \frac{6}{5} = 1.2 \qquad e(\infty) = \infty \qquad e(\infty) = \frac{4}{\frac{4}{3}} = 3$$

11. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{20(8+0.5s)(2s+30)(s^2+10s+50^2)}{(s+12)(\mathbf{5s+2})(s^2+4s+100)(s^2+5s+25)}$$

Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$$y_\infty = 200, \qquad T_a \simeq 7.5\,\text{s}, \qquad T_\omega \simeq \nexists.$$



12. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{2(s+3)}{s(4\,s-5)}\,e^{-3\,s} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} M(\omega) = \frac{2\sqrt{\omega^2+9}}{\omega\sqrt{16\omega^2+25}} \\ \varphi(\omega) = \arctan\frac{\omega}{3} - \frac{\pi}{2} - \pi + \arctan\frac{4\omega}{5} - 3\,\omega \end{cases}$$