

Controlli Automatici - Prima parte
23 Gennaio 2026 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. Elet. Telec. Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = e^{-2t}(t^3 - 5), \quad x_2(t) = 3 + 4e^{-2t} \sin(5t)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{6}{(s+2)^4} - \frac{5}{(s+2)}, \quad X_2(s) = \frac{3}{s} + \frac{20}{(s+2)^2 + 5^2}.$$

Infatti la funzione $x_1(t)$ può essere riscritta nel seguente modo:

$$x_1(t) = t^3 e^{-2t} - 5 e^{-2t}$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{12}{(s+2)(s+3)}, \quad G_2(s) = 5 + \frac{7}{(s+3)^3}$$

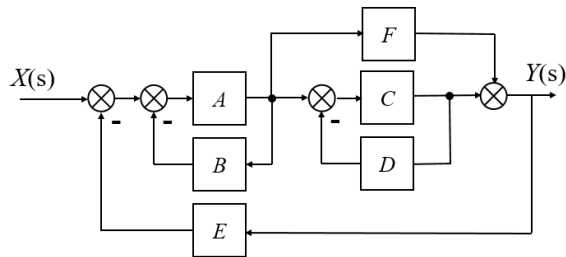
Soluzione:

$$g_1(t) = 12 [e^{-2t} - e^{-3t}], \quad g_2(t) = 5 \delta(t) + \frac{7}{2} t^2 e^{-3t}.$$

Infatti la $G_1(s)$ può essere scomposta nel seguente modo:

$$G(s) = \frac{12}{(s+2)(s+3)} = \frac{K_1}{(s+2)} + \frac{K_2}{(s+3)} = \frac{12}{(s+2)} - \frac{12}{(s+3)}$$

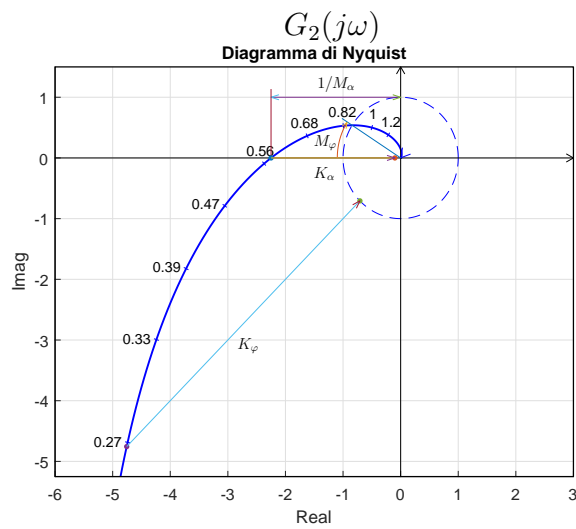
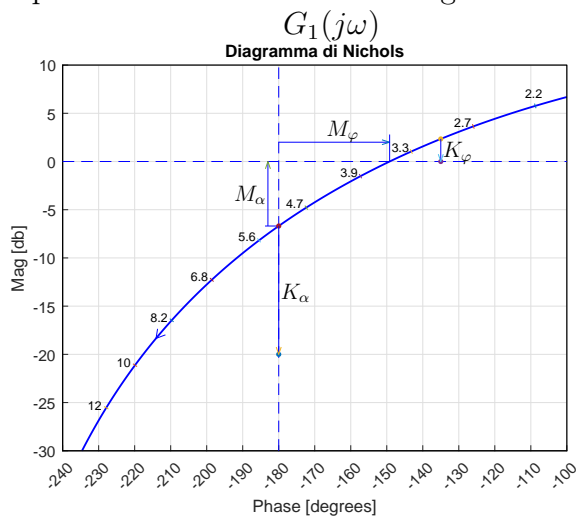
b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$:



$$G(s) = \frac{AC+AF(1+CD)}{1+AB+CD+ACE+AFE+ABCD+AFECD}$$

- c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
 Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:
- c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;
 - c.2) il margine di fase M_φ del sistema;
 - c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 45$;
 - c.4) il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 10$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:



c.1) $M_\alpha = 6.69 \text{ dB} = 2.16$

c.1) $M_\alpha = 0.44$

c.2) $M_\phi = 30.79$

c.2) $M_\phi = -32.6$

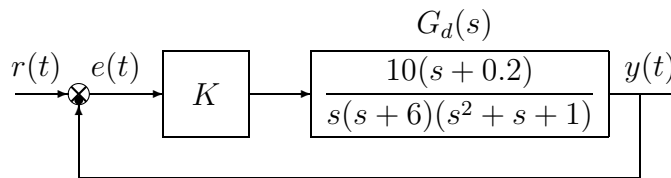
c.3) $K_\phi = -2.34 \text{ dB} = 0.76$

c.3) $K_\phi = 0.148$

c.4) $K_\alpha = -13.31 \text{ dB} = 0.216$

c.4) $K_\alpha = 0.0444$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{10K(s+0.2)}{s(s+6)(s^2+s+1)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 + 7s^3 + 7s^2 + (10K+6)s + 2K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 7 & 2K \\ 3 & 7 & (10K+6) & \\ 2 & 43-10K & 14K & \\ 1 & -100K^2+272K+258 & & \\ 0 & 14K & & \end{array}$$

Dalla riga 2 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K < \frac{43}{10} = 4.3, \quad K > 0$$

Dalla riga 1 si ottiene la disequazione seguente:

$$-100K^2 + 272K + 258 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -0.7447 < K < 3.4647$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$0 < K < 3.4647 = K^*$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{10K^* + 6}{7}} = 2.4097$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_d(s)$.

Soluzione.

I diagrammi “asintotici” di Bode della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 1. I diagrammi di

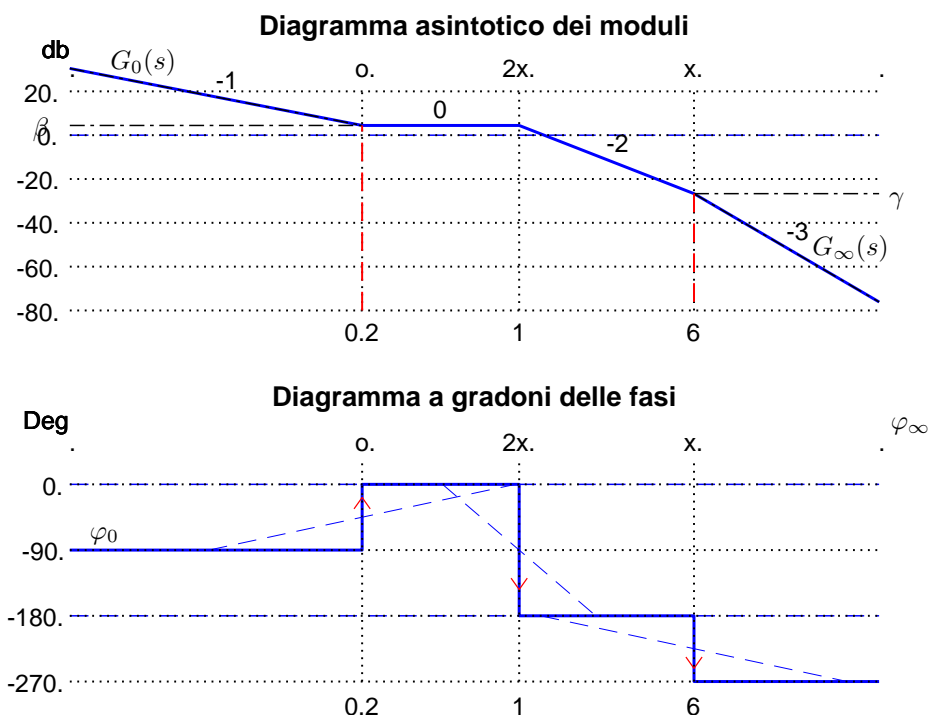


Figura 1: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_d(s)$.

Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \rightarrow 0$ ed $\omega \rightarrow \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{1}{3s}, \quad G_\infty(s) = \frac{10}{s^3}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi_\infty = -\frac{3\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.2$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 6$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.2} = 1.667 = 4.437 \text{ db}, \quad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=6} = 0.0463 = -26.69 \text{ db}.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli stabili è $\delta = 1/(2\omega_n) = 0.5$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” della funzione $G_d(s)$. Calcolare esattamente le eventuali intersezioni σ_i^* con l’asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* .

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G_d(s)$ è mostrato in Fig. 3.

La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \rightarrow 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a φ_0 in quanto $\Delta\tau$ è positiva:

$$\Delta\tau = 5 - \frac{1}{6} - 1 = 3.833 > 0.$$

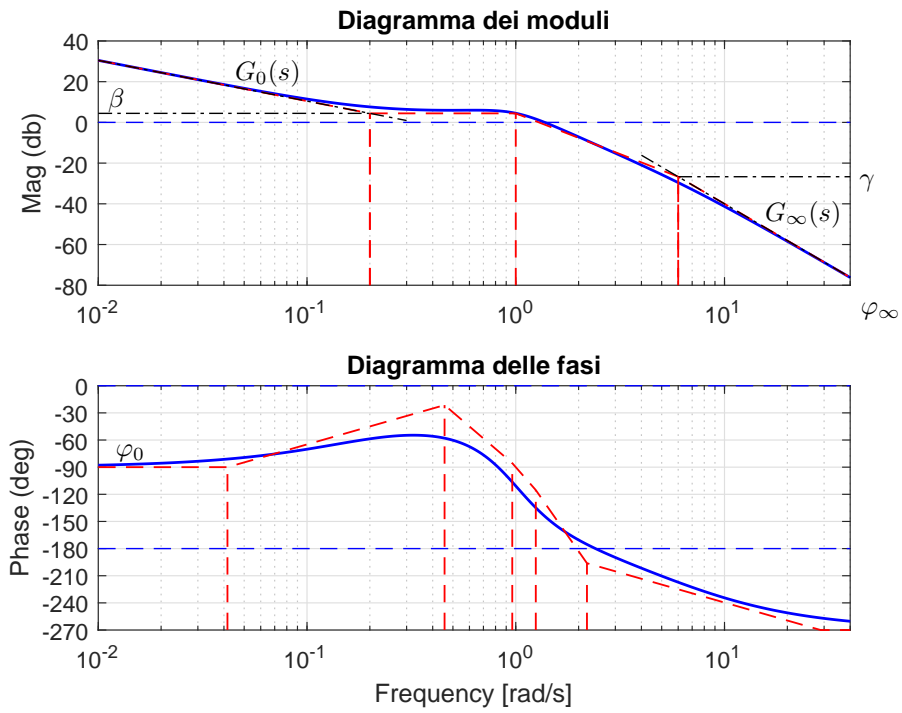


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G_d(s)$.

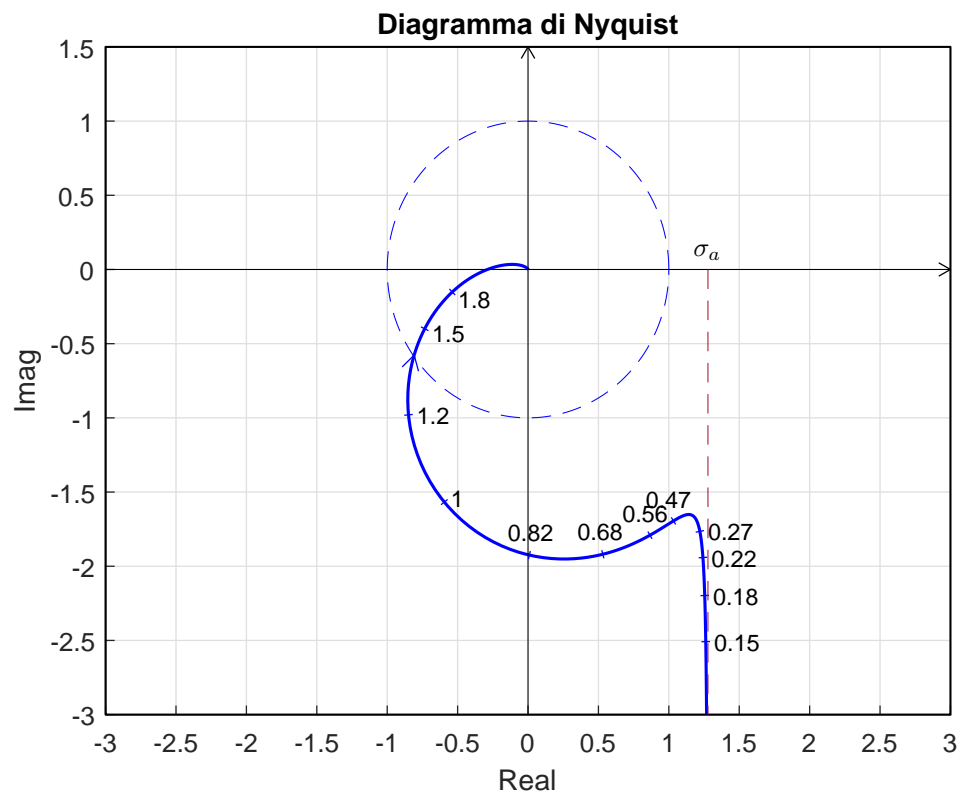


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G_d(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale:

$$\sigma_a = \frac{1}{3} \left(5 - \frac{1}{6} - 1 \right) = 1.278$$

La variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \pi = -\pi$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di π in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{3\pi}{2}$. Per $\omega \rightarrow \infty$ il diagramma arriva in anticipo rispetto a φ_∞ in quanto Δ_p è positiva:

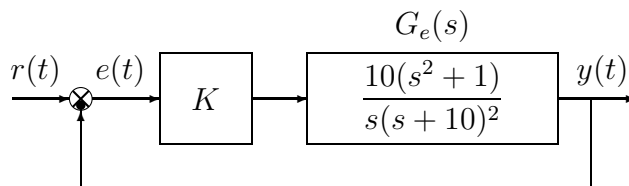
$$\Delta_p = -\frac{1}{5} + 6 + 1 = 6.8 > 0.$$

Esiste una sola intersezione con il semiasse reale negativo. L'intersezione avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{3.4647} = -0.2886$$

in corrispondente della pulsazione $\omega^* \simeq 2.4097$.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{10K(s^2 + 1)}{s(s + 10)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad s^2 + 10(2 + K)s^2 + 100s + 10K = 0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 100 \\ 2 & 10(2 + K) & 10K \\ 1 & 990K + 2000 & \\ 0 & 10K & \end{array}$$

Il sistema retroazionato è stabile quando tutti i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh hanno lo stesso segno:

$$K > 0 = K^*$$

Siccome K^* annulla il coefficiente di riga 0, la corrispondente pulsazione è $\omega^* = 0$.

e.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$.

Soluzione.

I diagrammi "asintotici" di Bode della funzione $G_e(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \rightarrow 0$ ed $\omega \rightarrow \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{1}{10s}, \quad G_\infty(s) = \frac{10}{s}$$

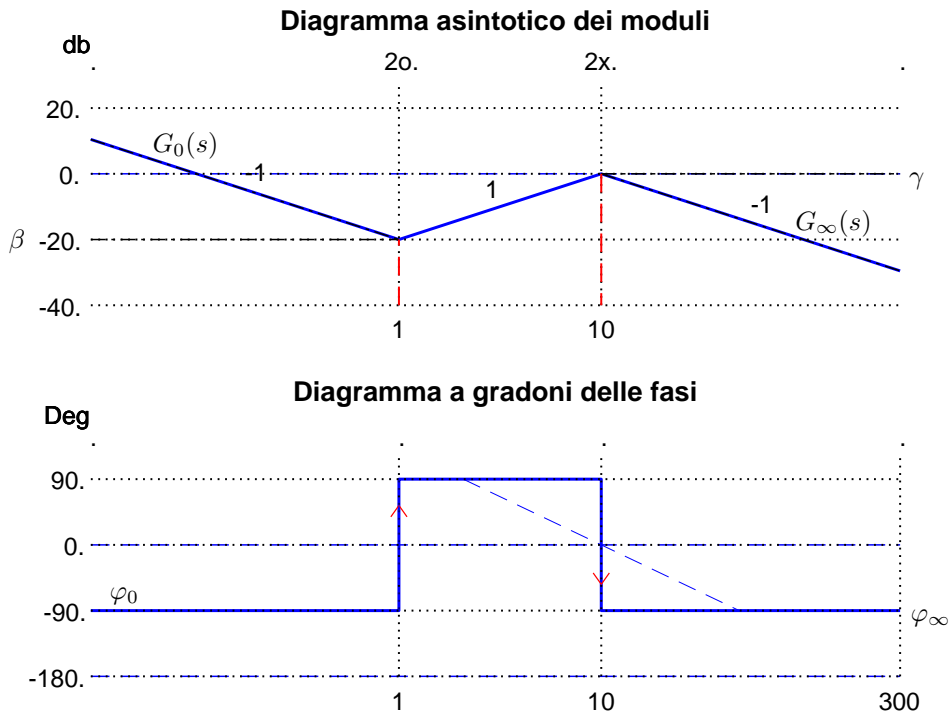


Figura 4: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_e(s)$.

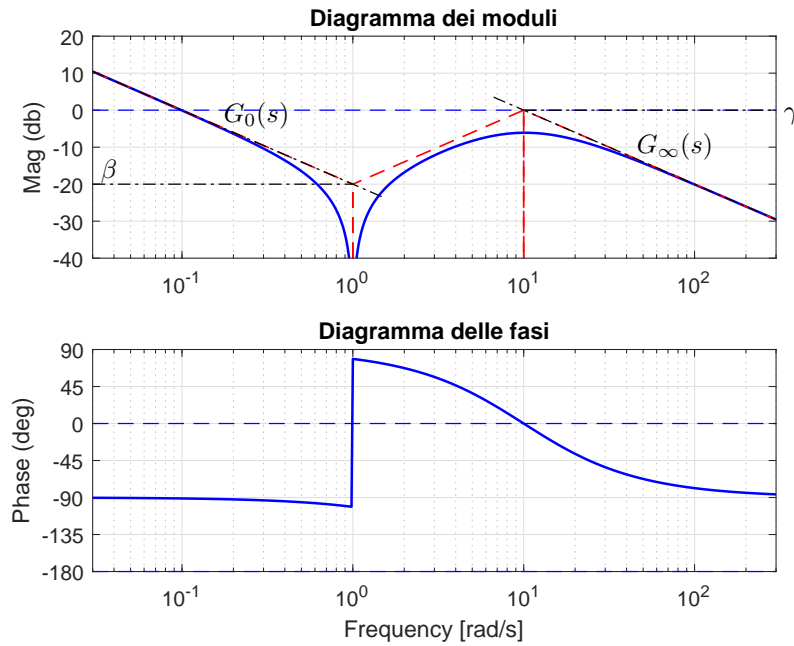


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G_e(s)$.

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2} \equiv \frac{3\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno statico β e il guadagno γ alle pulsazioni $\omega = 1$ e $\omega = 10$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=1} = 0.1 = -20 \text{ db}, \quad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = 1 = 0 \text{ db}.$$

e.3) Calcolare, in funzione di K , l'errore a regime e_p del sistema retroazionato per ingresso a gradino $r(t) = 5$.

Soluzione. L'errore a regime e_p del sistema retroazionato per ingresso a gradino $r(t) = 5$ è nullo perché la costante di posizione K_p del sistema è infinita:

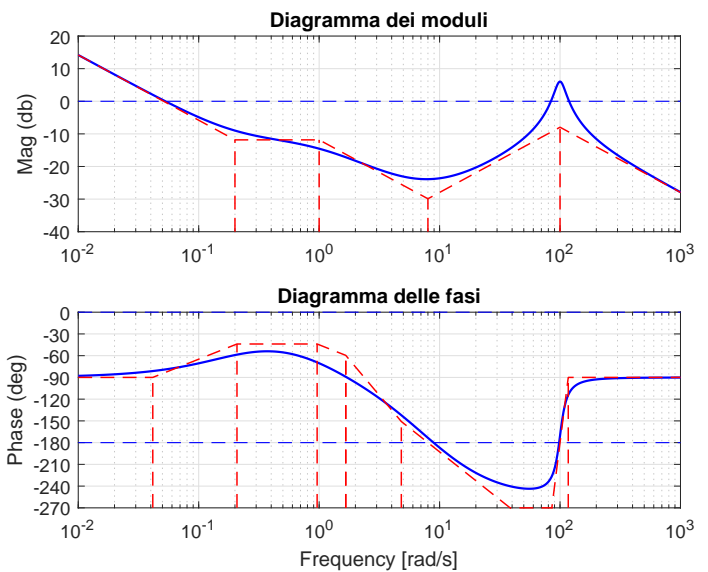
$$e_p = \frac{R_0}{1 + K_p} = \frac{5}{1 + \infty} = 0.$$

f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{40(s + 0.2)(s - 8)^2}{s(s + 1)(s^2 - 20s + 100^2)}.$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ .



Soluzione:

f.1) La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{40(s + 0.2)(s - 8)^2}{s(s + 1)(s^2 - 20s + 100^2)}.$$

Il valore $K = 40$ si determina, per esempio, calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 400$:

$$|G_\infty(s)|_{s=400j} = \left| \frac{K}{s} \right|_{400j} = \frac{K}{400} = \gamma \simeq -20 \text{ db} \simeq 0.1 \quad \rightarrow \quad K \simeq 40.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati stabili è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} = \frac{1}{10} = 0.1.$$

La distanza $M_{\omega_n} \simeq 14 \text{ db} = 5$ di legge dal diagramma di Bode dei moduli.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. Elet. Telec. Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente l'equazione differenziale:

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 2y + 3\dot{y} + 4y = 2\ddot{x} + 5\dot{x} + 3x \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s^2 + 5s + 3}{s^4 + 5s^3 + 2s^2 + 3s + 4} X_1(s)$$

2. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale $x(t)$:

$$x(t) = 2 + 4 \sin(5t) \quad \xrightarrow{\begin{matrix} G(s) \\ \frac{e^{-2s}}{s+3} \end{matrix}} \quad y(t) \simeq \frac{2}{3} + \frac{4}{\sqrt{34}} \sin(5t - 10 - \arctan \frac{5}{3})$$

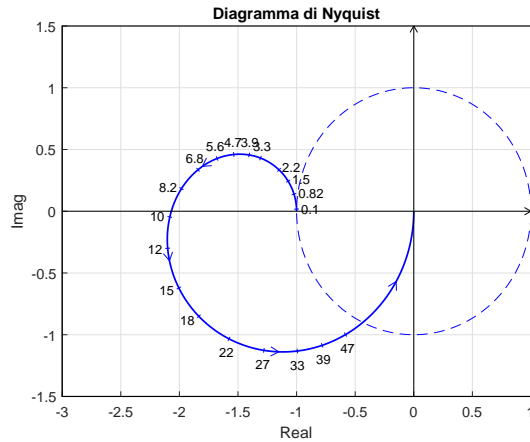
Infatti si ha che:

$$G(0) = \frac{1}{3}, \quad G(5j) = \frac{1}{\sqrt{34}} e^{-(10 + \arctan \frac{5}{3})j}$$

3. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $G(s) = \frac{60(s-3)}{(9-s)(20-s)}$.

Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K :

- $0 < K < \bar{K}_2 < \infty$;
- $0 < \bar{K}_1 < K < \infty$;
- $0 < \bar{K}_1 < K < \bar{K}_2$;
- nessuno dei precedenti;



Calcolare (se esistono) i valori \bar{K}_1 e \bar{K}_2 :

$$\bar{K}_1 \simeq -\frac{1}{-2.1} = 0.4762, \quad \bar{K}_2 \simeq 1.$$

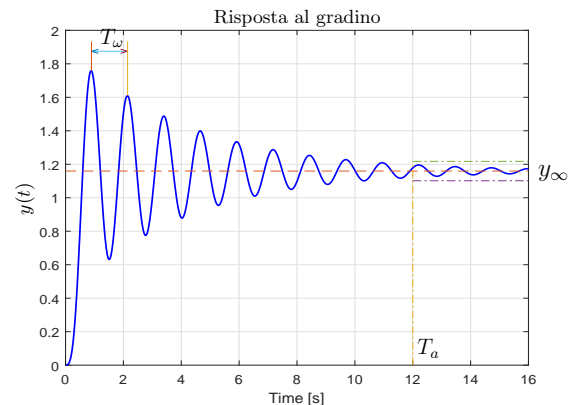
4. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{100(15 + 0.7s)(s^2 + 12s + 400)}{(5s + 23)(0.3s + 4)(s^2 + 18s + 225)(s^2 + 0.5s + 25)}$$

Calcolare inoltre:

- a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \rightarrow \infty$;
- b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
- c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$;

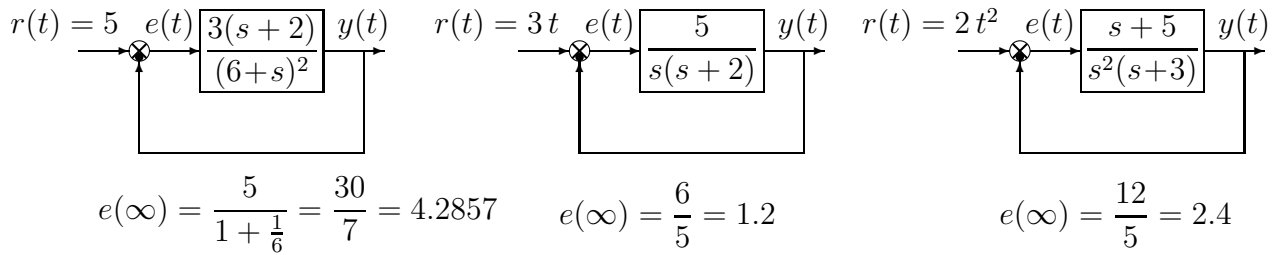
$$y_\infty = 1.1594, \quad T_a \simeq \frac{3}{0.25} = 12 \text{ s}, \quad T_\omega \simeq \frac{2\pi}{5} = 1.256.$$



5. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{5(s-3)(2s+1)}{s(s^2+4s+6)} \quad \rightarrow \quad y_0 = 10, \quad y_\infty = -\frac{5}{2} = -2.5$$

6. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



7. Calcolare i parametri a , b e c della funzione di trasferimento $G(s)$ caratterizzata da un guadagno statico $G(0) = 3$, da una pulsazione naturale $\omega_n = 5$ e da un tempo di assestamento $T_a = 2$ s alla risposta al gradino:

$$G(s) = \frac{a}{s^2 + bs + c} \quad \rightarrow \quad a = 75, \quad b = 3 \quad c = 25.$$

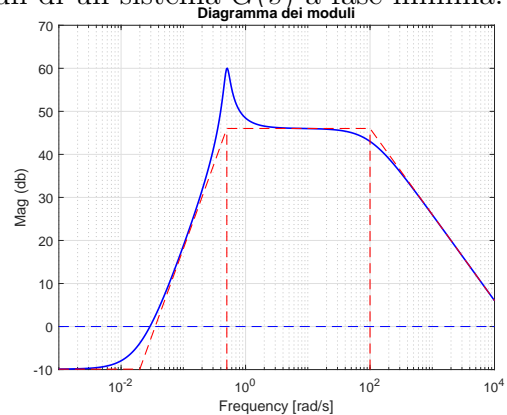
I tre valori sopra indicati si ottengono utilizzando le seguenti tre relazioni:

$$G(0) = 3 = \frac{a}{c}, \quad \omega_n = 5 = \sqrt{c}, \quad T_a = 2 = \frac{3}{|\sigma|} = \frac{3}{\frac{b}{2}}$$

8. Si faccia riferimento al diagramma di Bode dei moduli di un sistema $G(s)$ a fase minima.

Utilizzando la formula di Bode, calcolare in modo approssimato la fase φ del sistema $G(s)$ in corrispondenza delle seguenti pulsazioni ω :

$$\begin{aligned} \omega_1 = 0.02 &\rightarrow \varphi_1 \simeq \frac{\pi}{2} \\ \omega_2 = 0.5 &\rightarrow \varphi_2 \simeq \frac{\pi}{2} \\ \omega_3 = 100 &\rightarrow \varphi_3 \simeq -\frac{\pi}{4} \\ \omega_4 = 2000 &\rightarrow \varphi_4 \simeq -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



9. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace del segnale $f(t)$. Fornire l'enunciato del "Teorema della traslazione in s ":

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s + a)$$

10. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $5\dot{y}(t) + 2y(t) = 0$ con condizione iniziale $y(0) = 3$. Applicando la trasformata di Laplace si ha:

$$5(sY(s) - 3) + 2Y(s) = 0 \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{3}{s + 0.4} \quad \rightarrow \quad y(t) = 3e^{-0.4t}.$$

11. Enunciare il principio del modello interno valido per l'errore a regime dei sistemi retroazionati.

Principio del modello interno. affinché sia neutralizzato (con errore a regime nullo) un modo $r(t)$ in ingresso corrispondente ad un polo nell'origine di ordine h , occorre che lo stesso modo sia presente nel regolatore (o nel sistema controllato), che pertanto deve avere un polo nell'origine pure di ordine h o superiore, cioè contenere un modello del sistema elementare $1/s^h$ che genera quel modo.

