Controlli Automatici A
22 Giugno 2011 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = e^{-3\,t}\,(t^2-2), \qquad\qquad x_2(t) = 4 + 3\,e^{-3t}\sin(7\,t)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{2}{(s+3)^3} - \frac{2}{(s+3)}, \qquad\qquad X_2(s) = \frac{4}{s} + \frac{21}{(s+3)^2+7^2}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{10}{(s+3)(1+2\,s)} \qquad\qquad G_2(s) = 3 + \frac{10}{(s+5)^3}$$

Soluzione:

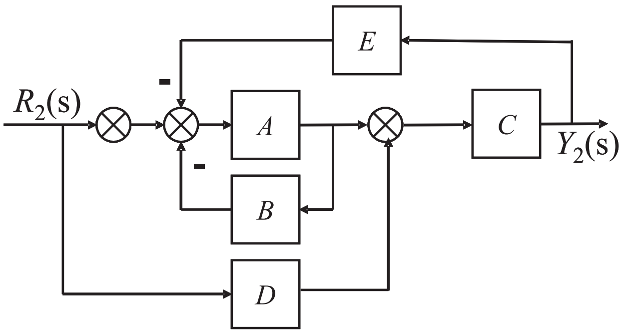
$$g_1(t) = 2\left[e^{-0.5\,t} - e^{-3\,t}\right], \qquad\qquad g_2(t) = 3\,\delta(t) + 5\,t^2 e^{-5\,t}.$$

Infatti la $G_1(s)$ può essere scomposta nel seguente modo:

$$G(s) = \frac{5}{(s+0.5)(s+3)} = \frac{K_1}{(s+0.5)} + \frac{K_2}{(s+3)} = \frac{2}{(s+0.5)} - \frac{2}{(s+3)}$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G_2(s) = \frac{Y_2(s)}{R_2(s)}$:

$$G_2(s) = \frac{A\,C + D\,C(1+A\,B)}{1 + A\,B + A\,C\,E}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

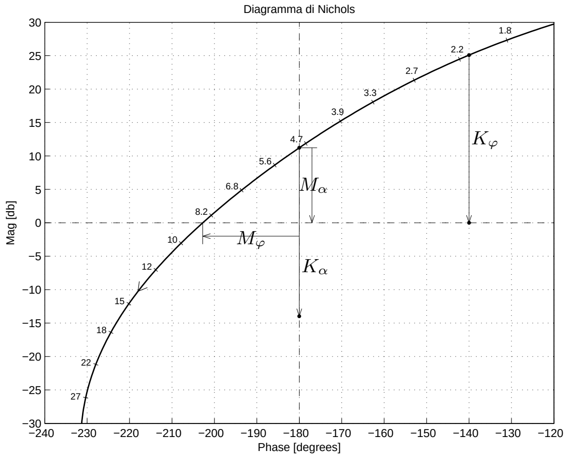
c.1) il margine di ampiezza M_a e il margine di fase M_φ del sistema;

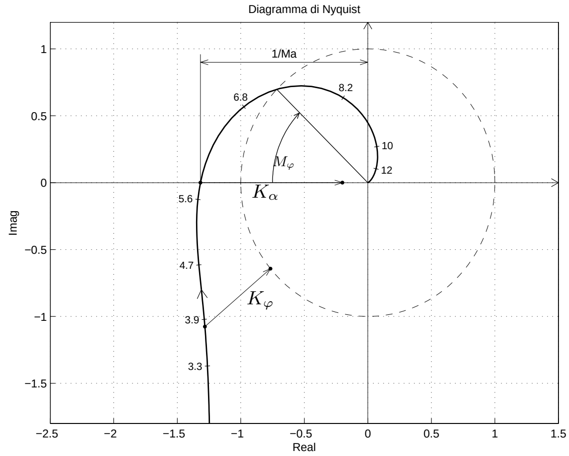
c.2) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\,G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 40$;

c.3) il guadagno K_a per cui il sistema $K_a\,G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_a = 5$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$ $\qquad\qquad$ $G_2(j\omega)$





c.1) $M_a = -11.2$ db $= 0.275$

$M_\varphi = -22.74$ gradi

c.2) $K_\varphi = -25.19$ db $= 0.055$

c.3) $K_a = -25.07$ db $= 0.0557$

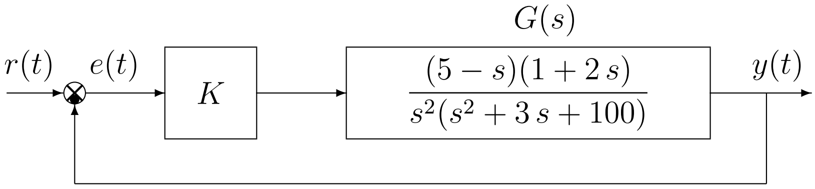
c.1) $M_a = 0.759$

$M_\varphi = -44.26$ gradi

c.2) $K_\varphi = 0.597$

c.3) $K_a = 0.1518$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1+\frac{K(5-s)(1+2\,s)}{s^2(s^2+3\,s+100)}=0 \qquad \rightarrow \qquad s^4+3\,s^3+(100-2\,K)s^2+9Ks+5K=0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 100-2\,K & 5K \\ 3 & 3 & 9K & \\ 2 & -15K+300 & 15K & \\ 1 & 9K(-15K+300)-45K & & \\ 0 & 15K & & \end{array}$$

Dalla riga 2 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K<\frac{300}{15}=20, \qquad\qquad K>0.$$

Dalla riga 1 si ottiene la seguente disequazione:

$$-135K+2655>0 \qquad \rightarrow \qquad K<\frac{2655}{135}=19.67=K^*.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$0<K<K^*=19.67.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{3K^*} = \sqrt{59} = 7.6811.$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1. Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

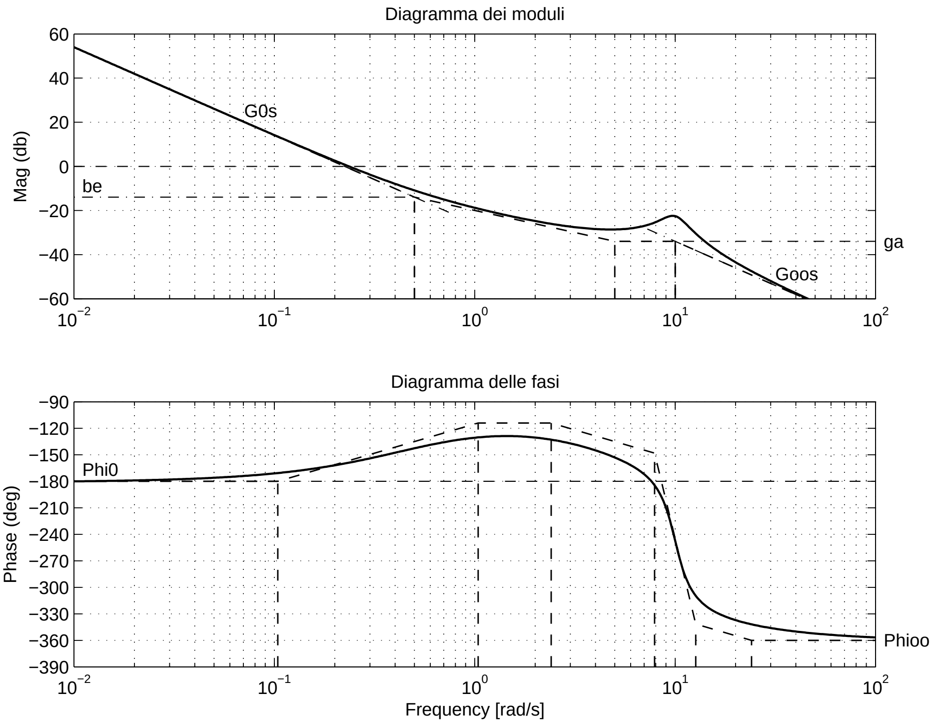


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

$$G_0(s) = \frac{1}{20\, s^2}, \qquad\qquad G_\infty(s) = -\frac{2}{s^2}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\pi, \qquad\qquad \varphi_\infty = -2\,\pi.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze, il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.5$ e il guadagno γ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = \frac{1}{5}, \qquad\qquad \gamma = \frac{1}{50}.$$

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 2. Il sistema é di tipo 2 per cui non esiste nessun asintoto verticale. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\pi$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = 2 - \frac{1}{5} - \frac{3}{100} > 0.$$

La variazione di fase $\Delta\varphi = -\pi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0,\ \infty[$ indica che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $-\pi$ in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -2\pi$. Esiste quindi un'unica intersezione σ_1^* con il semiasse reale positivo. Tale intersezione si determina nel modo seguente:

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{K^*} \qquad \longrightarrow \qquad \sigma_1^* = -0.0508.$$

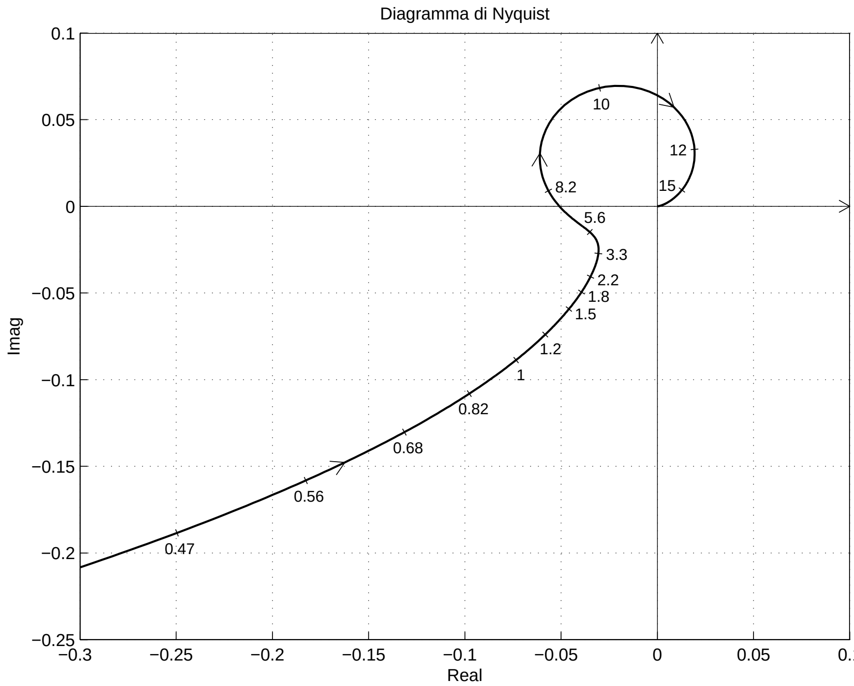


Figura 2: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il corrispondente valore di ω_1^* è: $\omega_1^* = 7.6811$. Essendo

$$\Delta_p = 5 - \frac{1}{2} + 3 > 0$$

per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva a zero in anticipo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -2\pi$.

d.4) Calcolare, in funzione di K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ per ingresso a parabola $r(t) = 2\,t^2$.

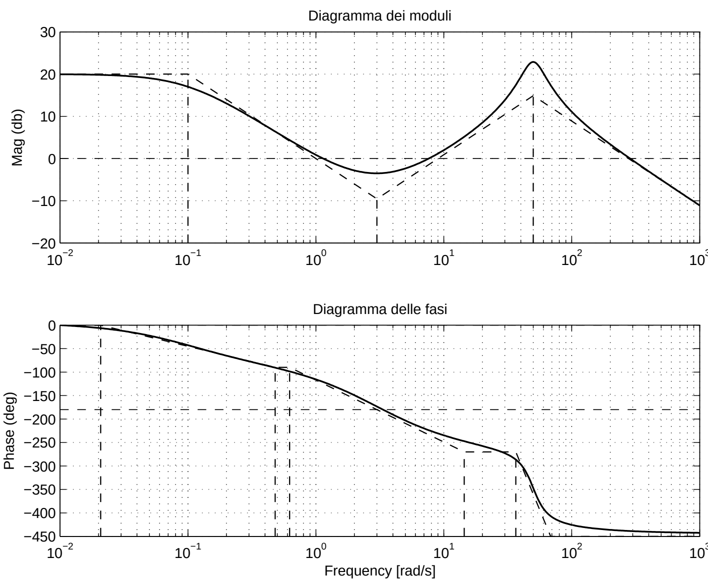
Soluzione: Il sistema $G(s)$ è tipo 2 per cui segnale di ingresso $r(t) = 2t^2 = R_0 \frac{t^2}{2}$ può essere inseguito solo con errore a regime non nullo:

$$e_\infty(t) = \frac{R_0}{K_a} = \frac{4}{\frac{5\,K}{400}} = \frac{80}{K}.$$

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.

$$G(s) \simeq \frac{277.8\,(s-3)^2}{(s+0.1)(s^2+20\,s+2500)}$$

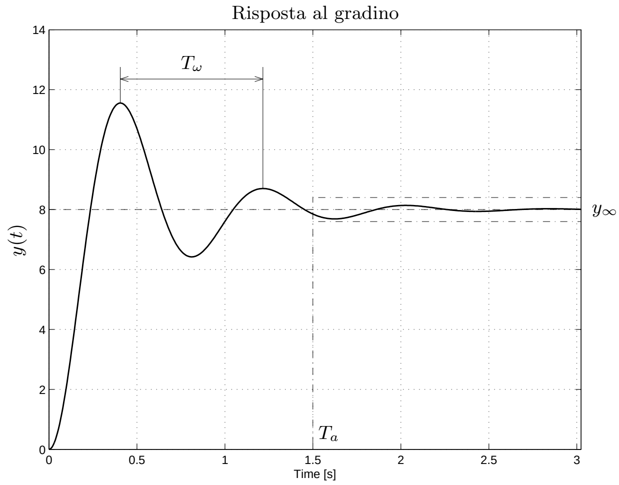


Dal grafico è evidente che la funzione $G(s)$ ha un polo stabile in $\omega = 0.1$, due zeri instabili in $\omega = 3$ e una coppia di poli complessi coniugati stabili in $\omega = 50$. La funzione di trasferimento del sistema è quindi la seguente:

$$G(s) = \frac{277.8\,(s-3)^2}{(s+0.1)(s^2+20\,s+2500)} = \frac{10\,(1-0.333\,s)^2}{(1+10\,s)(1+0.008\,s+0.0004\,s^2)}.$$

Dal grafico risulta che il picco di risonanza è $M_R = 2.55$ per cui si ha che $\delta = 0.2$.

f) In figura è mostrata la risposta $y(t)$ al gradino $x(t) = X_0 = 10$ di un sistema dinamico $G(s)$ caratterizzato solamente da 2 poli stabili. Nei limiti della precisione del grafico determinare:



1) Il guadagno statico del sistema:

$$G_0 = \frac{y_\infty}{X_0} = 0.8$$

2) La posizione dei poli dominanti del sistema $p_{1,2}$:

$$\sigma = \frac{3}{T_a} \simeq \frac{3}{1.5}, \qquad \omega = \frac{2\,\pi}{T_\omega} \simeq \frac{6.28}{0.81},$$

$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\,\omega = -2 \pm j\,7.75.$$

3) La pulsazione naturale ω_n:

$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2+\omega^2} \simeq 8.$$

Controlli Automatici A

22 Giugno 2011 - Domande

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Scrivere le funzioni di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ corrispondente alla seguente equazione differenziale nelle variabili $x(t)$ e $y(t)$:

$$\dddot{y} + 4\,\ddot{y} + 3\,\dot{y} + y = 6\,\dot{x} + 2\,x \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{6\,s+2}{s^3+4\,s^2+3\,s+1}$$

2. L'antitrasformata di Laplace della funzione $F(s)$ è definita come segue:

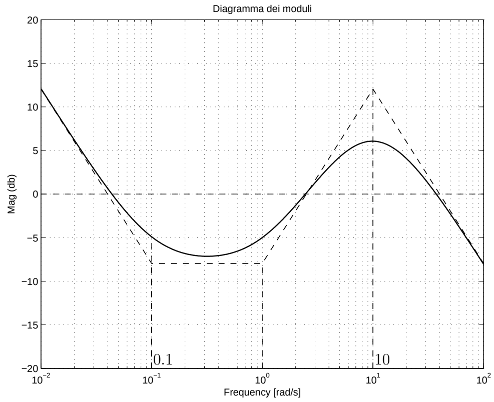
○ $f(t) := \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} F(s)e^{-st}dt$ ○ $f(t) := \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} F(s)e^{st}dt$

○ $f(t) := \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} F(s)e^{-st}ds$ ⊗ $f(t) := \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} F(s)e^{st}ds$

3. Si faccia riferimento al diagramma di Bode dei moduli di un sistema $G(s)$ a fase minima.

Utilizzando la formula di Bode, calcolare in modo approssimato la fase φ del sistema $G(s)$ in corrispondenza delle seguenti pulsazioni ω:

$$\omega_1 = 0.01 \quad \rightarrow \quad \varphi_1 \simeq -\frac{\pi}{2}$$
$$\omega_2 = 0.1 \quad \rightarrow \quad \varphi_2 \simeq -\frac{\pi}{4}$$
$$\omega_3 = 10 \quad \rightarrow \quad \varphi_3 \simeq 0$$
$$\omega_4 = 100 \quad \rightarrow \quad \varphi_4 \simeq -\frac{\pi}{2}$$



4. In figura è mostrato il diagramma di Bode dei moduli di un sistema lineare $G(s)$ a fase minima.

a) Determinare la posizione dei poli dominanti:

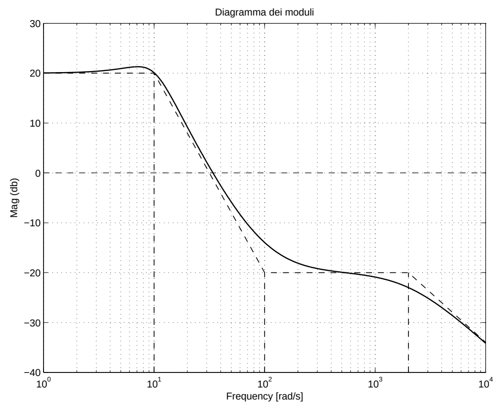
$$p_{1,2} \simeq -5 \pm 8.66\,j;$$

b) Calcolare il guadagno statico del sistema:

$$G(0) = 20 \text{ db} = 10;$$

c) Calcolare la larghezza di banda ω_{f0} del sistema $G(s)$ posto in retroazione unitaria negativa:

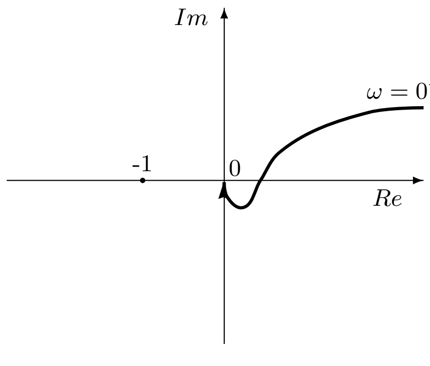
$$\omega_{f0} \simeq 33$$



5. Dato il seguente diagramma di Nyquist di una funzione $G(s)$ con 2 poli nell'origine e tutti gli altri a parte reale negativa, disegnate il diagramma polare completo.

Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

○ $(K > 0,\ |K| << 1)$;
○ $(K > 0,\ |K| >> 1)$;
○ $(K < 0,\ |K| >> 1)$;
⊗ $(K < 0,\ |K| << 1)$;



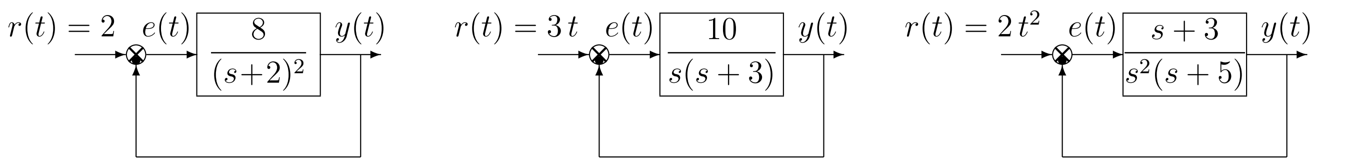
6. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+} y(t)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{5(2\,s-3)(s+1)}{s(s+2)(3\,s+50)} \qquad \to \qquad y_0 = \frac{10}{3}, \qquad y_\infty = -0.15$$

7. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema del secondo ordine caratterizzato da un guadagno statico $G(0) = 5$, da una pulsazione naturale $\omega_n = 10$ e da un coefficiente di smorzamento $\delta = 0.5$:

$$G(s) = \frac{500}{s^2 + 10\,s + 100}.$$

8. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



$$e(\infty) = \frac{2}{3} \qquad\qquad e(\infty) = \frac{9}{10} \qquad\qquad e(\infty) = \frac{20}{3}$$

9. Se i coefficienti dell'equazione caratteristica di un sistema retroazionato sono tutti positivi, allora è possibile affermare che il sistema retroazionato

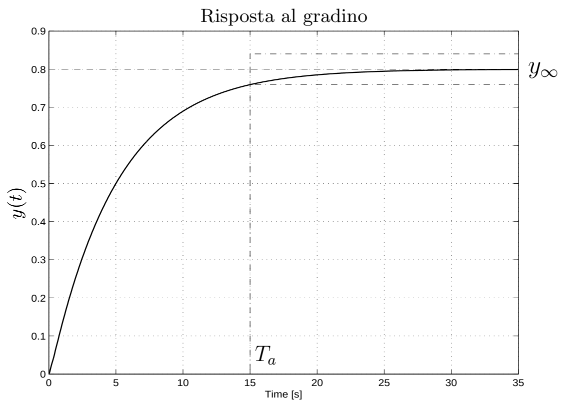
○ è stabile
⊗ può essere instabile
⊗ può essere stabile
○ è instabile

10. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{30\,(2 + 0.01\,s)(s^2 + 20\,s + 160)}{(2\,s+10)(15\,s+3)(s^2 + 10\,s + 400)}$$

Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$$y_\infty = 0.8, \qquad T_a \simeq 15\,\mathrm{s}, \qquad T_\omega \simeq \infty\,\mathrm{s}.$$



11. Calcolare la posizione σ_a dell'asintoto verticale del diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(2+6\,s)(s^2 - 6\,s + 3)}{s(s^3 + 9\,s^2 + 2\,s + 8)} \qquad \to \qquad \sigma_a = \frac{3}{4}\left(3 - 2 - \frac{1}{4}\right)$$

12. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$ supponendo $t_0 > 0$:

$$G(s) = \frac{(1-5\,s)^2}{s^2(s+3)}\,e^{-2\,t_0 s} \qquad \to \qquad \begin{cases} M(\omega) = \dfrac{1 + 25\omega^2}{\omega^2\sqrt{\omega^2+9}} \\ \varphi(\omega) = -\pi - 2\,t_0\,\omega - \arctan\dfrac{\omega}{3} - 2\arctan 5\,\omega \end{cases}$$