

Controlli Automatici - Prima parte
23 Gennaio 2025 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. Elet. Telecom. Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = [t^3 + \cos(4t)] e^{-3t}, \quad x_2(t) = 5t^2 + 2\delta(t-3)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{6}{(s+3)^4} + \frac{(s+3)}{(s+3)^2 + 16}, \quad X_2(s) = \frac{10}{s^3} + 2e^{-3s}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G(s)$:

$$G_1(s) = 3 + \frac{4}{s(s+1)(s+2)}, \quad G_2(s) = \frac{2s}{s^2+9} + \frac{15}{(s+2)^2+25}$$

Soluzione:

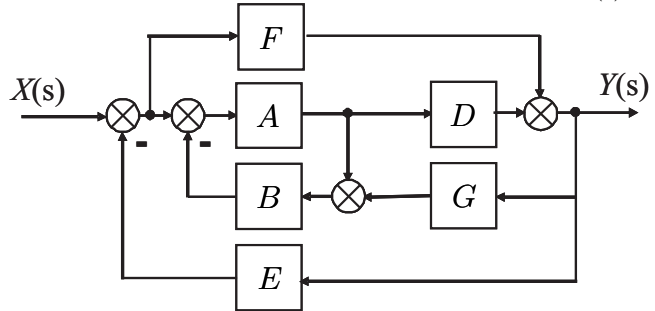
$$g_1(t) = 3\delta(t) + 2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}, \quad g_2(t) = 2\cos(3t) + 3e^{-2t}\sin(5t)$$

Infatti, per la seconda parte della funzione $G_1(s)$ si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}[G_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s(s+1)(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{2}{s+2}\right] = 2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}.$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$:

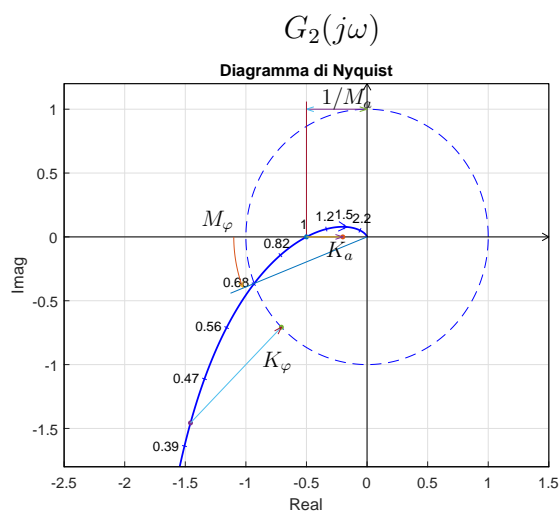
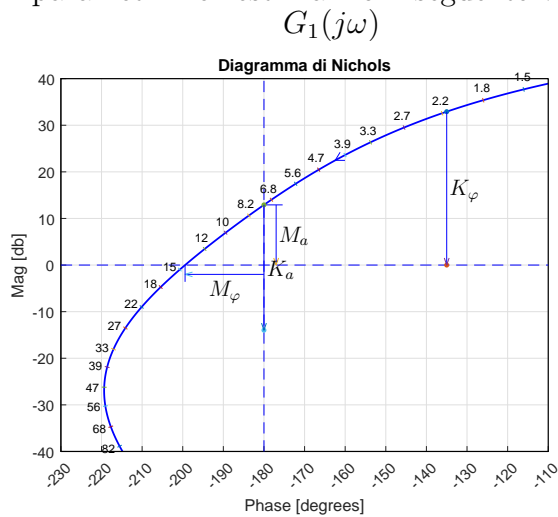
$$G_1(s) = \frac{AD + F(1 + AB)}{1 + AB + EF + ADBG + ADE + ABEF}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$. Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

- c.1) il margine di ampiezza M_α del sistema;
- c.2) il margine di fase M_φ del sistema;
- c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 45$;
- c.4) il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 5$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:



c.1) $M_a = -12.9 \text{ db} = 0.226$

c.1) $M_a = 2$

c.2) $M_\varphi = -19.4$

c.2) $M_\varphi = 21.4$

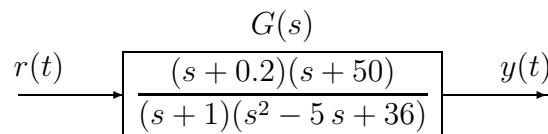
c.3) $K_\varphi = -32.9 \text{ db} = 0.0226$

c.3) $K_\varphi = 0.485$

c.4) $K_a = -26.9 \text{ db} = 0.0452$

c.4) $K_a = 0.4$

d) Sia dato il seguente sistema ad anello aperto:



d.1) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \rightarrow 0$ ed $\omega \rightarrow \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = 0.27778, \quad G_\infty(s) = \frac{1}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.2$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 50$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.2} = 0.2778 = -11.13 \text{ db}, \quad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=50} = 0.02 = -33.98 \text{ db}.$$

Coefficienti di smorzamento dei poli complessi coniugati: $\delta_1 = 0.41667$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

d.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 3. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = 0$. Per $\omega \rightarrow 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = 5 + \frac{1}{50} - 1 - \frac{-5}{36} = 4.16 > 0.$$

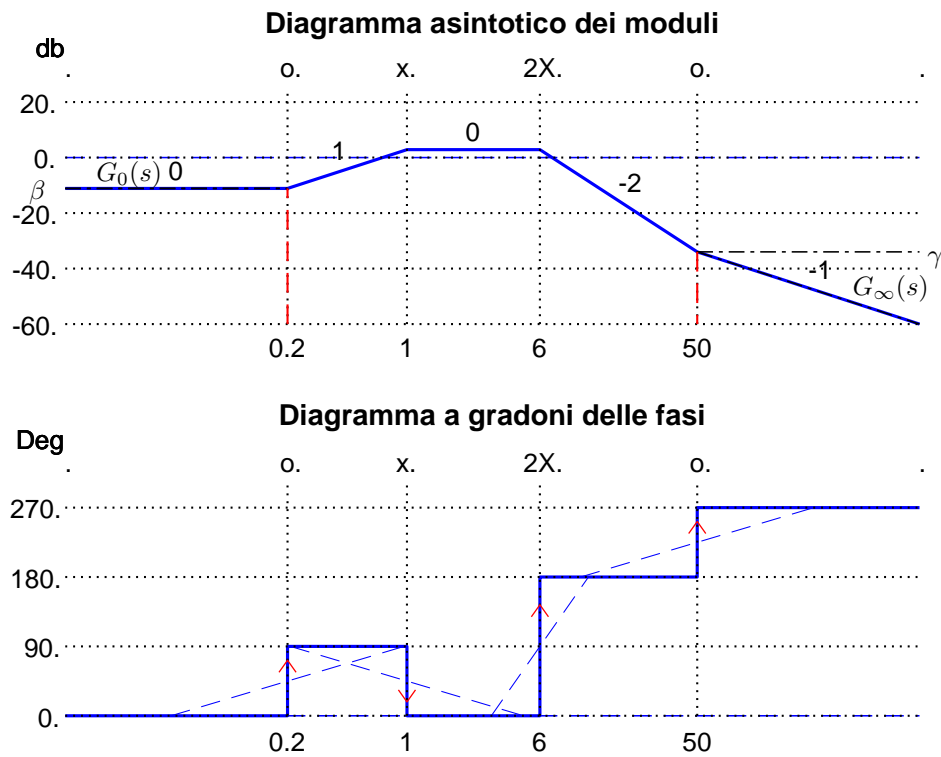


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

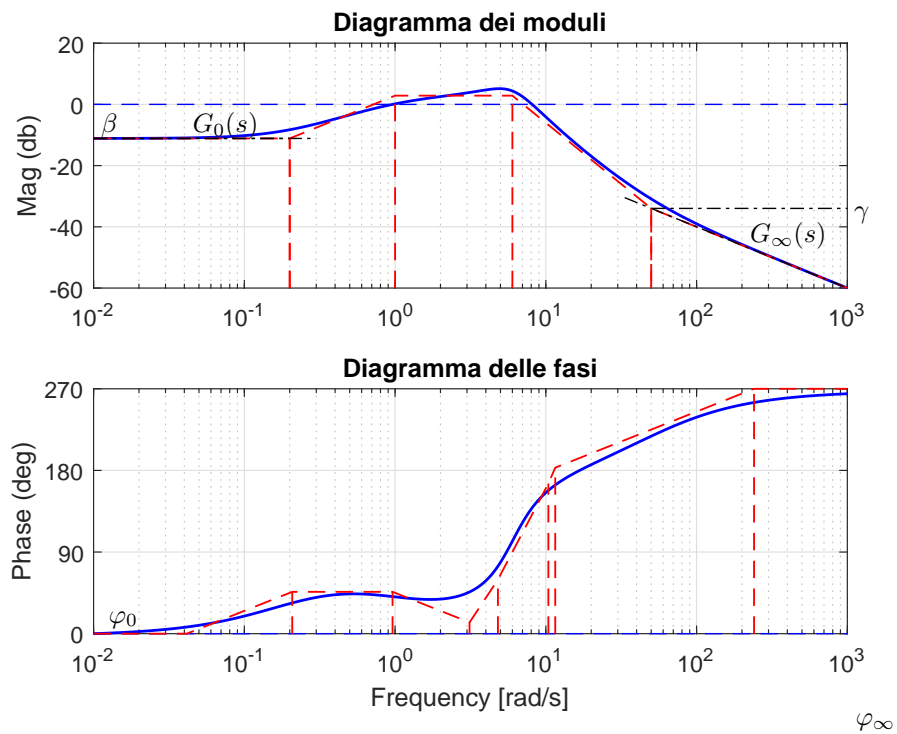


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

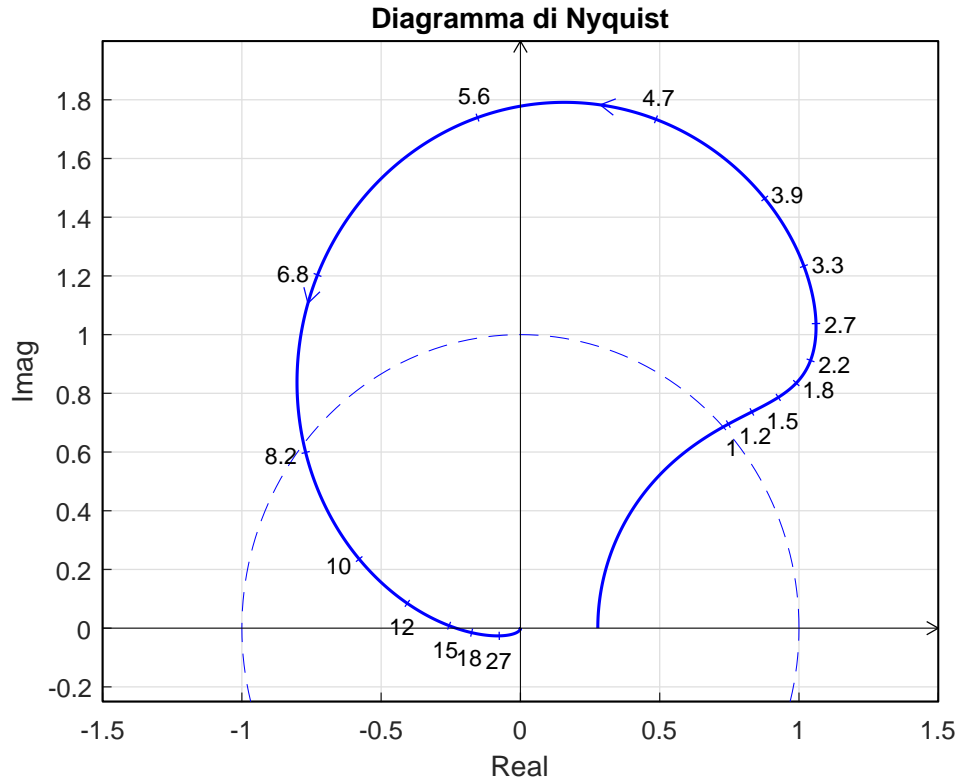


Figura 3: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

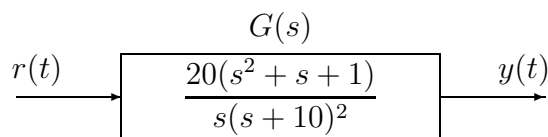
Il sistema è di tipo 0 per cui nel diagramma di Nyquist non è presente nessun asintoto. Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = 0$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}.$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $\frac{3\pi}{2}$ in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \rightarrow \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p del sistema è negativa:

$$\Delta_p = -0.2 - 50 + 1 - 5 = -54.2 < 0.$$

e) Sia dato il seguente sistema ad anello aperto:



e.1) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \rightarrow 0$ ed $\omega \rightarrow \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{0.2}{s} = \frac{K}{s}, \quad G_\infty(s) = \frac{20}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

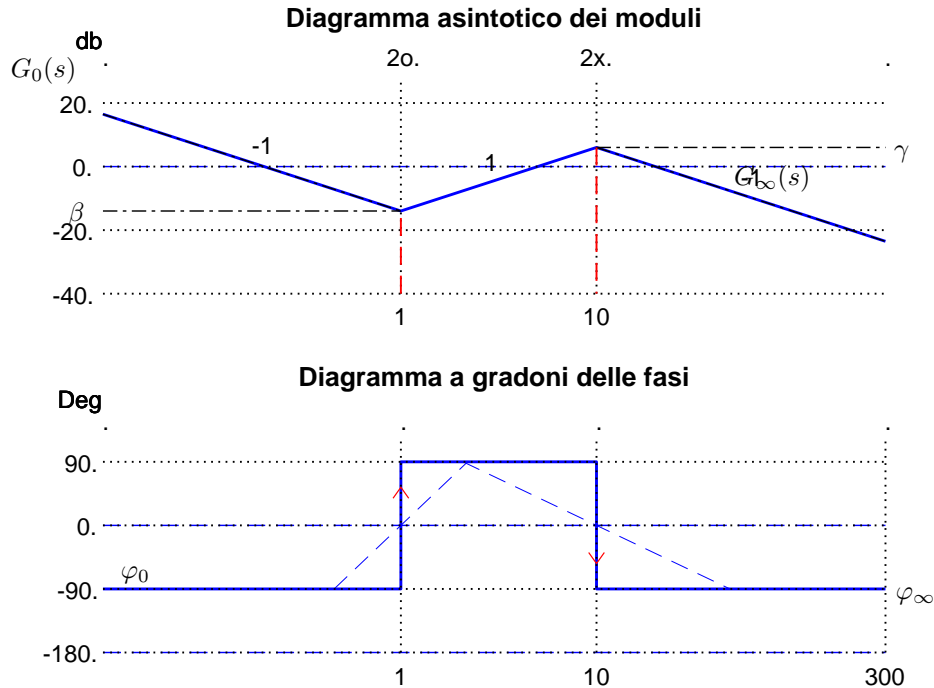


Figura 4: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=1} = 0.2 = -13.98 \text{ db}, \quad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = 2 = 6.021 \text{ db}.$$

Coefficienti di smorzamento degli zeri complessi coniugati: $\delta_1 = 0.5$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

e.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 6. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \rightarrow 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = 1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{10} = 0.8 > 0.$$

Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto. La posizione dell'asintoto è la seguente:

$$\sigma_a = K\Delta\tau = 0.2 \cdot (1.8) = 0.16.$$

Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di 0 in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \rightarrow \infty$ il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p del sistema è positiva:

$$\Delta_p = -1 + 10 + 10 = 19 > 0.$$

e.3) Disegnare in modo qualitativo la **risposta impulsiva** $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ del sistema $G(s)$.

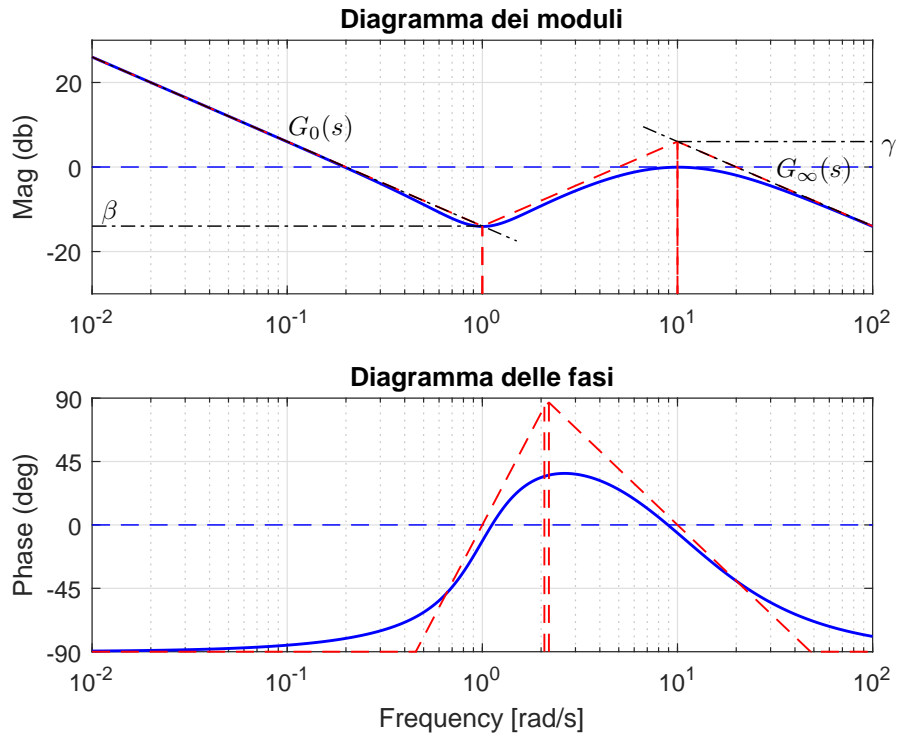


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

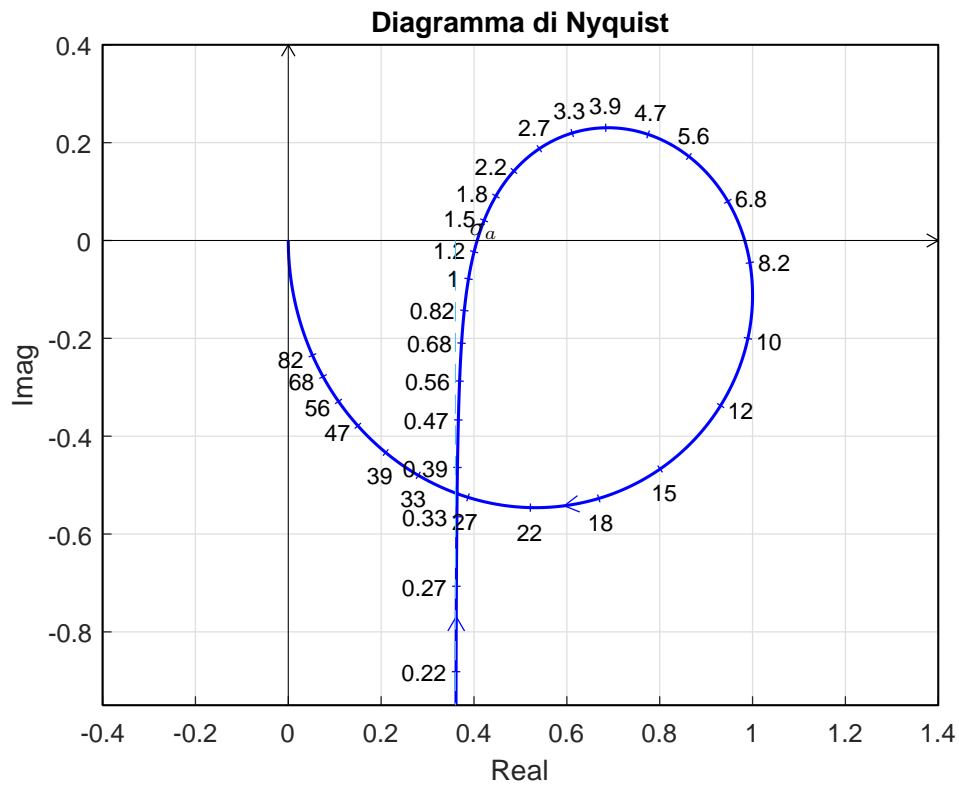


Figura 6: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

Valore iniziale y_0 :

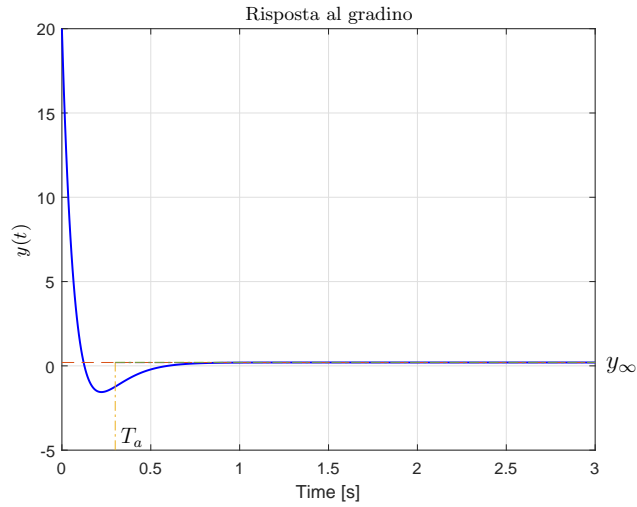
$$y_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = 20,$$

Valore finale y_∞ :

$$y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.2,$$

Tempo di assestamento T_a :

$$T_a \simeq 0.3 \text{ s.}$$

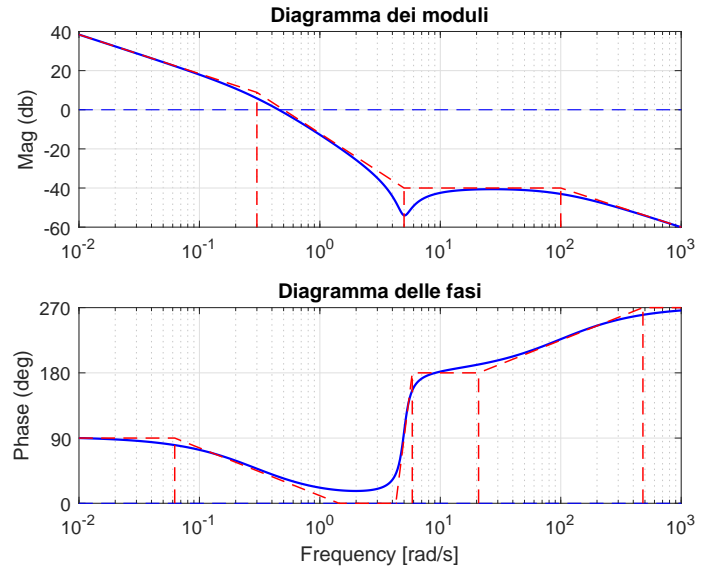


f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{(s^2 + s + 25)}{s(s + 0.3)(s - 100)}$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ .



Soluzione. La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{(s^2 + s + 25)}{s(s + 0.3)(s - 100)}$$

Il valore $K = 1$ può essere calcolato in due modi diversi:

1) calcolando il modulo β dell'approssimante $G_0(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.3$:

$$|G_0(s)|_{s=0.3j} = \left| \frac{-0.8333 K}{s} \right|_{s=0.3j} = \frac{0.8333 K}{0.3} = \beta \simeq 8.87 \text{ db} \simeq 2.78 \Rightarrow K \simeq 1.$$

2) calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 100$:

$$|G_\infty(s)|_{s=100j} = \left| \frac{K}{s} \right|_{s=100j} = \frac{K}{100} = \gamma \simeq -40 \text{ db} \simeq 0.01 \rightarrow K \simeq 1.$$

I coefficienti di smorzamento δ delle coppie di poli o zeri complessi coniugati presenti all'interno della funzione $G(s)$ sono i seguenti:

$$(s^2 + 1s + 5^2) \rightarrow M_{\omega_n} \simeq 14 \text{ db} = 5 \rightarrow \delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq 0.1$$

I valori M_{ω_n} si leggono sul diagramma di Bode dei moduli come distanza tra il diagramma asintotico e il diagramma reale alla pulsazione ω_n .

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. Elet. Telec. Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Scrivere, in funzione dei segnali $x(t)$ e $y(t)$, l'equazione differenziale corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(s+2)^2}{s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 4} \quad \rightarrow \quad \ddot{y} + 3\dot{y} + 5y + 2\dot{y} + 4y = \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x$$

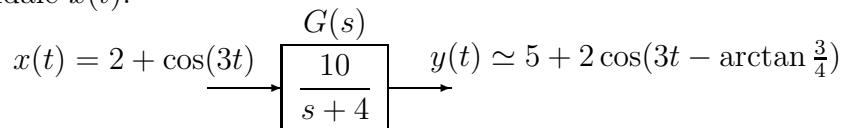
2. Il ritardo puro $G(s) = e^{-t_0s}$ è un sistema:

stabile lineare non lineare a fase minima

3. Un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati e privo di zeri, ha un picco di risonanza M_R maggiore di uno

se $0 < \delta < \sqrt{2}$ se $0 < \delta < 1$ se $0 < \delta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ se $0 < \delta < \frac{1}{2}$

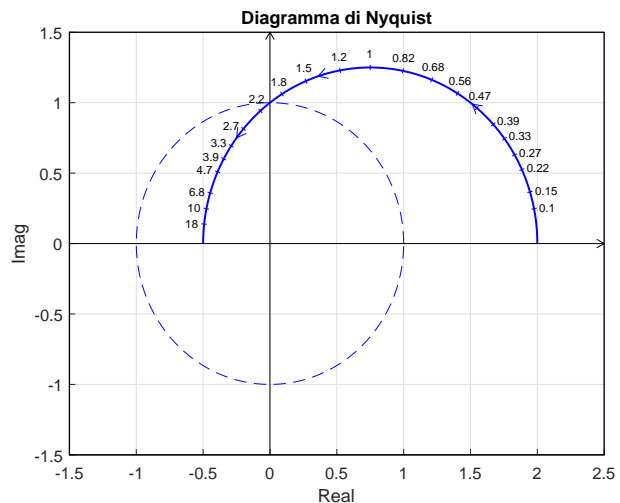
4. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale $x(t)$:



5. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $G(s) = \frac{(s+4)}{2(1-s)}$.

Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K :

- $\frac{1}{2} < K < 2$;
 $-\frac{1}{2} < K < 2$;
 $-2 < K < -\frac{1}{2}$;
 $(K < -\frac{1}{2}) \cup (K > 2)$;



6. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2(s^2 + 3s + 1)}{s(s+1)(3s+2)} \quad \rightarrow \quad y_0 = \frac{2}{3}, \quad y_\infty = 1$$

7. Un sistema $G(s)$ retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se :

- il margine di fase $M_\varphi > 1$; il margine di fase $M_\varphi > 0$;
 il margine di ampiezza $M_a > 1$; il margine di ampiezza $M_a > 0$;

8. Il picco di risonanza M_R di un sistema del 2° ordine è:

$M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-\delta^2}}$

$M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$

$M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-2\delta^2}}$

$M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-2\delta^2}}$

9. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $4\dot{y}(t) + 3y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = 2$. Applicando la trasformata di Laplace si ha:

$$4(sY(s) - 2) + 3Y(s) = 0 \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{2}{s + 0.75} \quad \rightarrow \quad y(t) = 2e^{-0.75t}.$$

10. Calcolare i parametri a e b della funzione di trasferimento $G(s) = \frac{a}{s+b}$ caratterizzata da un guadagno statico $G(0) = 3$ e da un tempo di assestamento $T_a = 1.5$ s alla risposta al gradino:

$$G(s) = \frac{a}{s+b} \quad \rightarrow \quad a = 6, \quad b = 2.$$

11. Completare la seguente formulazione del criterio di Nyquist (quella valida anche per sistemi instabili ad anello aperto).

Criterio di Nyquist. Nell'ipotesi che la funzione guadagno di anello $F(s)$...

non presenti poli immaginari, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio,

condizione solo necessaria solo sufficiente necessaria e sufficiente

affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che: ...

il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ circonda il punto critico $-1+j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $F(s)$ con parte reale positiva.

12. La formula di Bode per il calcolo della fase di un sistema a partire dal diagramma delle ampiezze

è valida per i sistemi lineari stabili è una formula esatta

è valida per i sistemi a fase minima è una formula approssimata

13. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{100(10 + 0.2s)(s^2 + 15s + 200)}{(5s + 20)(0.2s + 8)(s^2 + 0.6s + 25)(s^2 + 5s + 36)}$$

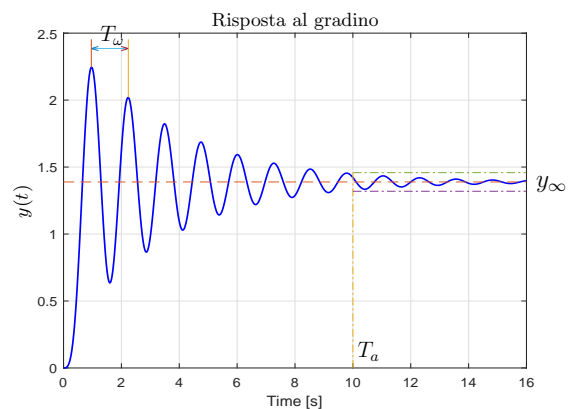
Calcolare inoltre:

a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \rightarrow \infty$;

b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;

c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$$y_\infty = 1.39, \quad T_a \simeq \frac{3}{0.3} = 10 \text{ s}, \quad T_\omega \simeq \frac{2\pi}{5} \simeq 1.26.$$



14. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$ supponendo $t_0 > 0$:

$$G(s) = \frac{(s-2)}{s(3+s)^2} e^{-2t_0s} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{4+\omega^2}}{\omega(9+\omega^2)} \\ \varphi(\omega) = \pi - \arctan \frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{\omega}{3} - 2t_0\omega \end{cases}$$