Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Controlli Automatici - Prima parte
23 Giugno 2025 - Esercizi - ELE

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = [2\cos(3t) - 7\,t]\,e^{-4t}, \qquad x_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ 2\,e^{-3\,(t-4)}\sin(5(t-4)) & t \geq 4 \end{cases}$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{2\,(s+4)}{(s+4)^2+9} - \frac{7}{(s+4)^2}, \qquad X_2(s) = \frac{10}{(s+3)^2+25}\,e^{-4s}.$$

a.2) Calcolare la trasformata di Laplace inversa $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ delle seguenti funzioni $Y(s)$:

$$Y_1(s) = \frac{30}{s(s+3)(s-2)}, \qquad Y_2(s) = \frac{24}{s^4} + \frac{6}{(s+4)^3} + 2\,e^{-3\,s}$$

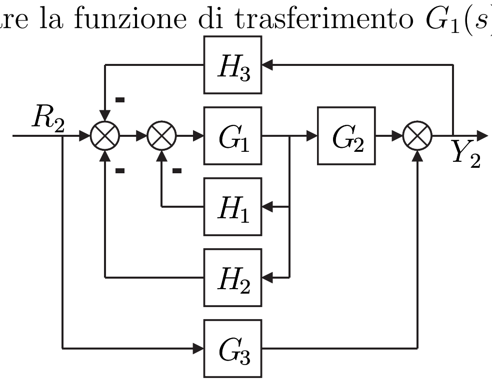
Soluzione:

$$y_1(t) = -5 + 2\,e^{-3t} + 3\,e^{2t}, \qquad y_2(t) = 4\,t^3 + 3\,t^2 e^{-4\,t} + 2\,\delta(t-3)$$

Infatti, per la funzione $Y_1(s)$ si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}[Y_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{30}{s(s+3)(s-2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{5}{s} + \frac{2}{(s+3)} + \frac{3}{(s-2)}\right] = -5 + 2\,e^{-3t} + 3\,e^{2t}$$

b) Dato lo schema a blocchi riportato in figura, calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s)$:



$$G_1(s) = \frac{Y_2(s)}{R_2(s)} = \frac{G_1G_2 + G_3(1 + G_1H_1 + G_1H_2)}{1 + G_1H_1 + G_1H_2 + G_1G_2H_3}$$

c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;

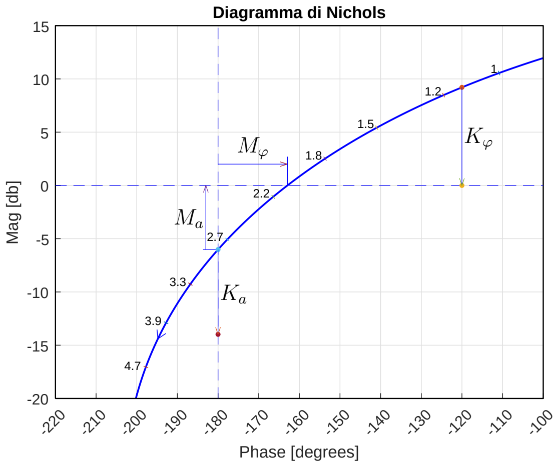
c.2) il margine di fase M_φ del sistema;

c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\,G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 60$;

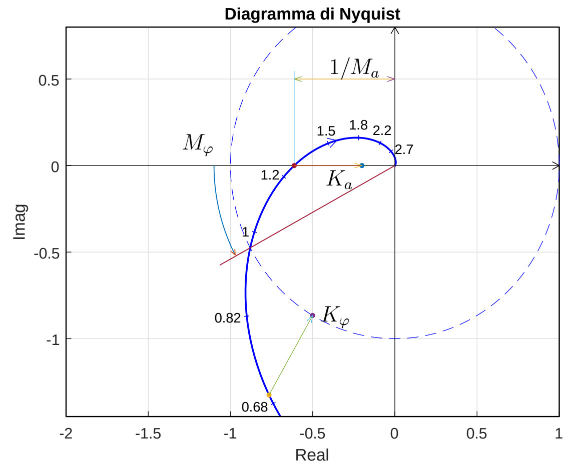
c.4) il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha\,G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 5$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$

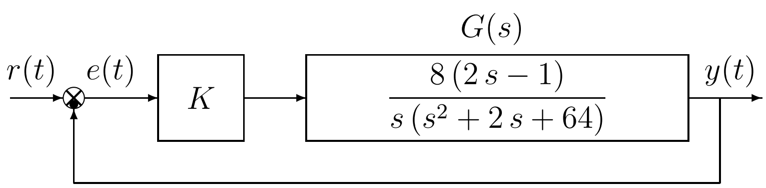


$G_2(j\omega)$



c.1) $M_a = 6.02$ db $= 2$	c.1) $M_a = 1.63$
c.2) $M_\varphi = 17.1$	c.2) $M_\varphi = 28.4$
c.3) $K_\varphi = -9.21$ db $= 0.346$	c.3) $K_\varphi = 0.653$
c.4) $K_a = -7.96$ db $= 0.4$	c.4) $K_a = 0.327$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K\,\frac{8\,(2\,s-1)}{s\,(s^2+2\,s+64)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 2s^2 + (16K+64)s + (-8K) = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 16K+64 \\ 2 & 2 & -8K \\ 1 & 40K+128 & \\ 0 & -8K & \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano positivi si ricavano i seguenti vincoli:

$$40K + 128 > 0, \qquad -8K > 0,$$

dai quali si ricava:

$$K > -3.2, \qquad K < 0.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K_1 = -3.2 < K < 0.$$

La pulsazione ω_1 corrispondente al valore limite K_1 è:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{-8K_1}{2}} = 3.5777.$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

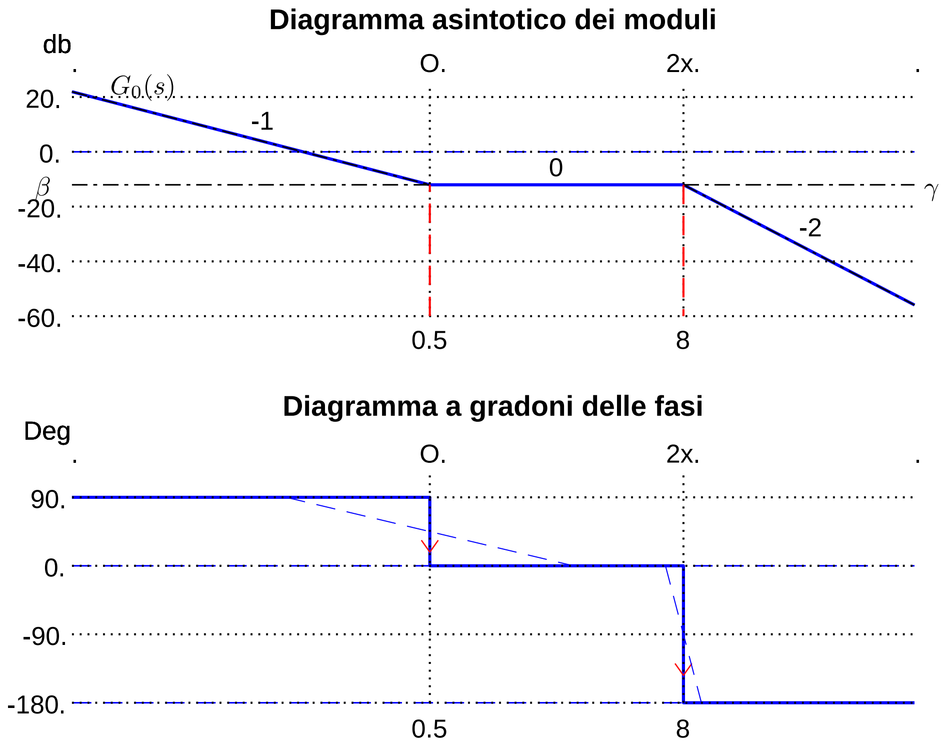


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{-0.125}{s} = \frac{K}{s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{16}{s^2}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{3\,\pi}{2}, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\pi.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.5$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 8$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.5} = 0.25 = -12.04 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=8} = 0.25 = -12.04 \text{ db}.$$

Coefficienti di smorzamento dei poli complessi coniugati: $\delta_1 = 0.125$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 3. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{3\,\pi}{2}$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è negativa:

$$\Delta\tau = \frac{2}{-1} - \frac{2}{64} = -2.031 < 0.$$

Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto. La posizione dell'asintoto è la seguente:

$$\sigma_a = K\Delta_\tau = -0.125 \cdot (-2.0312) = 0.25391.$$

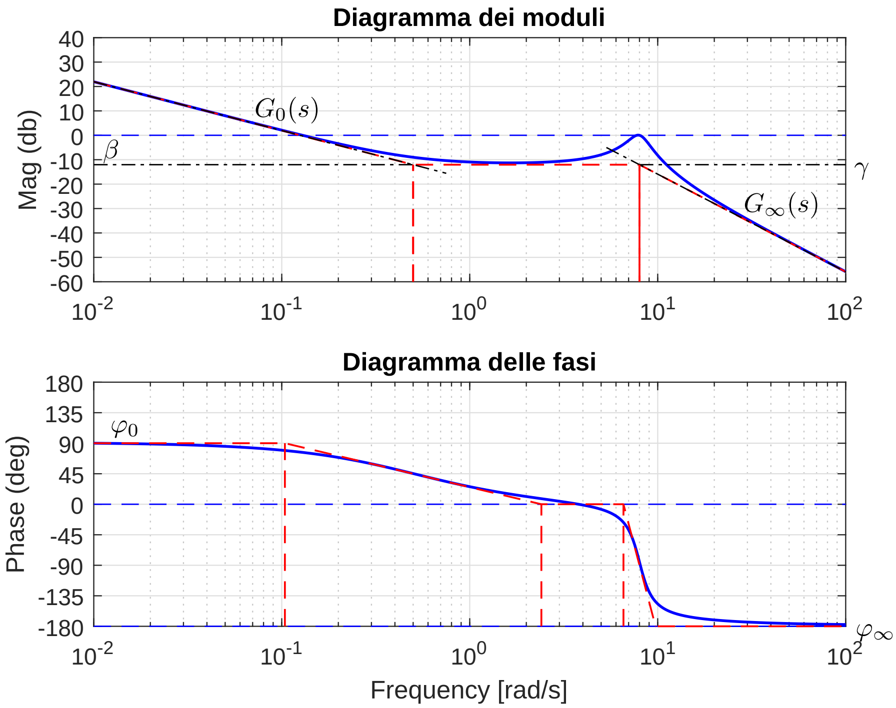


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

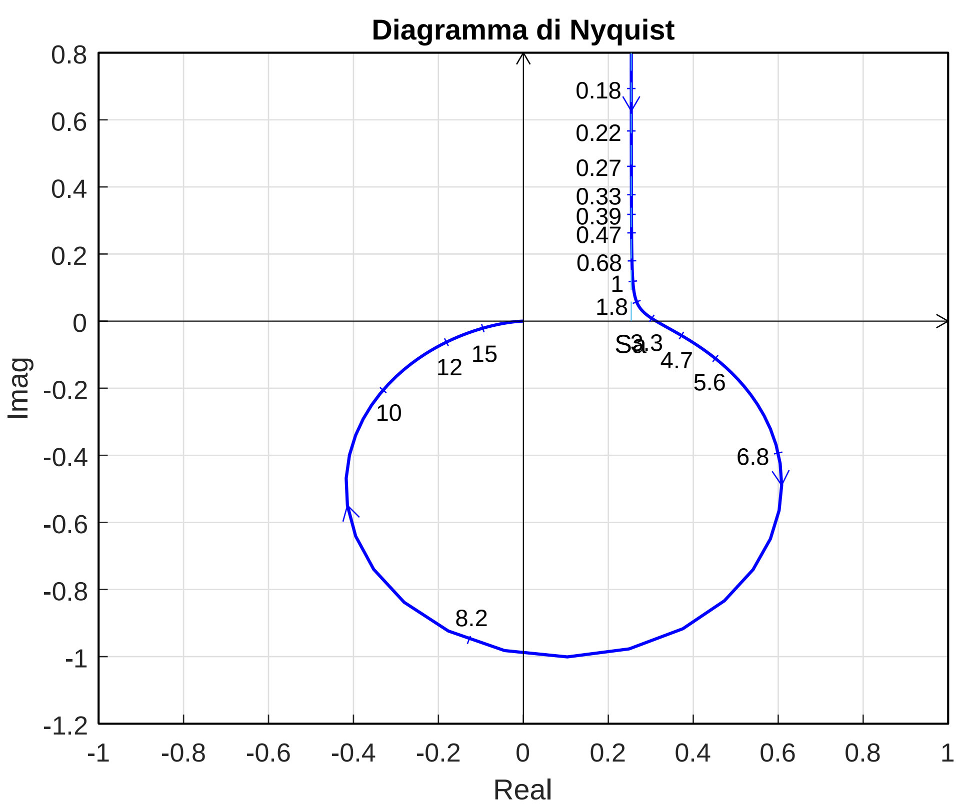


Figura 3: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

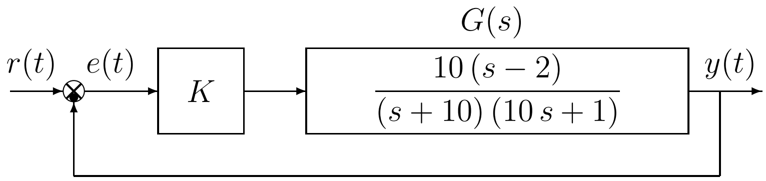
Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{3\,\pi}{2}.$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $-\frac{3\,\pi}{2}$ in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\pi$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\pi$ in quanto la somma Δ_p del sistema è positiva:

$$\Delta_p = 0.5 + 2 = 2.5 > 0.$$

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K\,\frac{10\,(s-2)}{(s+10)\,(10\,s+1)} = 0 \qquad \to \qquad 10s^2 + (10K + 101)s + (10.0 - 20K) = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 10 & 10.0 - 20K \\ 1 & 10K + 101 & \\ 0 & 10.0 - 20K & \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano positivi si ricavano i seguenti vincoli:

$$10K + 101 > 0, \qquad\qquad 10.0 - 20K > 0,$$

dai quali si ricava:

$$K > -10.1, \qquad\qquad K < 0.5.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K_1 = -10.1 < K < 0.5.$$

La pulsazione ω_1 corrispondente al valore limite K_1 è:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{10.0 - 20K_1}{10}} = 4.6043.$$

e.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

<u>Soluzione</u>.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = -2, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{1}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\pi, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

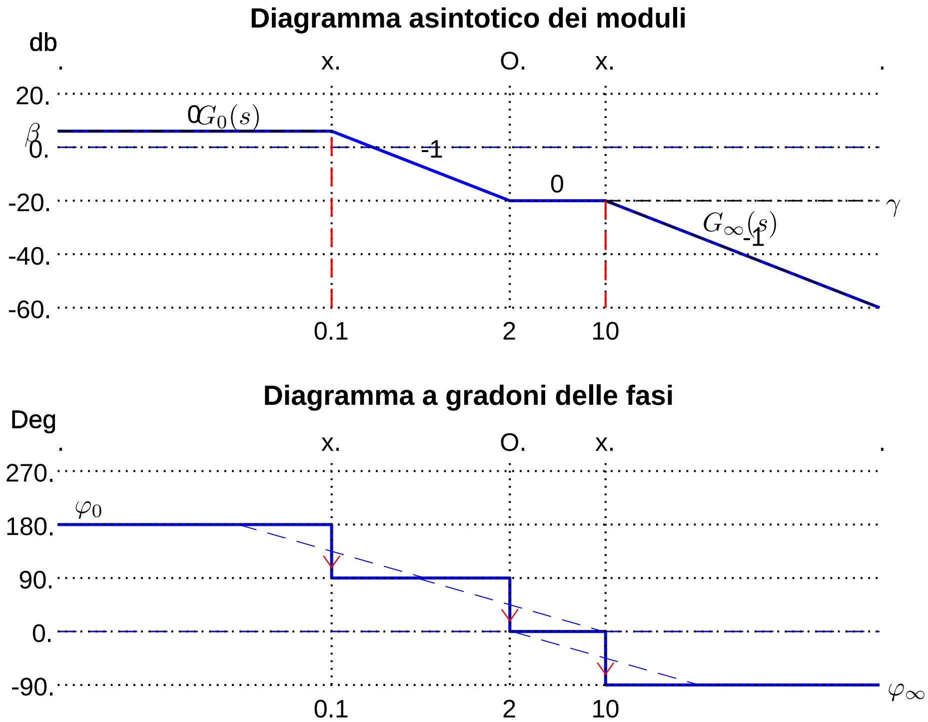


Figura 4: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

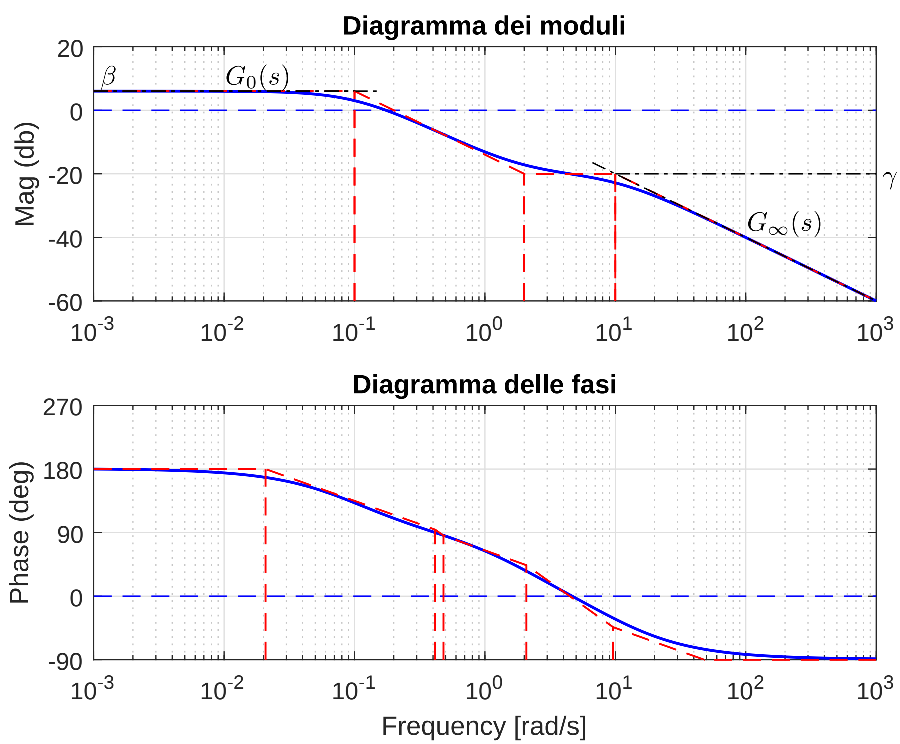


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.1} = 2 = 6.021 \text{ db}, \qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = 0.1 = -20 \text{ db}.$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

e.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 6. La fase iniziale

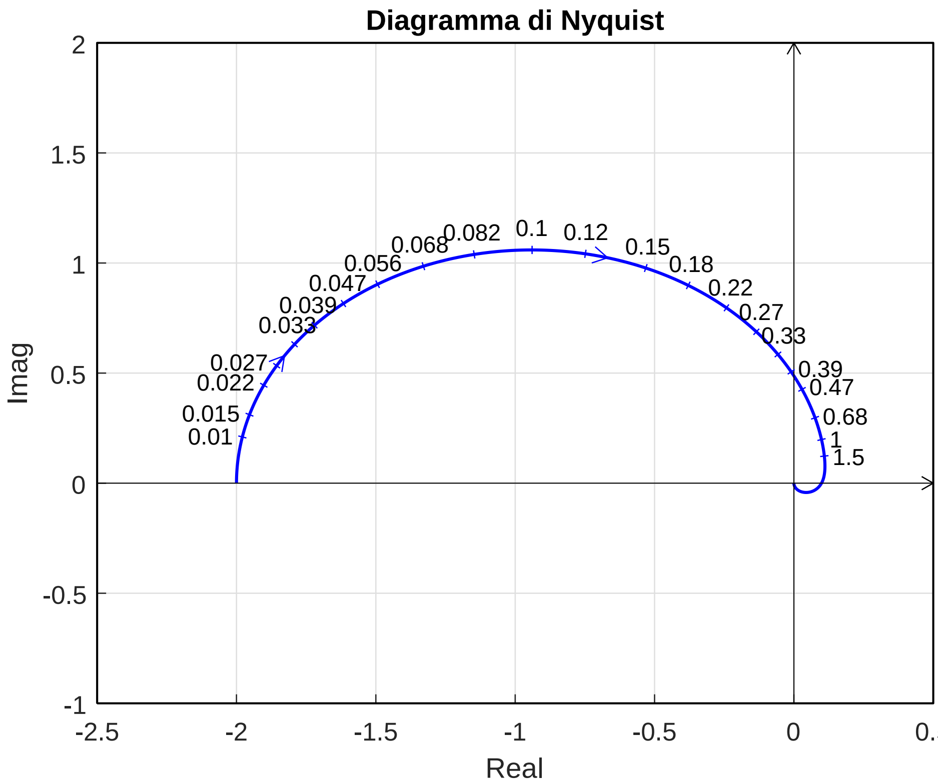


Figura 6: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

del sistema è $\varphi_0 = -\pi$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è negativa:

$$\Delta\tau = \frac{1}{-2} - \frac{1}{10} - 10 = -10.6 < 0.$$

Il sistema è di tipo 0 per cui nel diagramma di Nyquist non è presente nessun asintoto. Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = -\pi$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}.$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $-\frac{3\pi}{2}$ in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p del sistema è positiva:

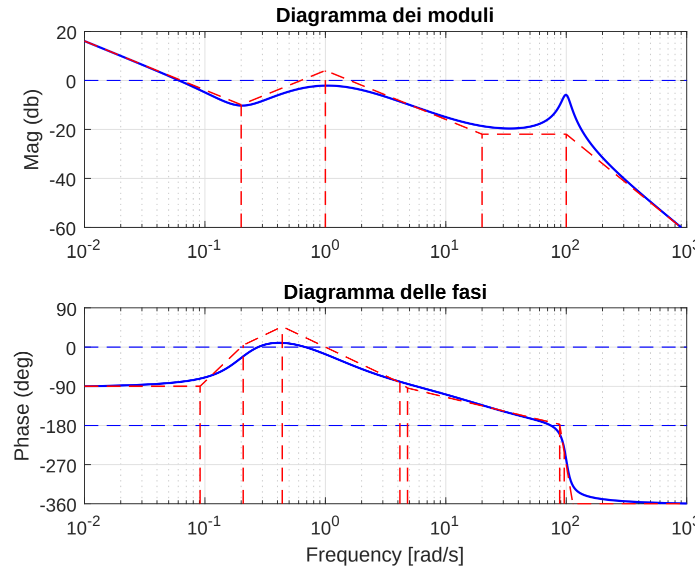
$$\Delta_p = 2 + 10 + 0.1 = 12.1 > 0.$$

f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{-800\,(s-20)\,(s^2+0.2\,s+0.04)}{s\,(s+1)^2\,(s^2+16\,s+10000)}$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.



Soluzione. La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{-800\,(s-20)\,(s^2+0.2\,s+0.04)}{s\,(s+1)^2\,(s^2+16\,s+10000)}$$

Il valore $K = -800$ puó essere calcolato in due modi diversi:

1) calcolando il modulo β dell'approssimante $G_0(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.2$:

$$|G_0(s)|_{s=0.2\,j} = \left|\frac{-8\cdot 10^{-5}\,K}{s}\right|_{s=0.2\,j} = \frac{8\cdot 10^{-5}\,K}{0.2} = \beta \simeq -9.9 \text{ db} \simeq 0.32 \quad \Rightarrow \quad K \simeq -800.$$

2) calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 100$:

$$|G_\infty(s)|_{s=100\,j} = \left|\frac{K}{s^2}\right|_{s=100\,j} = \frac{K}{100^2} = \gamma \simeq -21.9 \text{ db} \simeq 0.08 \quad \to \quad K \simeq -800.$$

I coefficienti di smorzamento δ delle coppie di poli o zeri complessi coniugati presenti all'interno della funzione G(s) sono i seguenti:

$$\begin{array}{llll}
(s^2+16\,s+100^2) & \to \quad M_{\omega_n} \simeq 15.9 \text{ db} = 6.25 & \to & \delta = \frac{1}{2\,M_{\omega_n}} \simeq 0.08 \\
(s^2+0.2\,s+0.2^2) & \to \quad M_{\omega_n} \simeq 0 \text{ db} = 1 & \to & \delta = \frac{1}{2\,M_{\omega_n}} \simeq 0.5 \\
(s^2+2\,s+1^2) & \to \quad M_{\omega_n} \simeq -6.02 \text{ db} = 0.5 & \to & \delta = \frac{1}{2\,M_{\omega_n}} \simeq 1
\end{array}$$

I valori M_{ω_n} si leggono sul diagramma di Bode dei moduli come distanza tra il diagramma asintotico e il diagramma reale alla pulsazione ω_n.

Controlli Automatici - Prima parte

23 Giugno 2025 - Domande - ELE

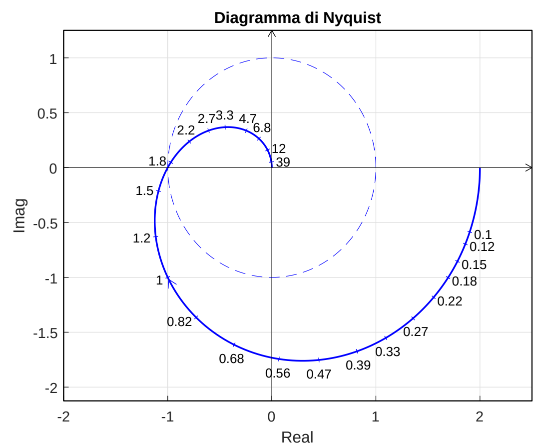
Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$2\,\dddot{y}(t) + 3\,\ddot{y}(t) + 5\,\dot{y}(t) + y(t) = 6\,\ddot{x}(t) + 7\,x(t) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{6\,s^2 + 7}{2\,s^3 + 3\,s^2 + 5\,s + 1}$$

2. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $\frac{3(1-s)}{(s+1)^2}$. Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:



○ $K_1^* < K < K_2^* < 0$;

⊗ $K_1^* < K < K_2^*$;

○ $0 < K_1^* < K < K_2^*$;

○ $(K < K_1^*) \cup (K > K_2^*)$;

Indicare i valori dei parametri K_1^* e K_2^*:

$$K_1^* = -\frac{1}{2}, \qquad\qquad K_2^* = 1$$

3. Calcolare, a regime, il segnale sinusoidale in uscita $y(t)$ del seguente sistema dinamico quando in ingresso è presente il segnale sinusoidale $x(t)$:

$$x(t) = 3 + 2\cos(4t) \longrightarrow \boxed{\frac{10}{(s+3)}} \longrightarrow y(t) \simeq 10 + 4\,\cos(4t - \arctan\tfrac{4}{3})$$

4. Enunciare il criterio di Nyquist nella formulazione valida anche per sistemi instabili ad anello aperto. Fornire sia l'ipotesi che la tesi del criterio.

Criterio di Nyquist. Nell'ipotesi che il sistema ad anello aperto non presenti poli immaginari, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ circondi il punto critico $-1{+}j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $F(s)$ con parte reale positiva.

5. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+} y(t)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2\,(4s-5)(s+1)}{s[(s+2)^2+1]} \qquad \rightarrow \qquad y_0 = 8, \qquad\qquad y_\infty = -2$$

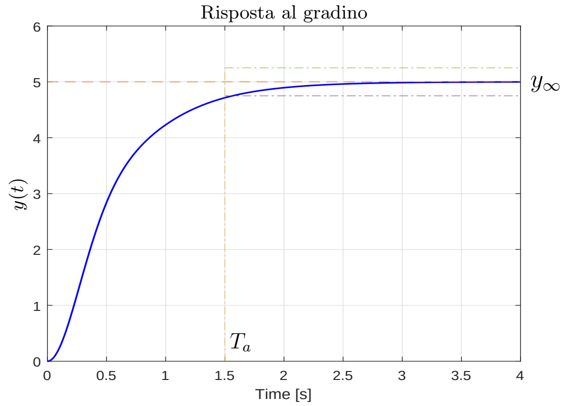
6. La formula di Bode per il calcolo della fase di un sistema a partire dal diagramma delle ampiezze

○ è valida per i sistemi lineari stabili ○ è una formula approssimata

⊗ è valida per i sistemi a fase minima ⊗ è una formula esatta

7. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

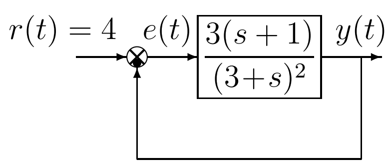
$$G(s) = \frac{48(6+0.5s)(2s+20)}{(2s+18)(\mathbf{0.5s+1})(s^2+10s+64)}$$

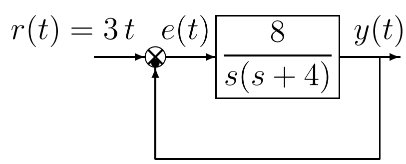


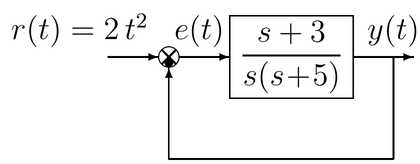
Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$$y_\infty = 5, \qquad T_a \simeq 1.5\,\mathrm{s}, \qquad T_\omega \simeq \nexists$$

8. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:







$$e(\infty) = \frac{4}{1+\frac{1}{3}} = \frac{12}{4} = 3 \qquad e(\infty) = \frac{3}{2} = 1.5 \qquad e(\infty) = \infty$$

9. In un sistema del 2^o ordine la distanza del poli dall'origine (a parità di direzione) influisce sui seguenti parametri della risposta al gradino

⊗ tempo di salita ⊗ tempo di ritardo

○ coefficiente di smorzamento ⊗ tempo di assestamento

10. Nella scomposizione in fratti semplici, qual è la posizione $p_{1,2}$ e il grado di molteplicitá ν della coppia di poli complessi coniugati $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ corrispondente all'andamento temporale $g_1(t) = 3\,t\,e^{2\,t}\cos(5\,t+4)$:

$$p_{1,2} = \sigma \pm j\omega = 2 \pm j\,5 \qquad \nu = 2$$

11. Un ritardo puro $G(s) = e^{-t_0 s}$:

⊗ è un sistema dinamico ⊗ è un sistema lineare ○ è un sistema a fase minima

12. La pulsazione di risonanza ω_R di un sistema del 2° ordine è:

○ $\omega_R = \omega_n \delta\sqrt{1-\delta^2}$ ⊗ $\omega_R = \omega_n\sqrt{1-2\delta^2}$ ○ $\omega_R = \omega_n\sqrt{1-\delta^2}$ ○ $\omega_R = \omega_n\delta\sqrt{1-2\delta^2}$

13. Sia $X(s)$ la trasformata di Laplace del segnate $x(t)$. Fornire l'enunciato del "Teorema della derivata":

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = s\,X(s) - x(0)$$

14. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(4s+1)}{s(s-3)^2}\,e^{-2s} \qquad \to \qquad \begin{cases} M(\omega) = \dfrac{\sqrt{16\omega^2+1}}{\omega(\omega^2+3^2)} \\ \varphi(\omega) = -\dfrac{\pi}{2} - 2\,\omega + \arctan 4\omega - 2(\pi - \arctan\dfrac{\omega}{3}) \end{cases}$$