Controlli Automatici - Prima parte
23 Gennaio 2026 - Esercizi - INFO

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = 4\,t^3 + e^{-6\,t}\sin(2\,t), \qquad\qquad x_2(t) = 2\,t\,e^{4t} + 5\,\cos(3\,t)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{24}{s^4} + \frac{2}{(s+6)^2+2^2}, \qquad\qquad X_2(s) = \frac{2}{(s-4)^2} + \frac{5\,s}{s^2+9}$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G(s)$:

$$G_1(s) = 3 + \frac{2}{s(1+s)(1+2s)}, \qquad\qquad G_2(s) = \frac{(s+3)\,e^{-2s}}{(s+3)^2+25}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = 3\,\delta(t) + 2 + 2\,e^{-t} - 4\,e^{-0.5\,t}, \qquad\qquad g_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ e^{-3(t-2)}\cos(5(t-2)) & t \geq 2 \end{cases}$$

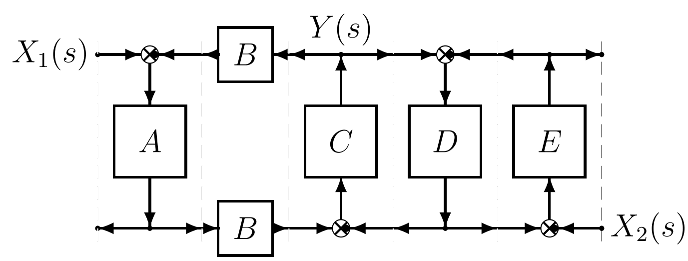
Infatti, per la seconda parte $\bar{G}_1(s)$ della funzione $G_1(s)$ si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\bar{G}_1(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)(s+0.5)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} + \frac{2}{(s+1)} - \frac{4}{(s+0.5)}\right] = 2 + 2\,e^{-t} - 4\,e^{-0.5\,t}.$$

b) Relativamente allo schema a blocchi riportato in figura, calcolare le funzioni di trasferimento $G_1(s)$ e $G_2(s)$:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{X_1(s)} = \frac{ABC(1+DE)}{1+AB^2C+CD+DE+AB^2CDE}$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{X_2(s)} = \frac{-CDE}{1+AB^2C+CD+DE+AB^2CDE}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;

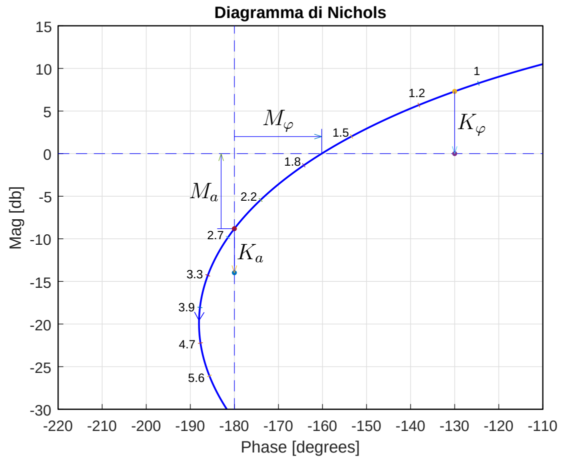
c.2) il margine di fase M_φ del sistema;

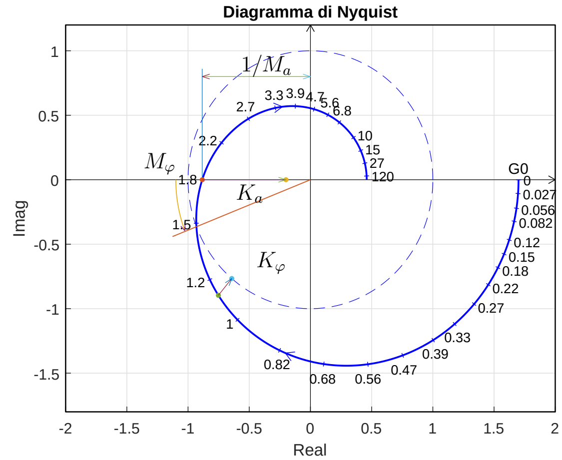
c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\,G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 50$;

c.4) il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha\,G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 5$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$ $\qquad\qquad$ $G_2(j\omega)$





c.1) $\quad M_a = 8.81$ db $= 2.76$ $\qquad\qquad$ c.1) $\quad M_a = 1.13$

c.2) $\quad M_\varphi = 19.8$ $\qquad\qquad$ c.2) $\quad M_\varphi = 21.4$

c.3) $\quad K_\varphi = -7.3$ db $= 0.431$ $\qquad\qquad$ c.3) $\quad K_\varphi = 0.855$

c.4) $\quad K_a = -5.17$ db $= 0.552$ $\qquad\qquad$ c.4) $\quad K_a = 0.226$

d) Sia dato il seguente sistema ad anello aperto:

$$r(t) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{2(s+0.2)(s+50)}{(s+1)(s^2+2s+36)}} \longrightarrow y(t)$$

d.1) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

<u>Soluzione</u>.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = 0.55556, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{2}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = 0, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.2$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 50$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.2} = 0.5556 = -5.105 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=50} = 0.04 = -27.96 \text{ db}.$$

Coefficienti di smorzamento dei poli complessi coniugati: $\delta_1 = 0.16667$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

d.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale.

<u>Soluzione</u>. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 3. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = 0$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = 5 + \frac{1}{50} - 1 - \frac{2}{36} = 3.964 > 0.$$

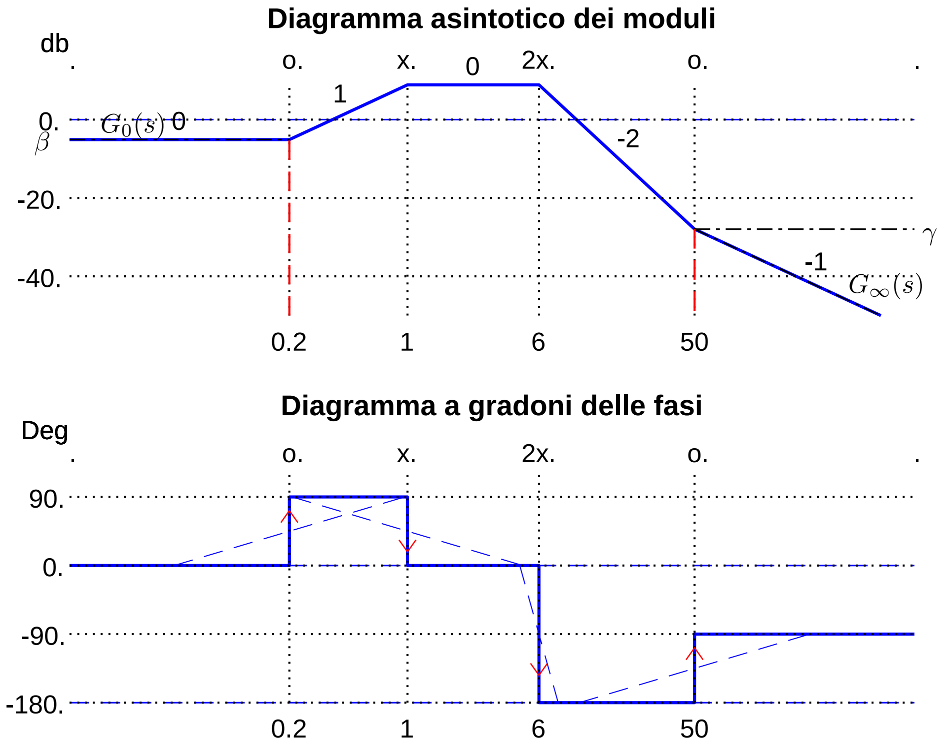


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

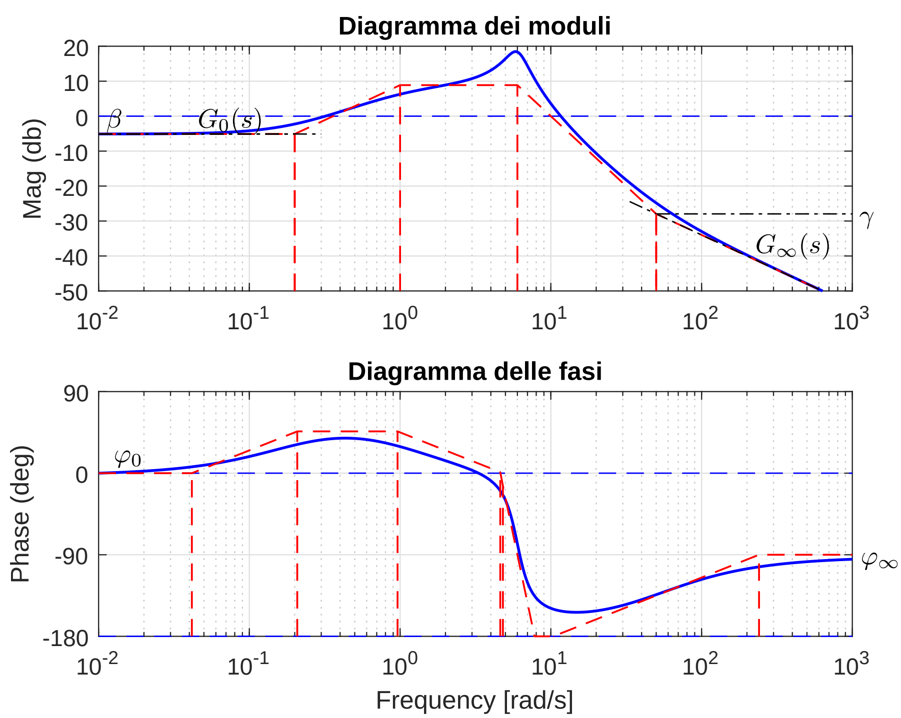


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

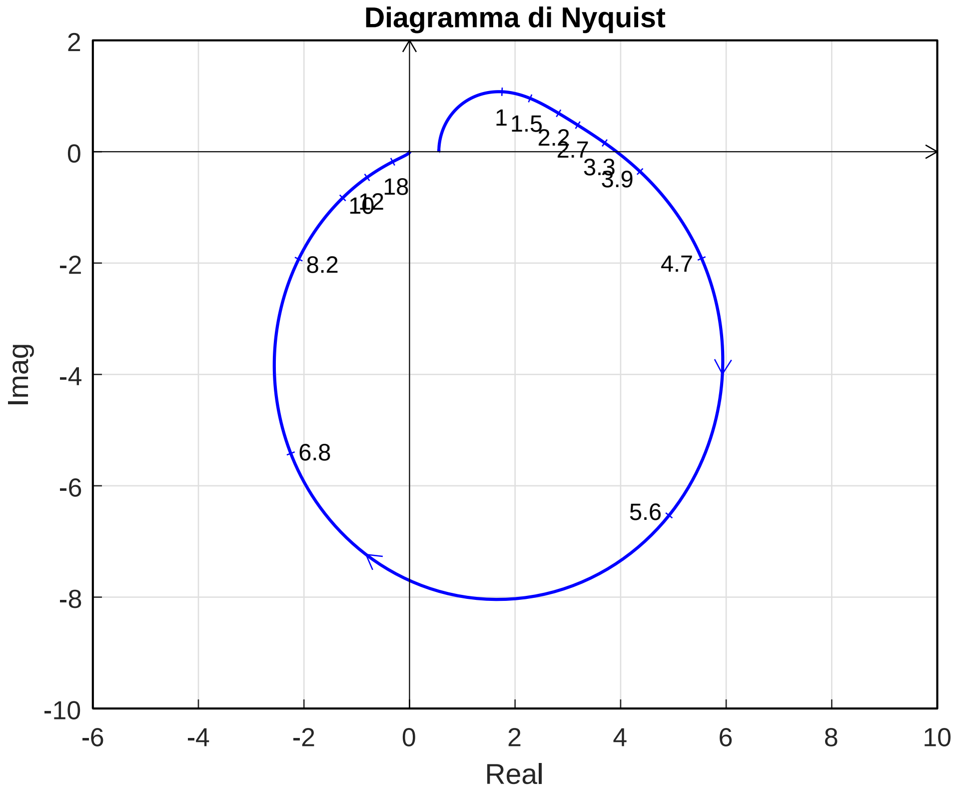


Figura 3: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

Il sistema è di tipo 0 per cui nel diagramma di Nyquist non è presente nessun asintoto. Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = 0$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}.$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $-\frac{\pi}{2}$ in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p del sistema è negativa:

$$\Delta_p = -0.2 - 50 + 1 + 2 = -47.2 < 0.$$

d.3) Disegnare l'andamento qualitativo $y(t)$ della risposta al gradino unitario del sistema $G(s)$. Valore a regime y_∞ per $t \to \infty$:

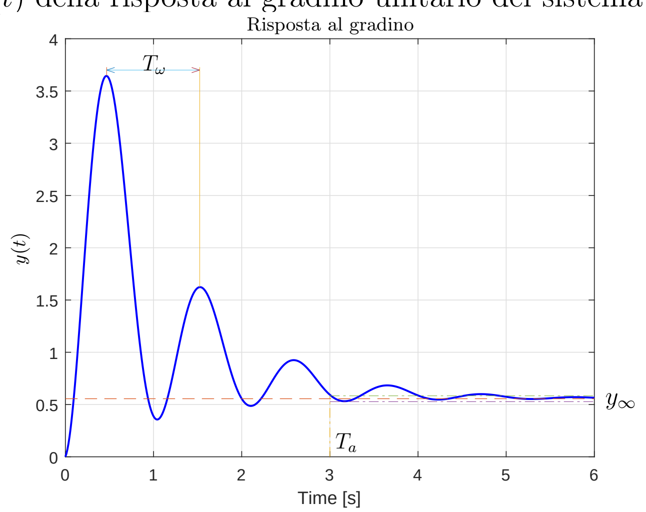
$$y_\infty = 0.55556,$$

Tempo di assestamento T_a:

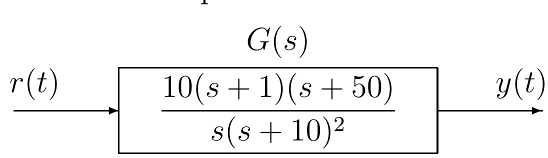
$$T_a \simeq 3\,\mathrm{s},$$

Il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata:

$$T_\omega \simeq \frac{2\pi}{6} \simeq 1.1\,\mathrm{s},$$



e) Sia dato il seguente sistema ad anello aperto:



e.1) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

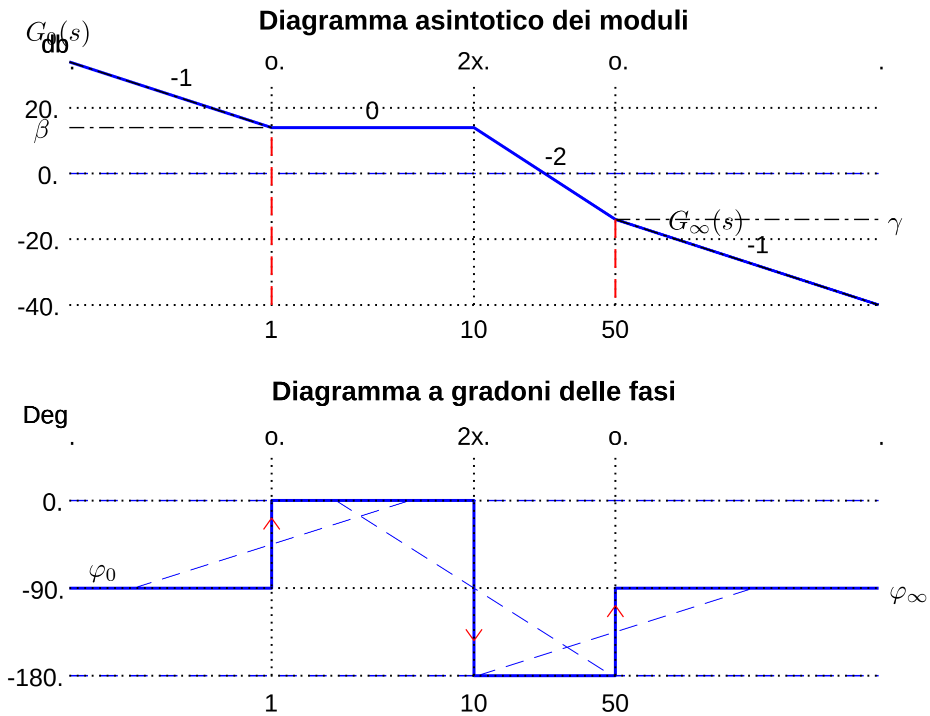


Figura 4: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{5}{s} = \frac{K}{s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{10}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 50$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=1} = 5 = 13.98 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=50} = 0.2 = -13.98 \text{ db}.$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

e.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 6. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = 1 + \frac{1}{50} - \frac{1}{10} - \frac{1}{10} = 0.82 > 0.$$

Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto. La posizione dell'asintoto è la seguente:

$$\sigma_a = K\Delta_\tau = 5 \cdot (0.82) = 4.1.$$

Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0,\ \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

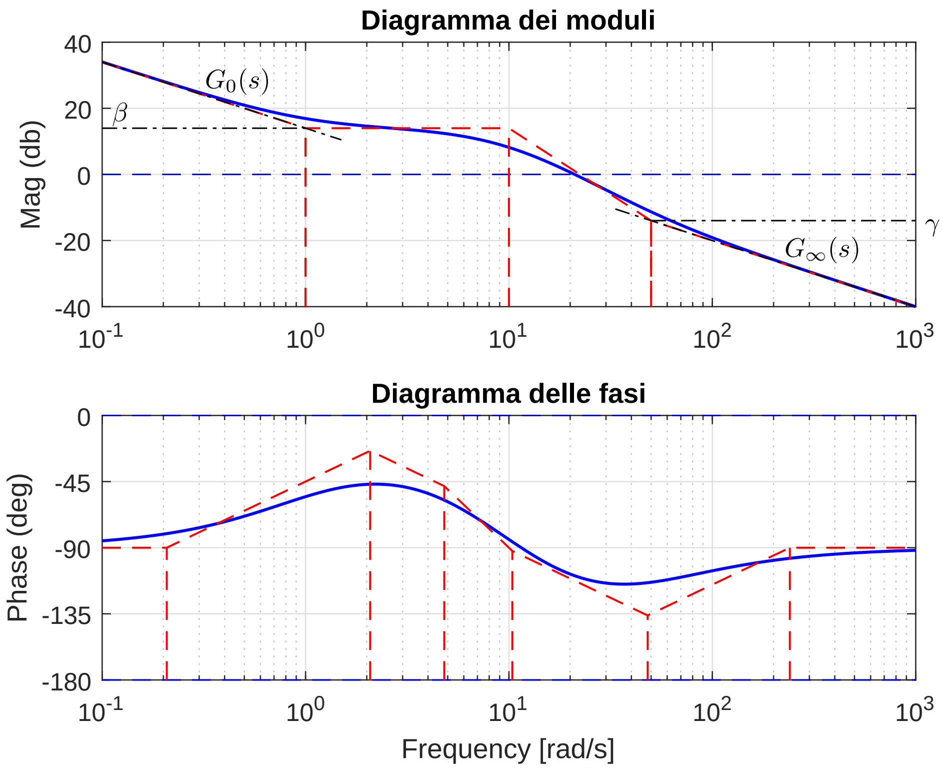


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

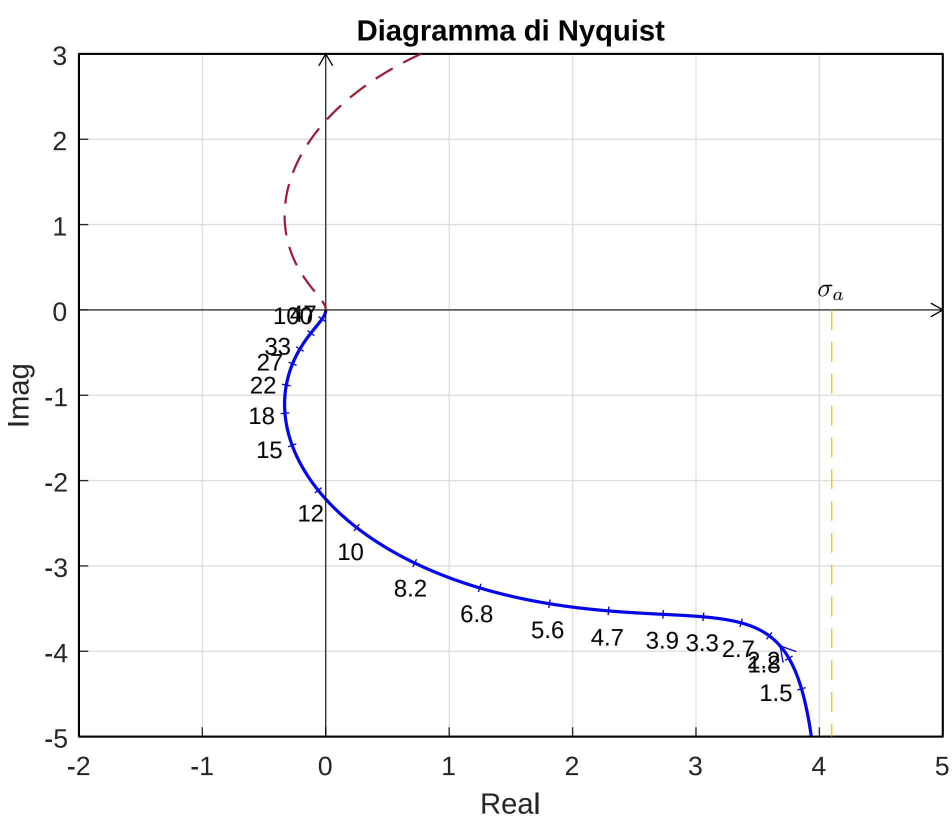
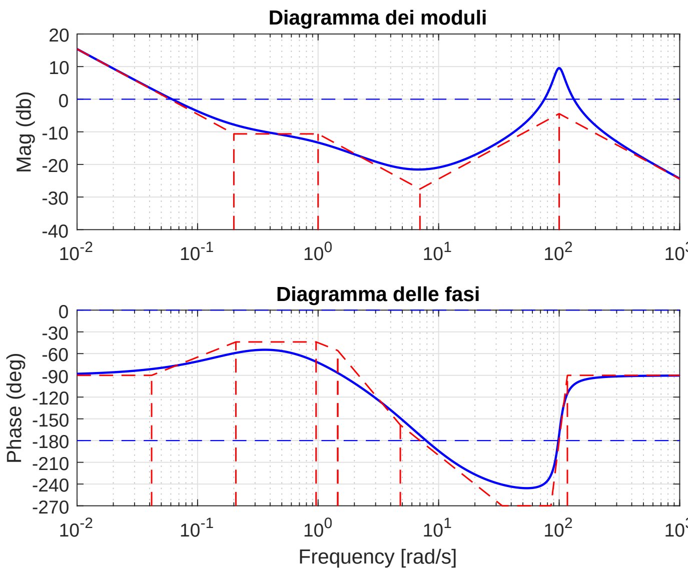


Figura 6: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di 0 in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p del sistema è negativa:

$$\Delta_p = -1 - 50 + 10 + 10 = -31 < 0.$$

f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.



Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{12\,(5\,s+1)\,(s-7)^2}{s\,(s+1)\,(s^2-20\,s+10000)}$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.

Soluzione. La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{12\,(5\,s+1)\,(s-7)^2}{s\,(s+1)\,(s^2-20\,s+10000)}$$

Il valore $K = 60$ puó essere calcolato in due modi diversi:

1) calcolando il modulo β dell'approssimante $G_0(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.2$:

$$|G_0(s)|_{s=0.2\,j} = \left|\frac{0.00098\,K}{s}\right|_{s=0.2\,j} = \frac{0.00098\,K}{0.2} = \beta \simeq -10.6 \text{ db} \simeq 0.294 \quad \Rightarrow \quad K \simeq 60.$$

2) calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 100$:

$$|G_\infty(s)|_{s=100\,j} = \left|\frac{K}{s}\right|_{s=100\,j} = \frac{K}{100} = \gamma \simeq -4.44 \text{ db} \simeq 0.6 \quad \rightarrow \quad K \simeq 60.$$

I coefficienti di smorzamento δ delle coppie di poli o zeri complessi coniugati presenti all'interno della funzione G(s) sono i seguenti:

$$\begin{array}{lclcl}
(s^2 - 20\,s + 100^2) & \rightarrow & M_{\omega_n} \simeq 14 \text{ db} = 5 & \rightarrow & \delta = \frac{1}{2\,M_{\omega_n}} \simeq 0.1 \\
(s^2 - 14\,s + 7^2) & \rightarrow & M_{\omega_n} \simeq -6.02 \text{ db} = 0.5 & \rightarrow & \delta = \frac{1}{2\,M_{\omega_n}} \simeq 1
\end{array}$$

I valori M_{ω_n} si leggono sul diagramma di Bode dei moduli come distanza tra il diagramma asintotico e il diagramma reale alla pulsazione ω_n.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Controlli Automatici - Prima parte

23 Gennaio 2026 - Domande - INFO

Si risponda alle seguenti domande.

1. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$\dddot{y}(t) + 2\,\ddot{y}(t) + 5\,y(t) = 4\,\dot{x}(t) + 3\,x(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4\,s+3}{s^3 + 2\,s^2 + 5}$$

2. La trasformata di Laplace:

- ⊗ è un operatore biunivoco;
- ◯ trasforma equazioni differenziali di variabile complessa in equazioni algebriche di variabile reale;
- ◯ è applicabile a qualunque segnale $x(t)$;
- ⊗ trasforma equazioni differenziali di variabile reale in equazioni algebriche di variabile complessa;

3. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+} y(t)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{6\,(s^2+3s+1)}{(s+2)^2(2\,s-3)} \qquad \rightarrow \qquad y_0 = 3 \qquad\qquad y_\infty = \nexists$$

4. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $2\dot{y}(t) + 3\,y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = 2$. Applicando la trasformata di Laplace si ha:

$$2\,(s\,Y(s) - 2) + 3\,Y(s) = 0 \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{2}{s+1.5} \quad \rightarrow \quad y(t) = 2\,e^{-1.5\,t}.$$

5. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale $x(t)$:

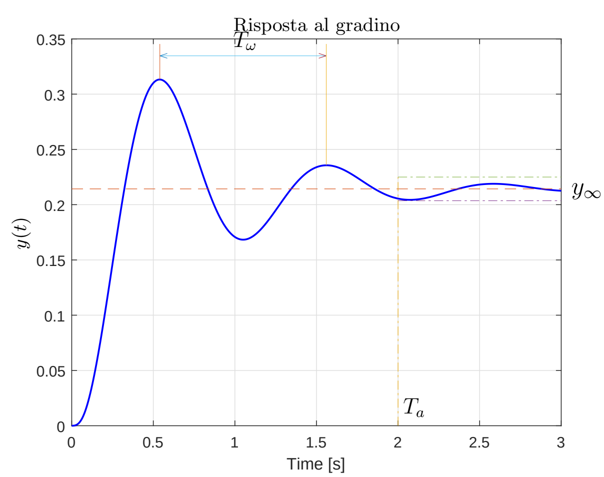
$$x(t) = 10 + 5\cos(3t) \;\longrightarrow\; \boxed{G(s) = \frac{s+1}{s+4}} \;\longrightarrow\; y(t) \simeq \tfrac{5}{2} + \sqrt{10}\cos(3t + \arctan 3 - \arctan\tfrac{3}{4})$$

6. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{6000(20+0.3s)(s^2+60s+90^2)}{(3s+210)(2s+150)(s^2+3s+40)(s^2+80s+3600)}$$

Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$$y_\infty = 21429, \qquad T_a \simeq 2\,\text{s}, \qquad T_\omega \simeq \frac{2\pi}{40} \simeq 1\,\text{s}.$$



7. Nella scomposizione in fratti semplici, qual è la posizione $p_{1,2}$ e il grado di molteplicitá ν della coppia di poli complessi coniugati $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ corrispondente all'andamento temporale $g_1(t) = 3\,t\,e^{2\,t}\cos(5\,t+4)$:

$$p_{1,2} = \sigma \pm j\omega = 2 \pm j\,5 \qquad\qquad \nu = 2$$

8. Calcolare i parametri a e b della funzione di trasferimento $G(s) = \frac{a}{s+b}$ caratterizzata da un guadagno statico $G(0) = 3$ e da un tempo di assestamento $T_a = 0.6$ s alla risposta al gradino:

$$G(s) = \frac{a}{s+b} \qquad \rightarrow \qquad a = 15, \qquad\qquad b = 5.$$

9. Un sistema $G(s)$ retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se :

⊗ il margine di fase $M_\varphi > 0$;

◯ il margine di ampiezza $M_a > 0$;

◯ il margine di fase $M_\varphi > 1$;

⊗ il margine di ampiezza $M_a > 1$;

10. La fase φ di un numero reale negativo $-K < 0$ è, $\forall k \in \mathcal{Z}$:

◯ $\varphi = 2k\pi$, ⊗ $\varphi = \pi + 2k\pi$, ⊗ $\varphi = \pi$, ◯ $\varphi = \pi + k\pi$,

11. Quando si utilizza la formula di Mason, un percorso di uno schema a blocchi:

◯ è una successione di rami e nodi adiacenti senza anelli in cui ogni elemento può essere attraversato più volte;

◯ è caratterizzato da un coefficiente P dato dalla somma dei guadagni dei rami che compongono il percorso;

⊗ può attraversare giunzioni sommanti;

⊗ quando è chiuso si chiama anello;

12. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $\frac{3(1-s)}{(s+1)^2}$. Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

⊗ $K_1^* < K < K_2^*$;

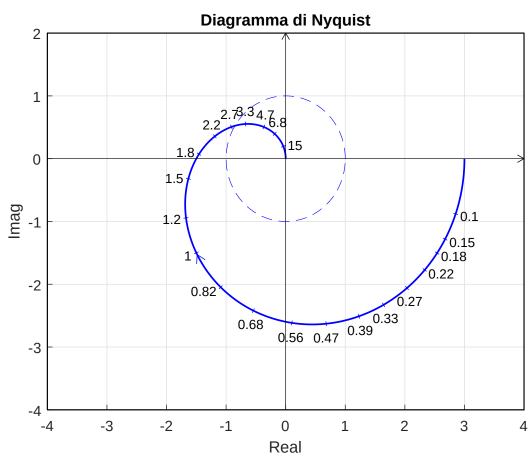
◯ $K_1^* < K < K_2^* < 0$;

◯ $0 < K_1^* < K < K_2^*$;

◯ $(K < K_1^*) \cup (K > K_2^*)$;

Indicare i valori dei parametri K_1^* e K_2^*:

$$K_1^* = -\frac{1}{3}, \qquad\qquad K_2^* = \frac{2}{3}$$



13. Enunciare il criterio di Nyquist nella formulazione valida anche per sistemi instabili ad anello aperto. Fornire sia l'ipotesi che la tesi del criterio.

Criterio di Nyquist. Nell'ipotesi che il sistema ad anello aperto non presenti poli immaginari, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ circondi il punto critico $-1+j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $F(s)$ con parte reale positiva.

14. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$ supponendo $t_0 > 0$:

$$G(s) = \frac{(5-2\,s)(2\,s+1)}{s^2(s-3)^2}\,e^{-2\,t_0 s} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{25+4\omega^2}\,\sqrt{1+4\omega^2}}{\omega^2(9+\omega^2)} \\ \varphi(\omega) = -\arctan\frac{2\omega}{5} + \arctan 2\omega - 3\pi + 2\arctan\frac{\omega}{3} - 2\,t_0\,\omega \end{cases}$$