

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. Elet. Telec. Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = [2 \cos(3t) - 7t] e^{-4t}, \quad x_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ 2 e^{-3(t-4)} \sin(5(t-4)) & t \geq 4 \end{cases}$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{2(s+4)}{(s+4)^2 + 9} - \frac{7}{(s+4)^2}, \quad X_2(s) = \frac{10}{(s+3)^2 + 25} e^{-4s}.$$

a.2) Calcolare la trasformata di Laplace inversa $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ delle seguenti funzioni $Y(s)$:

$$Y_1(s) = \frac{30}{s(s+3)(s-2)}, \quad Y_2(s) = \frac{24}{s^4} + \frac{6}{(s+4)^3} + 2e^{-3s}$$

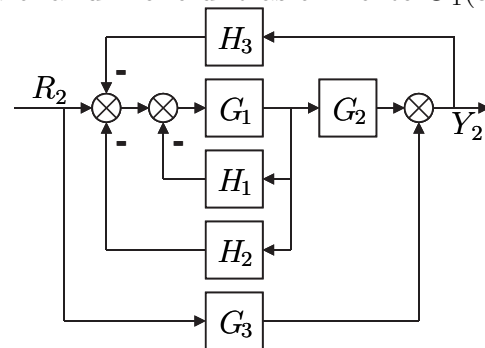
Soluzione:

$$y_1(t) = -5 + 2e^{-3t} + 3e^{2t}, \quad y_2(t) = 4t^3 + 3t^2e^{-4t} + 2\delta(t-3)$$

Infatti, per la funzione $Y_1(s)$ si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}[Y_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{30}{s(s+3)(s-2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{5}{s} + \frac{2}{s+3} + \frac{3}{s-2}\right] = -5 + 2e^{-3t} + 3e^{2t}$$

b) Dato lo schema a blocchi riportato in figura, calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s)$:

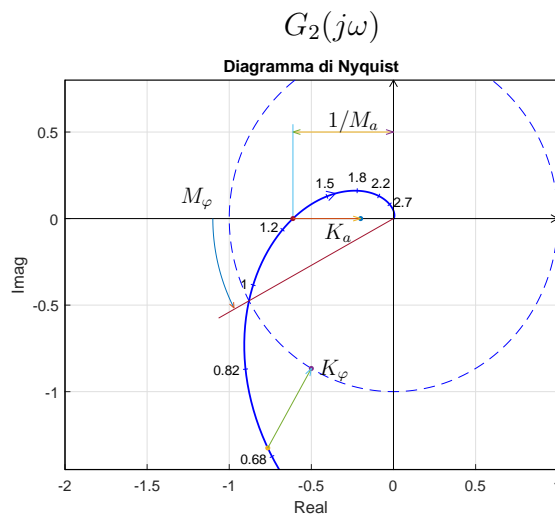
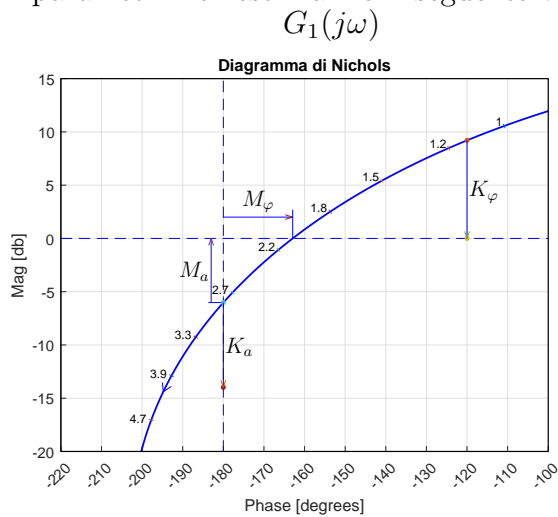


$$G_1(s) = \frac{Y_2(s)}{R_2(s)} = \frac{G_1 G_2 + G_3(1 + G_1 H_1 + G_1 H_2)}{1 + G_1 H_1 + G_1 H_2 + G_1 G_2 H_3}$$

c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$. Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

- c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;
- c.2) il margine di fase M_φ del sistema;
- c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 60$;
- c.4) il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 5$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:



c.1) $M_a = 6.02 \text{ db} = 2$

c.1) $M_a = 1.63$

c.2) $M_\varphi = 17.1$

c.2) $M_\varphi = 28.4$

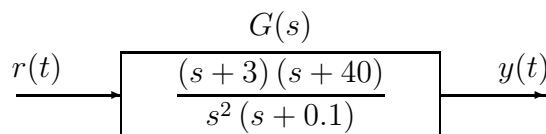
c.3) $K_\varphi = -9.21 \text{ db} = 0.346$

c.3) $K_\varphi = 0.653$

c.4) $K_a = -7.96 \text{ db} = 0.4$

c.4) $K_a = 0.327$

d) Sia dato il seguente sistema ad anello aperto:



d.1) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \rightarrow 0$ ed $\omega \rightarrow \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{1200}{s^2}, \quad G_\infty(s) = \frac{1}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\pi, \quad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 40$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.1} = 1.2e + 05 = 101.6 \text{ db}, \quad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=40} = 0.025 = -32.04 \text{ db}.$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

d.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 3. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\pi$. Per $\omega \rightarrow 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è negativa:

$$\Delta\tau = \frac{1}{3} + \frac{1}{40} - 10 = -9.642 < 0.$$

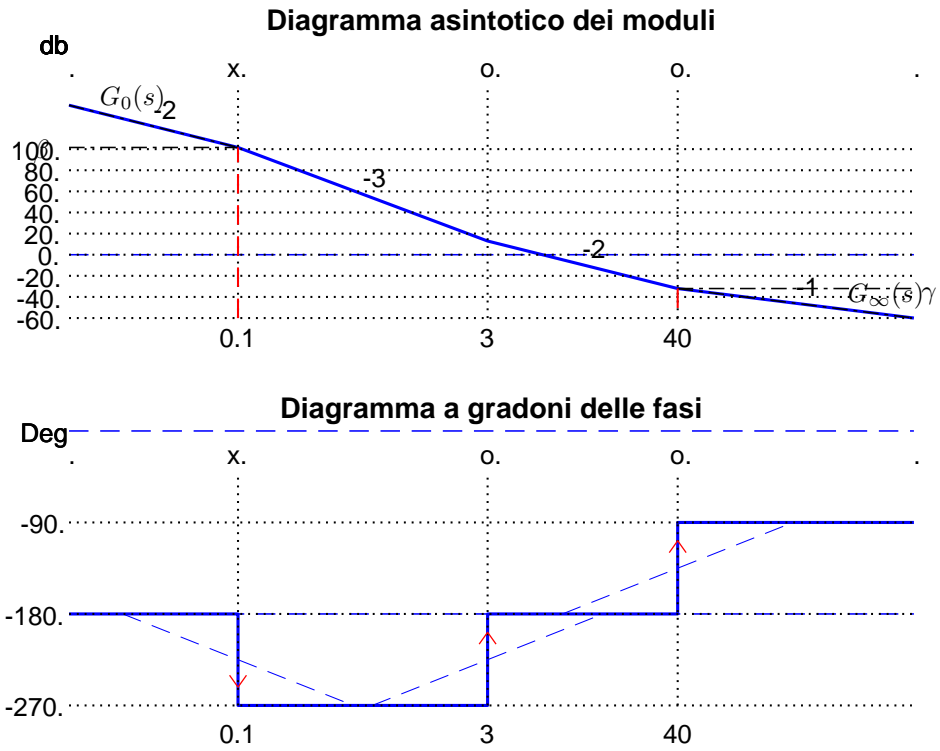


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

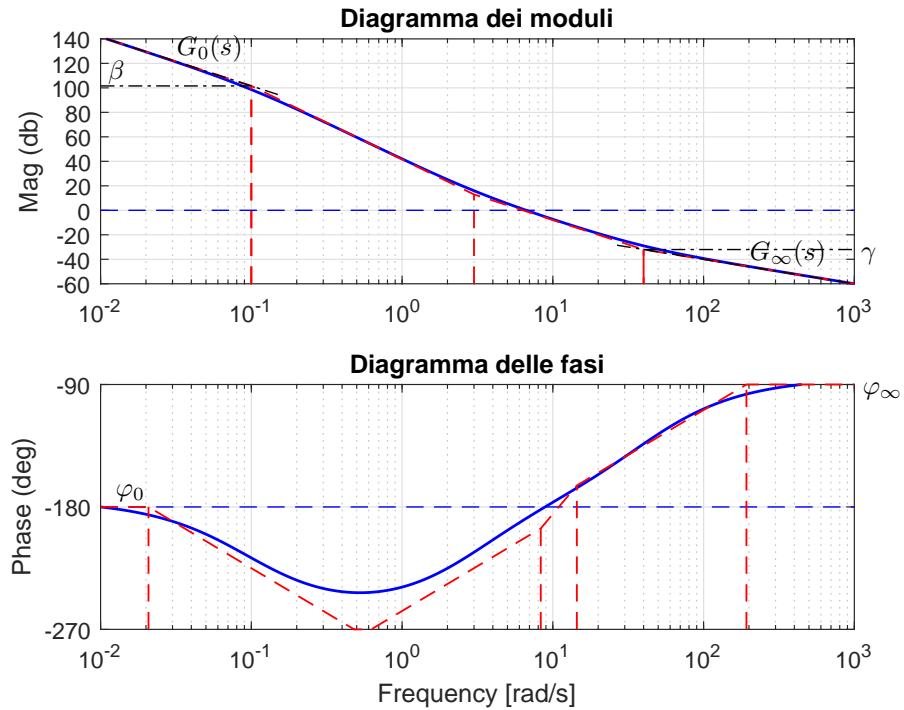


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

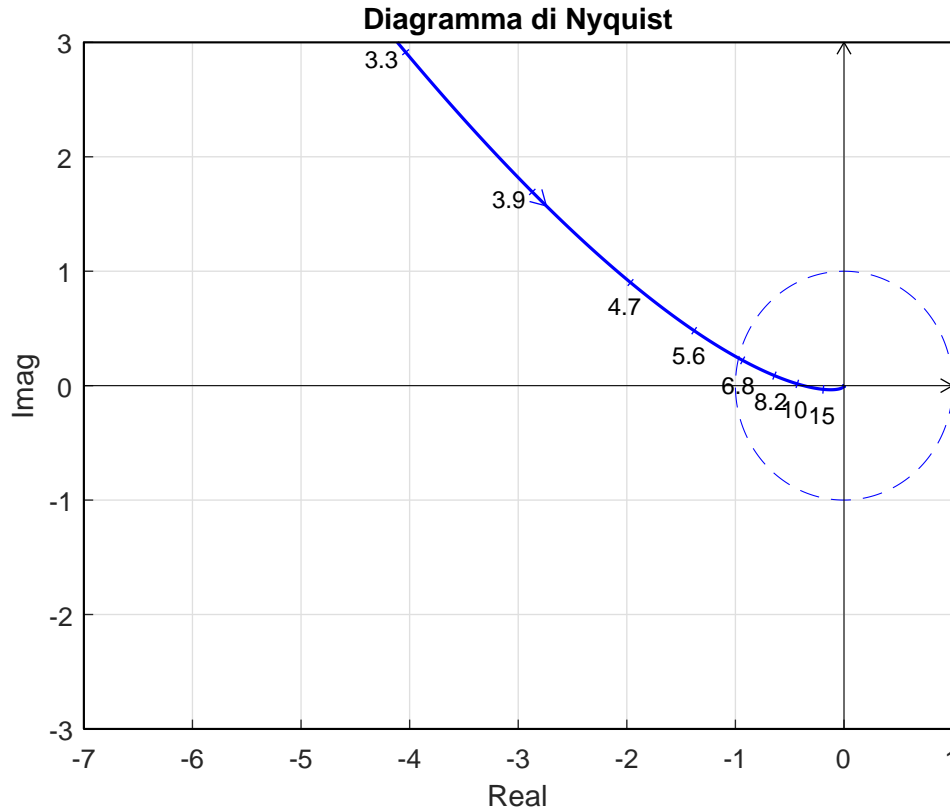


Figura 3: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

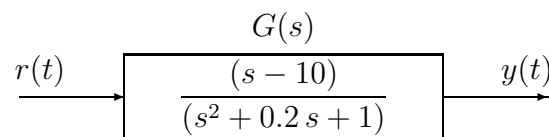
Il sistema è di tipo 2 per cui nel diagramma di Nyquist non è presente nessun asintoto. Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = -\pi$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \rightarrow \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p del sistema è negativa:

$$\Delta_p = -3 - 40 + 0.1 = -42.9 < 0.$$

e) Sia dato il seguente sistema ad anello aperto:



e.1) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \rightarrow 0$ ed $\omega \rightarrow \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = -10, \quad G_\infty(s) = \frac{1}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\pi, \quad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

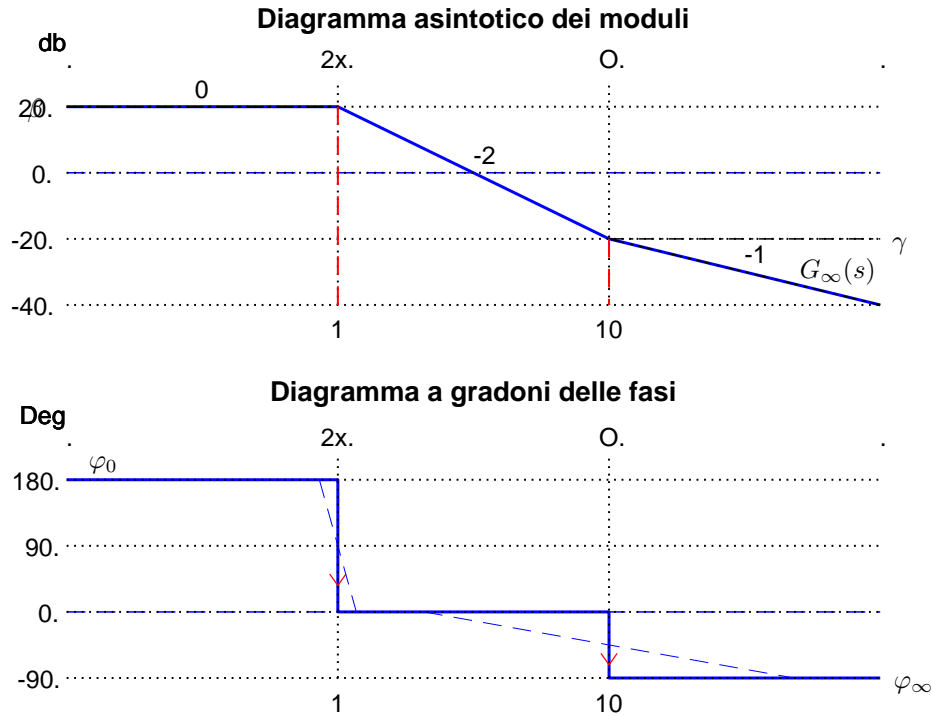


Figura 4: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=1} = 10 = 20 \text{ db}, \quad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = 0.1 = -20 \text{ db}.$$

Coefficienti di smorzamento dei poli complessi coniugati: $\delta_1 = 0.1$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

e.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” della funzione $G(s)$.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 6. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\pi$. Per $\omega \rightarrow 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è negativa:

$$\Delta\tau = \frac{1}{-10} - \frac{1}{5} = -0.3 < 0.$$

Il sistema è di tipo 0 per cui nel diagramma di Nyquist non è presente nessun asintoto. Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = -\pi$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{3\pi}{2}.$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $-\frac{3\pi}{2}$ in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \rightarrow \infty$ il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p del sistema è positiva:

$$\Delta_p = 10 + 0.2 = 10.2 > 0.$$

e.3) Disegnare l’andamento qualitativo $y(t)$ della risposta al gradino unitario del sistema $G(s)$.

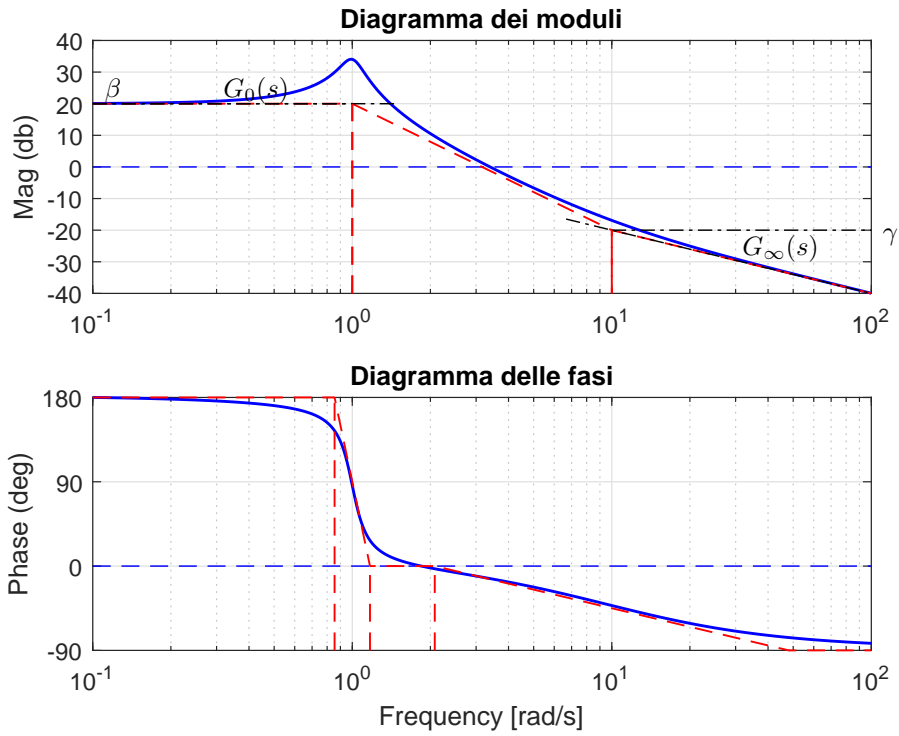


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

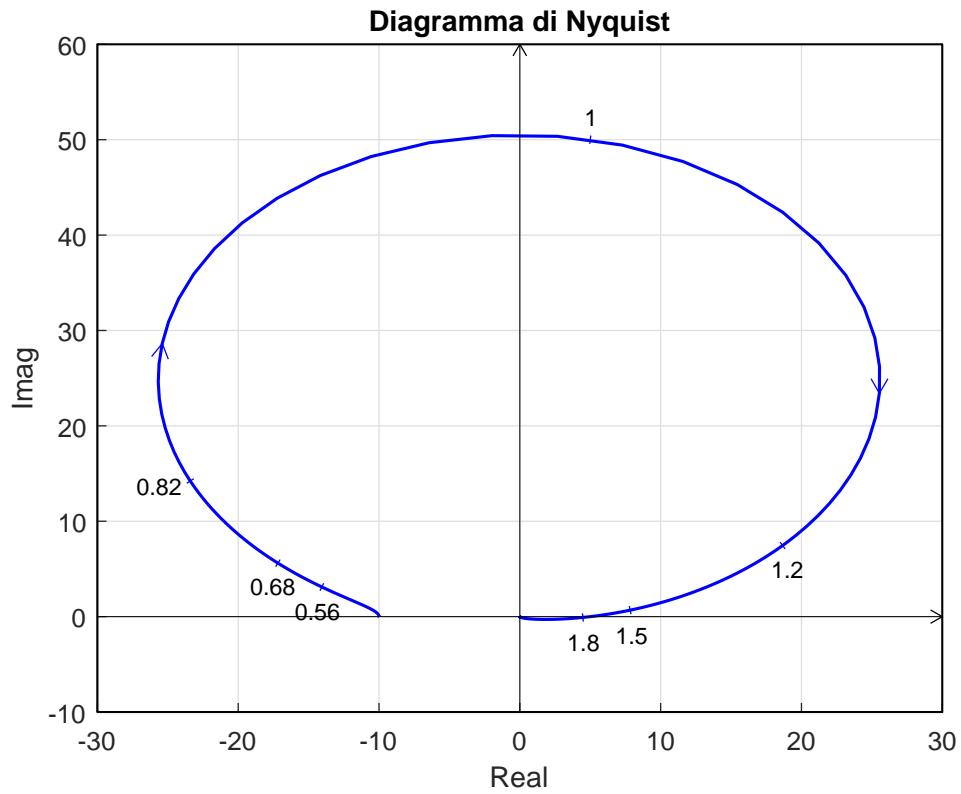


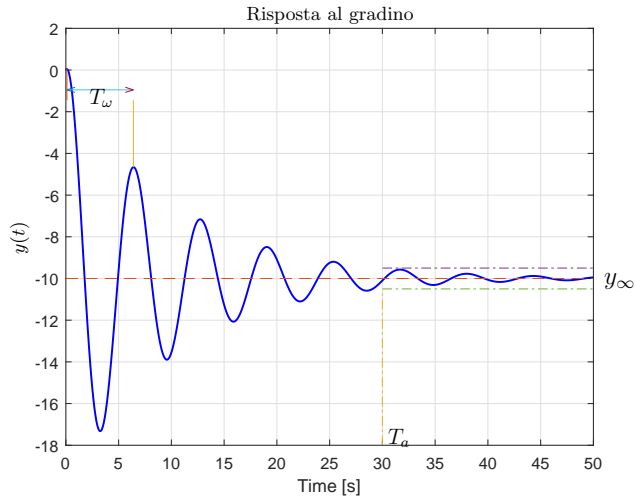
Figura 6: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

Valore a regime y_∞ per $t \rightarrow \infty$:

$$y_\infty = -10,$$

Tempo di assestamento T_a :

$$T_a \simeq \frac{3}{0.1} = 30 \text{ s}$$

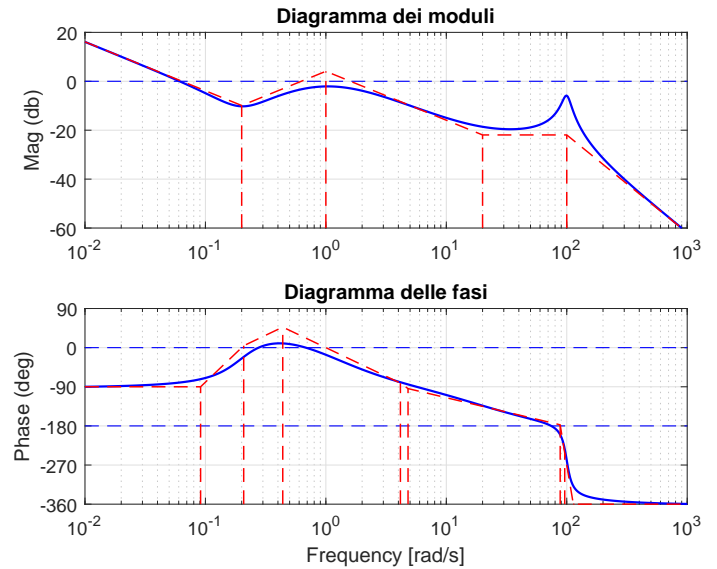


f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{-800(s-20)(s^2+0.2s+0.04)}{s(s+1)^2(s^2+16s+10000)}$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ .



Soluzione. La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{-800(s-20)(s^2+0.2s+0.04)}{s(s+1)^2(s^2+16s+10000)}$$

Il valore $K = -800$ può essere calcolato in due modi diversi:

1) calcolando il modulo β dell'approssimante $G_0(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.2$:

$$|G_0(s)|_{s=0.2j} = \left| \frac{-8 \cdot 10^{-5} K}{s} \right|_{s=0.2j} = \frac{8 \cdot 10^{-5} K}{0.2} = \beta \simeq -9.9 \text{ db} \simeq 0.32 \quad \Rightarrow \quad K \simeq -800.$$

2) calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 100$:

$$|G_\infty(s)|_{s=100j} = \left| \frac{K}{s^2} \right|_{s=100j} = \frac{K}{100^2} = \gamma \simeq -21.9 \text{ db} \simeq 0.08 \quad \rightarrow \quad K \simeq -800.$$

I coefficienti di smorzamento δ delle coppie di poli o zeri complessi coniugati presenti all'interno della funzione $G(s)$ sono i seguenti:

$$\begin{aligned} (s^2 + 16s + 100^2) &\rightarrow M_{\omega_n} \simeq 15.9 \text{ db} = 6.25 &\rightarrow \delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq 0.08 \\ (s^2 + 0.2s + 0.2^2) &\rightarrow M_{\omega_n} \simeq 0 \text{ db} = 1 &\rightarrow \delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq 0.5 \\ (s^2 + 2s + 1^2) &\rightarrow M_{\omega_n} \simeq -6.02 \text{ db} = 0.5 &\rightarrow \delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq 1 \end{aligned}$$

I valori M_{ω_n} si leggono sul diagramma di Bode dei moduli come distanza tra il diagramma asintotico e il diagramma reale alla pulsazione ω_n .

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. Elet. Telec. Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$2\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 5y(t) = 6\ddot{x}(t) + 7x(t) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{6s^2 + 7}{2s^3 + 3s^2 + 5s + 1}$$

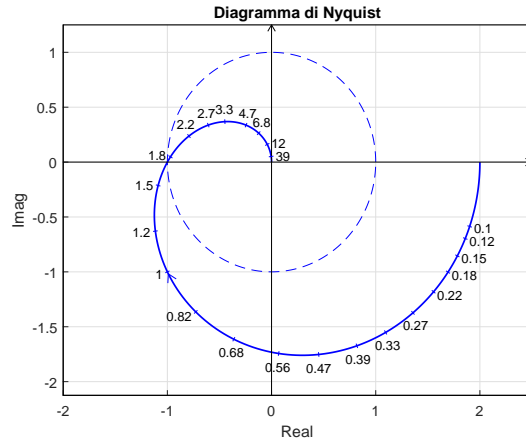
2. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $\frac{3(1-s)}{(s+1)^2}$.

Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K :

- $K_1^* < K < K_2^* < 0$;
- $K_1^* < K < K_2^*$;
- $0 < K_1^* < K < K_2^*$;
- $(K < K_1^*) \cup (K > K_2^*)$;

Indicare i valori dei parametri K_1^* e K_2^* :

$$K_1^* = -\frac{1}{2}, \quad K_2^* = 1$$



3. Calcolare, a regime, il segnale sinusoidale in uscita $y(t)$ del seguente sistema dinamico quando in ingresso è presente il segnale sinusoidale $x(t)$:

$$x(t) = 3 + 2 \cos(4t) \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{10}{(s+3)}} \quad \rightarrow \quad y(t) \simeq 10 + 4 \cos(4t - \arctan \frac{4}{3})$$

4. Enunciare il criterio di Nyquist nella formulazione valida anche per sistemi instabili ad anello aperto. Fornire sia l'ipotesi che la tesi del criterio.

Criterio di Nyquist. Nell'ipotesi che il sistema ad anello aperto non presenti poli immaginari, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ circonda il punto critico $-1+j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $F(s)$ con parte reale positiva.

5. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2(4s-5)(s+1)}{s[(s+2)^2+1]} \quad \rightarrow \quad y_0 = 8, \quad y_\infty = -2$$

6. La formula di Bode per il calcolo della fase di un sistema a partire dal diagramma delle ampiezze

- è valida per i sistemi lineari stabili è una formula approssimata
 è valida per i sistemi a fase minima è una formula esatta

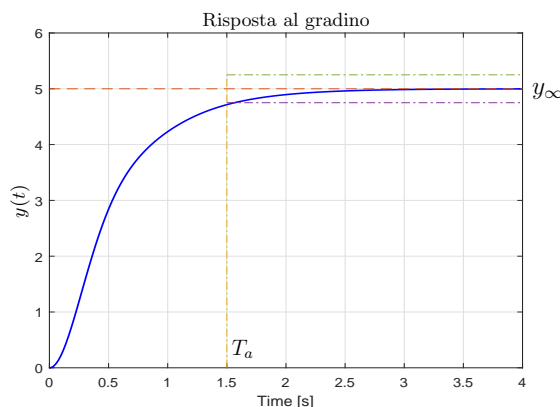
7. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{48(6 + 0.5s)(2s + 20)}{(2s + 18)(0.5s + 1)(s^2 + 10s + 64)}$$

Calcolare inoltre:

- a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \rightarrow \infty$;
 b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
 c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$$y_\infty = 5, \quad T_a \simeq 1.5 \text{ s}, \quad T_\omega \simeq \emptyset$$



8. Calcolare i parametri a , b e c della funzione di trasferimento $G(s)$ caratterizzata da un guadagno statico $G(0) = 5$, da una pulsazione naturale $\omega_n = 3$ e da un tempo di assestamento $T_a = 2$ s alla risposta al gradino:

$$G(s) = \frac{a}{s^2 + bs + c} \quad \rightarrow \quad a = 45, \quad b = 3 \quad c = 9.$$

9. In un sistema del 2° ordine la distanza dei poli dall'origine (a parità di direzione) influisce sui seguenti parametri della risposta al gradino

- tempo di salita tempo di ritardo
 coefficiente di smorzamento tempo di assestamento

10. Nella scomposizione in fratti semplici, qual è la posizione $p_{1,2}$ e il grado di molteplicità ν della coppia di poli complessi coniugati $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ corrispondente all'andamento temporale $g_1(t) = 3te^{2t} \cos(5t + 4)$:

$$p_{1,2} = \sigma \pm j\omega = 2 \pm j5 \quad \nu = 2$$

11. Un ritardo puro $G(s) = e^{-t_0s}$:

- è un sistema dinamico è un sistema lineare è un sistema a fase minima

12. La pulsazione di risonanza ω_R di un sistema del 2° ordine è:

- $\omega_R = \omega_n \delta \sqrt{1 - \delta^2}$ $\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2}$ $\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2}$ $\omega_R = \omega_n \delta \sqrt{1 - 2\delta^2}$

13. Sia $X(s)$ la trasformata di Laplace del segnale $x(t)$. Fornire l'enunciato del "Teorema della derivata":

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s) - x(0)$$

14. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(4s + 1)}{s(s - 3)^2} e^{-2s} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{16\omega^2 + 1}}{\omega(\omega^2 + 3^2)} \\ \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2\omega + \arctan 4\omega - 2(\pi - \arctan \frac{\omega}{3}) \end{cases}$$