

Controlli Automatici - Prima parte
21 Giugno 2024 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. Elet. Telec. Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = [3 - 5 e^{-3t}] \cos(2t),$$

$$x_2(t) = [5 t^2 + 2 \sin(3t)] e^{-4t}$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{3s}{s^2 + 4} - \frac{5(s+3)}{(s+3)^2 + 4},$$

$$X_2(s) = \frac{10}{(s+4)^3} + \frac{6}{(s+4)^2 + 3^2}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{16}{s^2(s+2)},$$

$$G_2(s) = 2 e^{-3s} + \frac{6}{s^2 + 81}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -4 + 8t + 4e^{-2t},$$

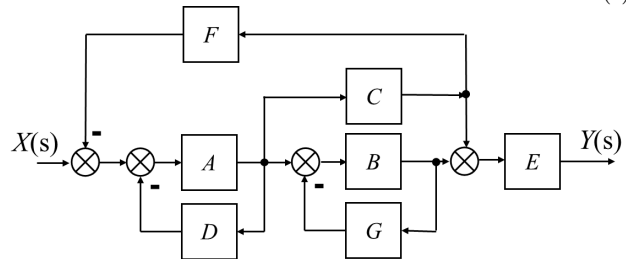
$$g_2(t) = 2 \delta(t - 3) + \frac{2}{3} \sin(9t)$$

Infatti, per la funzione $G_1(s)$ si ha:

$$\mathcal{L}^{-1} [G_1(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{16}{s^2(s+2)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{4}{s} + \frac{8}{s^2} + \frac{4}{s+2} \right] = -4 + 8t + 4e^{-2t}$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$:

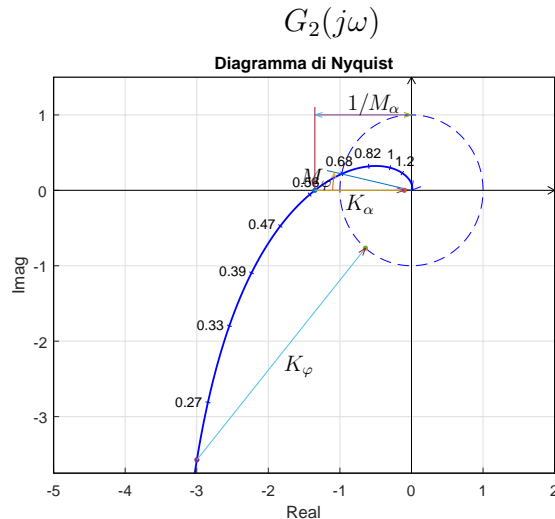
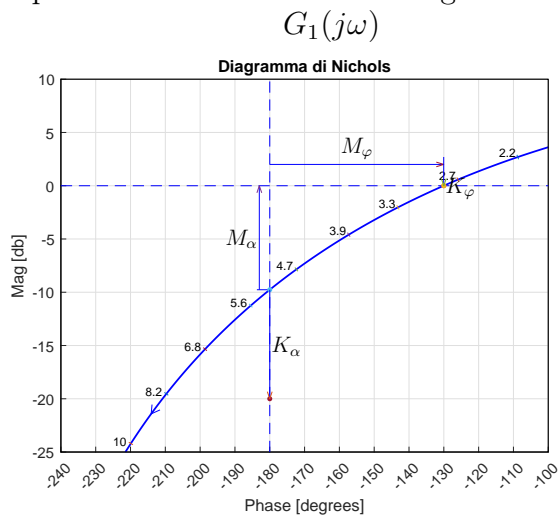
$$G_1(s) = \frac{ABE + ACE(1 + BG)}{1 + AD + BG + ACF + ADBG + ACFBG}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$. Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

- c.1) il margine di ampiezza M_α del sistema;
- c.2) il margine di fase M_φ del sistema;
- c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 50$;
- c.4) il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 10$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:



c.1) $M_\alpha = 9.76 \text{ db} = 3.08$

c.1) $M_\alpha = 0.741$

c.2) $M_\varphi = 50$

c.2) $M_\varphi = -12.5$

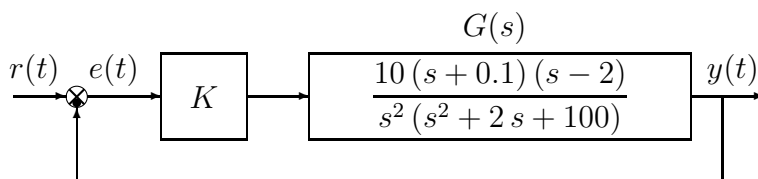
c.3) $K_\varphi = 0 \text{ db} = 1$

c.3) $K_\varphi = 0.214$

c.4) $K_\alpha = -10.2 \text{ db} = 0.308$

c.4) $K_\alpha = 0.0741$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K \frac{10(s+0.1)(s-2)}{s^2(s^2+2s+100)} = 0 \rightarrow s^4 + 2s^3 + (10K+100)s^2 + (-19K)s + (-2K) = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 10K+100 & -2K \\ 3 & 2 & -19K & \\ 2 & 39K+200 & -4K & \\ 1 & -3792K-741K^2 & & \\ 0 & -4K & & \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano positivi si ricavano i seguenti vincoli:

$$39K + 200 > 0, \quad -3792K - 741K^2 > 0, \quad -4K > 0,$$

dai quali si ricava:

$$K > -5.1282, \quad -5.1174 < K < 0, \quad K < 0.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K_1 = -5.1174 < K < 0 = K^*.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è $\omega^* = 0$ perché K^* annulla la riga 0 della tabella di Routh. La pulsazione ω_1 corrispondente al valore limite K_1 è:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{-4K_1}{39K_1 + 200}} = \sqrt{\frac{-19K_1}{2}} = 6.9725.$$

perché il valore limite K_1 annulla la riga 1 della tabella di Routh.

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

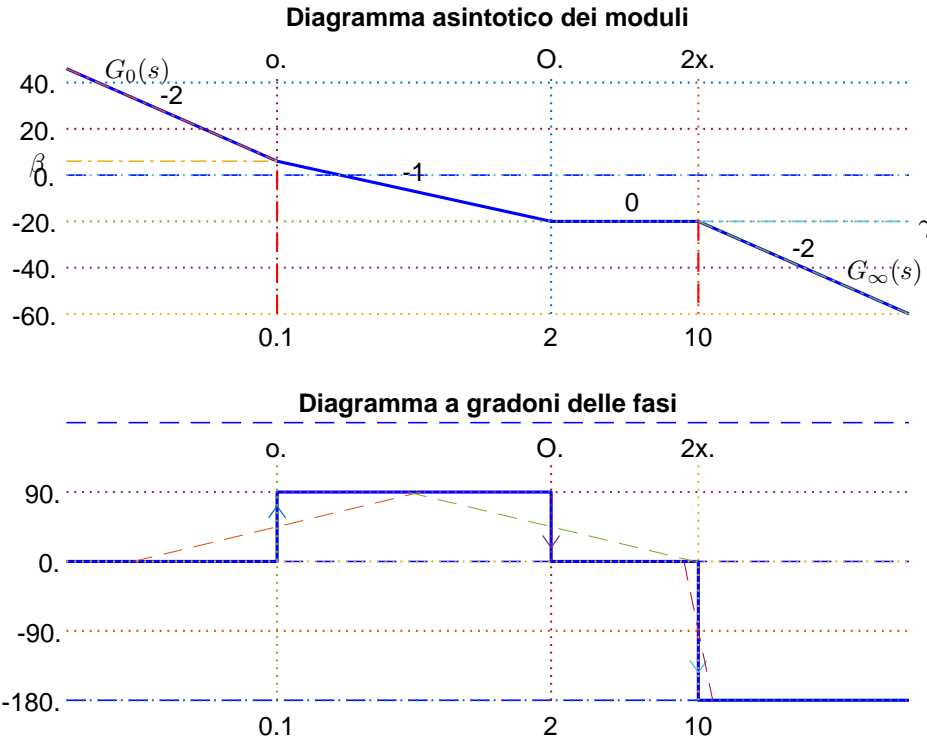


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \rightarrow 0$ ed $\omega \rightarrow \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{-0.02}{s^2}, \quad G_\infty(s) = \frac{10}{s^2}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_\infty = -\pi.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.1} = 2 = 6.021 \text{ db}, \quad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = 0.1 = -20 \text{ db}.$$

Coefficienti di smorzamento dei poli complessi coniugati: $\delta_1 = 0.1$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” della funzione $G(s)$. Calcolare le intersezioni σ_i^* con il semiasse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* .

Soluzione.

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 3. La fase iniziale del sistema

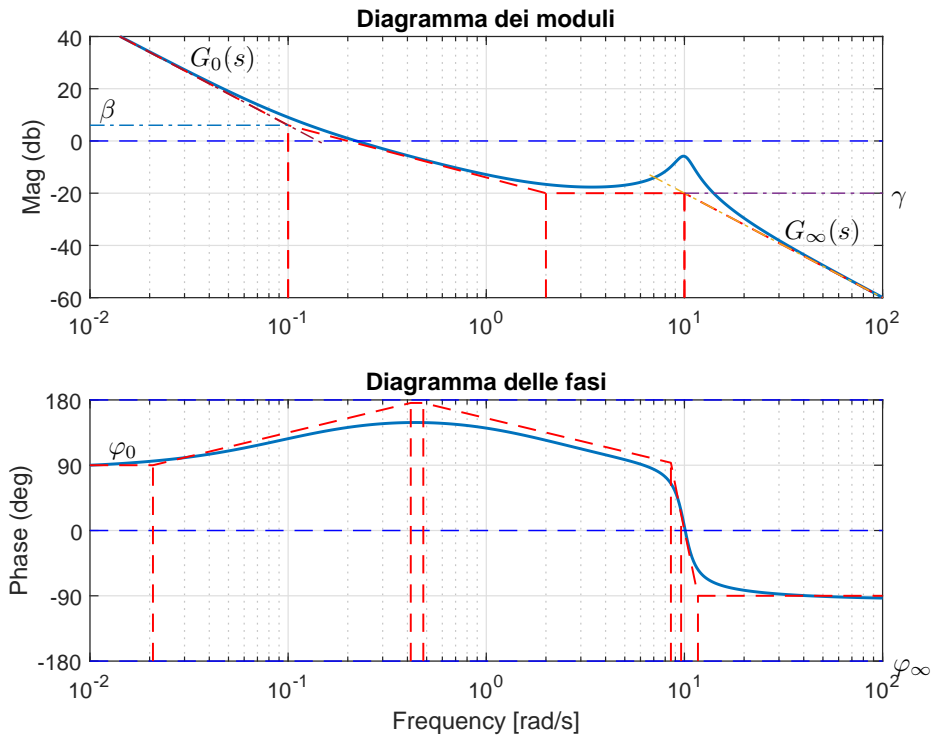


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

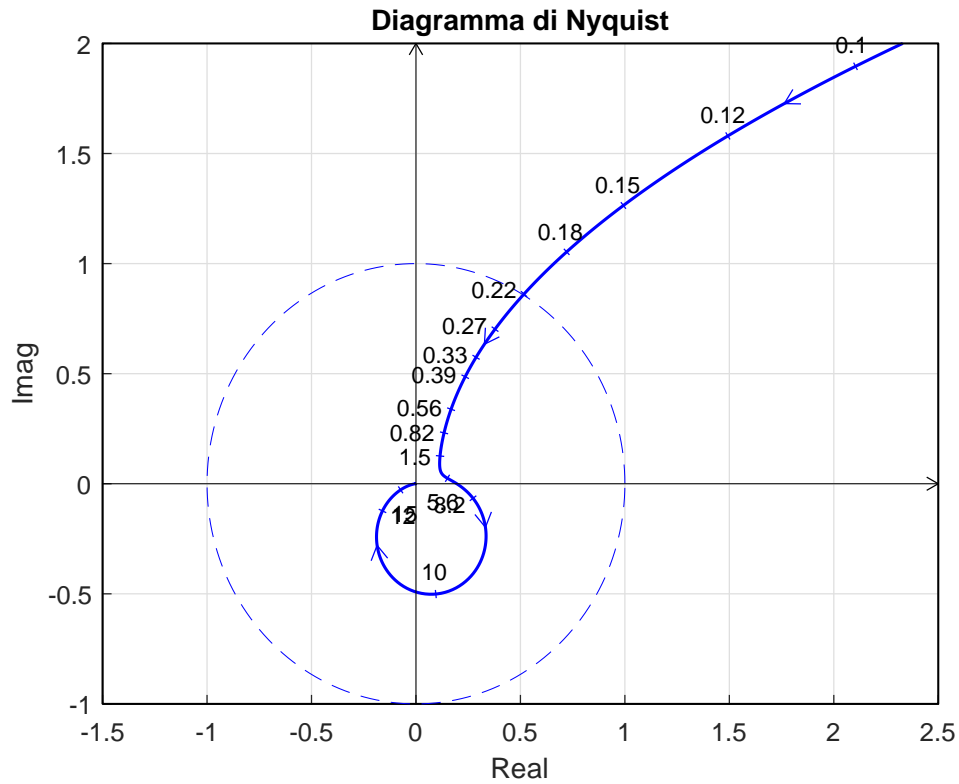


Figura 3: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

è $\varphi_0 = 0$. Per $\omega \rightarrow 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = 10 + \frac{1}{-2} - \frac{2}{100} = 9.48 > 0.$$

Il sistema è di tipo 2 per cui nel diagramma di Nyquist non è presente nessun asintoto. Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = 0$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \pi = -\pi.$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $-\pi$ in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\pi$. Per $\omega \rightarrow \infty$ il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\pi$ in quanto la somma Δ_p del sistema è positiva:

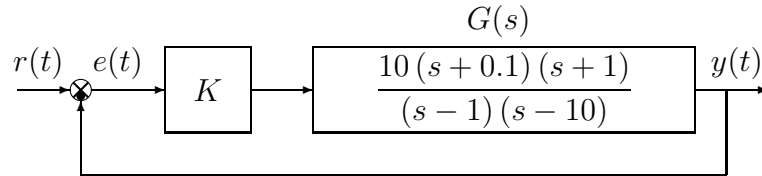
$$\Delta_p = -0.1 + 2 + 2 = 3.9 > 0.$$

Per $K = K_1$, l'intersezione σ_1 del diagramma di Nyquist con l'asse reale negativo si ha nel punto:

$$\sigma_1 = -\frac{1}{K_1} = \frac{1}{5.1174} = 0.1954.$$

in corrispondente della pulsazione $\omega_1 = 6.9725$.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K \frac{10(s+0.1)(s+1)}{(s-1)(s-10)} = 0 \quad \rightarrow \quad (10K+1)s^2 + (11K-11)s + (K+10) = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 10K+1 & K+10 \\ 1 & 11K-11 & \\ 0 & K+10 & \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano positivi si ricavano i seguenti vincoli:

$$10K+1 > 0, \quad 11K-11 > 0, \quad K+10 > 0,$$

dai quali si ricava:

$$K > -0.1, \quad K > 1, \quad K > -10.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 1 = K^*.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K_1 è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{K^*+10}{10K^*+1}} = 1.$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano negativi si ricavano i seguenti vincoli:

$$K < -0.1, \quad K < 1, \quad K < -10 \quad \rightarrow \quad K < -10 = K_1.$$

La pulsazione ω_1 corrispondente al valore limite K_1 è $\omega_1 = 0$ perché il valore limite K_1 annulla la riga 0 della Tabella di Routh. Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$(K < -10 = K_1) \cup (K > 1 = K^*)$$

e.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$.

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

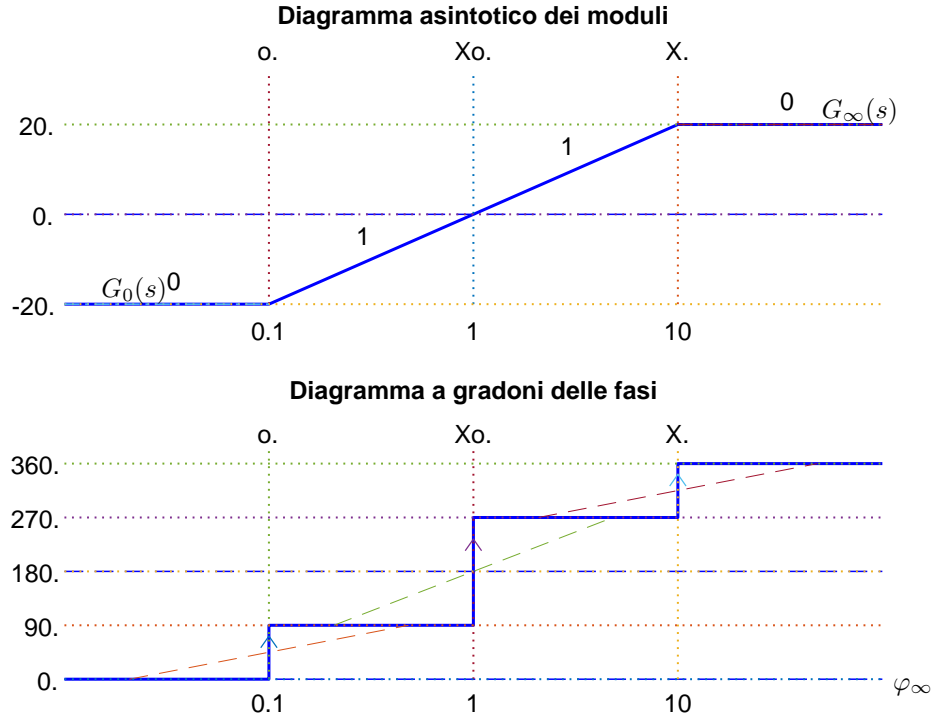


Figura 4: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \rightarrow 0$ ed $\omega \rightarrow \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = 0.1, \quad G_\infty(s) = 10.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_\infty = 0 \equiv 2\pi.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.1} = 0.1 = -20 \text{ db}, \quad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = 10 = 20 \text{ db}.$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

e.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” della funzione $G_e(s)$.

Soluzione.

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 6. La fase iniziale del sistema

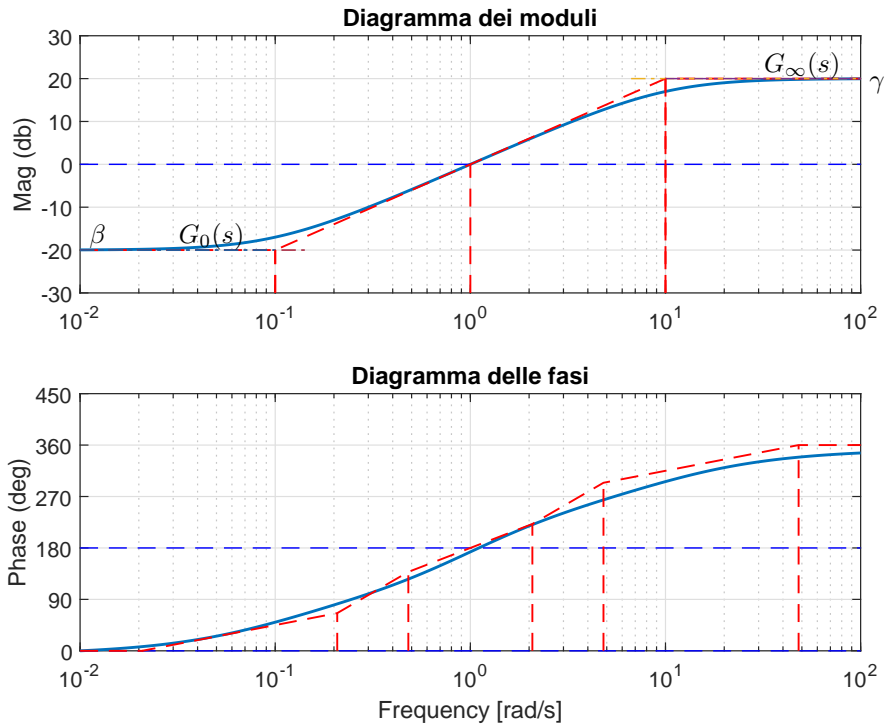


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

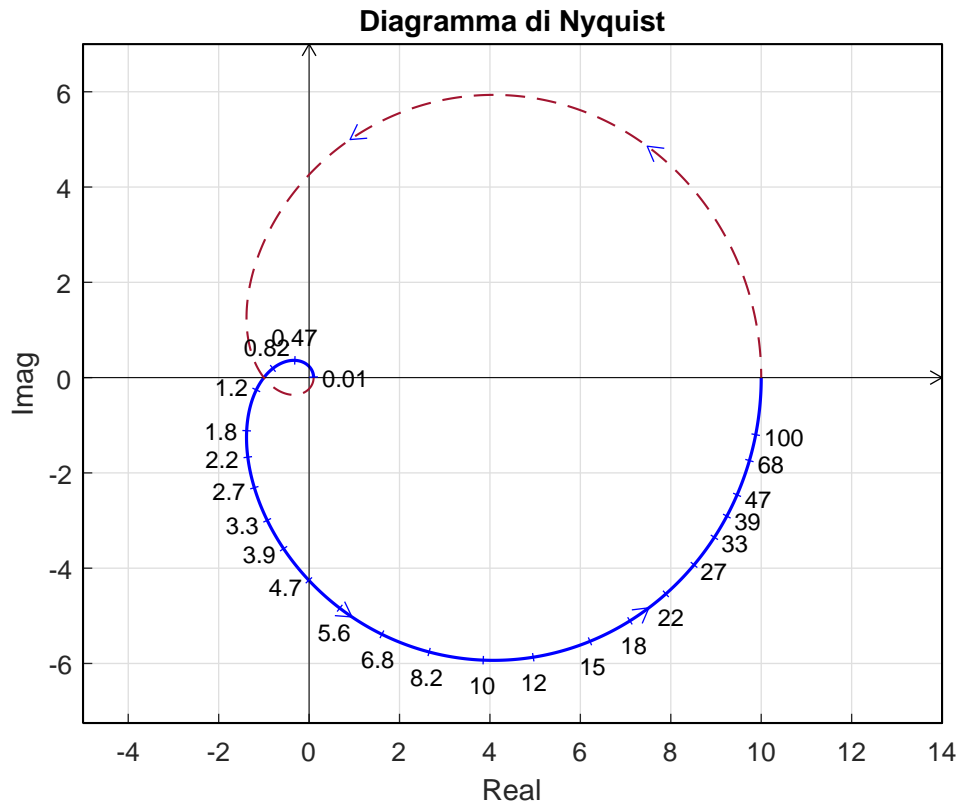


Figura 6: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

è $\varphi_0 = 0$. Per $\omega \rightarrow 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = 10 + 1 - \frac{1}{-1} - \frac{1}{-10} = 12.1 > 0.$$

Il sistema è di tipo 0 per cui nel diagramma di Nyquist non è presente nessun asintoto. Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = 0$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = +2\pi.$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $+2\pi$ in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = 2\pi$. Per $\omega \rightarrow \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = 2\pi$ in quanto la somma Δ_p del sistema è negativa:

$$\Delta_p = -0.1 - 1 - 1 - 10 = -12.1 < 0.$$

Per $K = K^*$, l'intersezione del diagramma di Nyquist con l'asse reale negativo si ha nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{1} = -1.$$

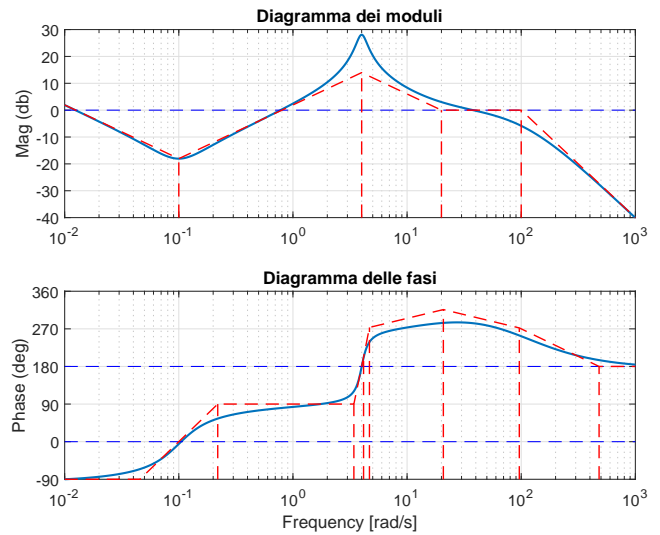
in corrispondente della pulsazione $\omega^* = 1$.

f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{10000(s+20)(s^2+0.1s+0.01)}{s(s+100)^2(s^2-0.8s+16)}$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ .



Soluzione. La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{10000(s+20)(s^2+0.1s+0.01)}{s(s+100)^2(s^2-0.8s+16)}$$

Il valore $K = 10000$ può essere calcolato in due modi diversi:

1) calcolando il modulo β dell'approssimante $G_0(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.1$:

$$|G_0(s)|_{s=0.1j} = \left| \frac{1.25 \cdot 10^{-6} K}{s} \right|_{s=0.1j} = \frac{1.25 \cdot 10^{-6} K}{0.1} = \beta \simeq -18.1 \text{ db} \simeq 0.125 \quad \Rightarrow \quad K \simeq 10000.$$

2) calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 100$:

$$|G_\infty(s)|_{s=100j} = \left| \frac{K}{s^2} \right|_{s=100j} = \frac{K}{100^2} = \gamma \simeq 0 \text{ db} \simeq 1 \quad \rightarrow \quad K \simeq 10000.$$

I coefficienti di smorzamento δ delle coppie di poli o zeri complessi coniugati presenti all'interno della funzione $G(s)$ sono i seguenti:

$$\begin{aligned} (s^2 - 0.8s + 4^2) &\rightarrow M_{\omega_n} \simeq 14 \text{ db} = 5 &\rightarrow \delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq 0.1 \\ (s^2 + 0.1s + 0.1^2) &\rightarrow M_{\omega_n} \simeq 0 \text{ db} = 1 &\rightarrow \delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq 0.5 \\ (s^2 + 200s + 100^2) &\rightarrow M_{\omega_n} \simeq -6.02 \text{ db} = 0.5 &\rightarrow \delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq 1 \end{aligned}$$

I valori M_{ω_n} si leggono sul diagramma di Bode dei moduli come distanza tra il diagramma asintotico e il diagramma reale alla pulsazione ω_n .

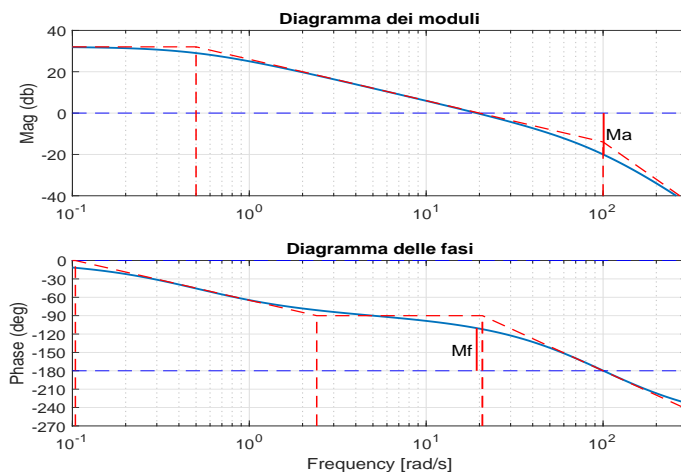
g) In figura sono mostrati i diagrammi di Bode di un sistema lineare $G(s)$ a fase minima. Nei limiti della precisione del grafico, calcolare:

a) Margine di fase M_φ del sistema $G(s)$:

$$M_\varphi = 70^\circ$$

a) Margine di ampiezza M_a del sistema $G(s)$:

$$M_a = 10$$



Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. Elet. Telec. Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Scrivere, in funzione dei segnali $x(t)$ e $y(t)$, l'equazione differenziale corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + 4s + 3}{3s^4 + s^3 + 5s^2 + 2s + 4} \quad \rightarrow \quad 3\ddot{y} + \dot{y} + 5\ddot{y} + 2\dot{y} + 4y = \ddot{x} + 4\dot{x} + 3x$$

Usando il criterio di Routh dire quanti sono i poli a parte reale positiva della funzione $G(s)$:

- 0 poli instabili; 1 polo instabile; 2 poli instabili; 3 poli instabili;

Infatti, la tabella di Routh applicata al denominatore della funzione $G(s)$ ha la seguente

struttura:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & \\ 2 & -1 & 4 & \\ 1 & 6 & & \\ 0 & 4 & & \end{array}$$

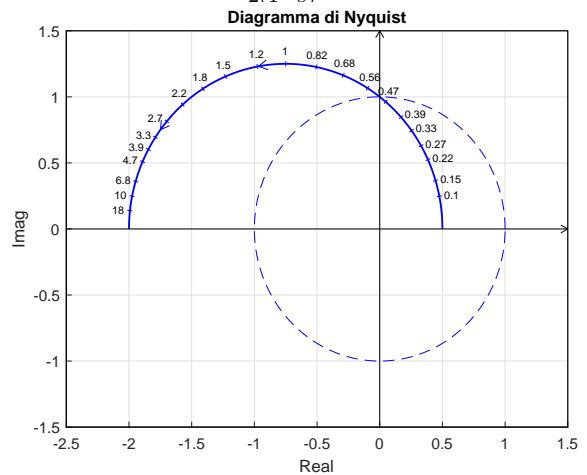
2. Nella scomposizione in fratti semplici, qual è la posizione $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ e il grado di molteplicità ν della coppia di poli complessi coniugati corrispondente all'andamento temporale $g_1(t) = 5t^2 e^{-3t} \sin(8t - 4)$:

$$p_{1,2} = \sigma \pm j\omega = -3 \pm j8, \quad \nu = 3.$$

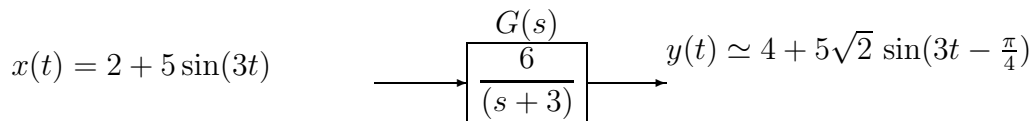
3. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $\frac{(4s+1)}{2(1-s)}$.

Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $KG(s)$ è stabile per i seguenti valori di K :

- $\frac{1}{2} < K < 2$;
 $-2 < K < \frac{1}{2}$;
 $-2 < K < -\frac{1}{2}$;
 $(K < -2) \cup (K > \frac{1}{2})$;



4. Calcolare il segnale sinusoidale in ingresso $x(t)$ del seguente sistema quando in uscita, a regime, è presente il segnale $y(t) = 4 + 5\sqrt{2} \sin(3t - \frac{\pi}{4})$:



Infatti, i valori della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ per $\omega = 0$ e per $\omega = 3$ sono i seguenti:

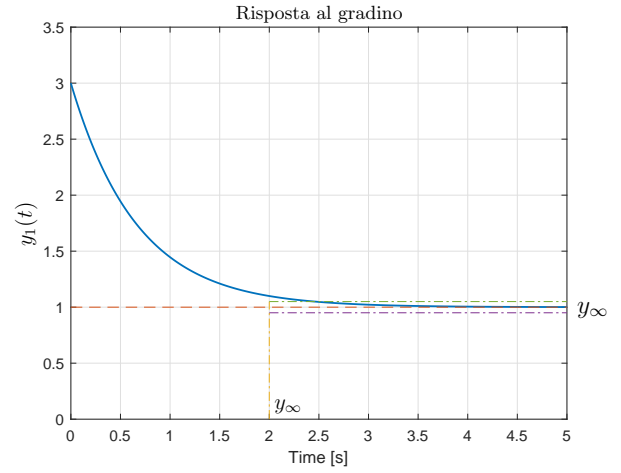
$$G(j0) = 4, \quad G(j3) = \frac{6}{(j3+3)} = \frac{6}{(3\sqrt{2})} e^{-j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

5. Utilizzando i teoremi del valore iniziale e del valore finale, disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{3 + 6s}{3 + 2s}$$

Calcolare il valore iniziale y_0 , il valore finale y_∞ e il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$:

$$y_0 = 3, \quad y_\infty \simeq 1, \quad T_a \simeq 2 \text{ s.}$$



6. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $2\dot{y}(t) + 5y(t) = 0$ con condizione iniziale $y(0) = 3$. Applicando la trasformata di Laplace si ha:

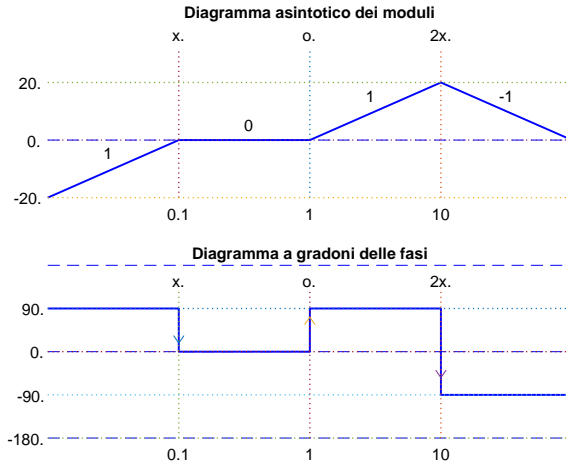
$$2(sY(s) - 3) + 5Y(s) = 0 \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{3}{s + 2.5} \quad \rightarrow \quad y(t) = 3e^{-2.5t}.$$

7. Per un sistema del 2° ordine privo di zeri, scrivere le funzioni $S(\delta)$ e $M_R(\delta)$ che legano la massima sovraelongazione $S\%$ e il picco di risonanza M_R al coefficiente di smorzamento δ :

$$S(\delta) = 100 e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}, \quad M_R(\delta) = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$$

8. Si faccia riferimento al diagramma asintotico di Bode dei moduli riportato a fianco, relativo ad un sistema $G(s)$ a fase minima.

Utilizzando in modo qualitativo la formula di Bode, calcolare in modo approssimato l'andamento a gradoni del diagramma di Bode delle fasi del sistema $G(s)$.



9. Un sistema $G(s)$ retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se :

- il margine di fase $M_\varphi > 0$; il margine di fase $M_\varphi > 1$;
 il margine di ampiezza $M_a > 0$; il margine di ampiezza $M_a > 1$;

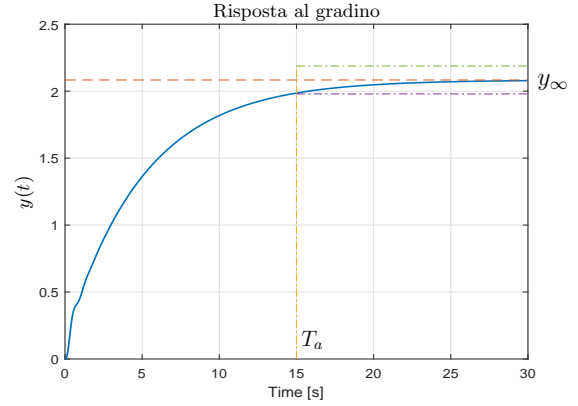
10. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{30(1 + 0.5s)(s + 20)(s^2 + 16s + 60^2)}{(3s + 18)(5s + 1)(s^2 + 30s + 900)(s^2 + 5s + 64)}$$

Calcolare inoltre:

- il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \rightarrow \infty$;
- il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
- il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$$y_\infty = 2.0833, \quad T_a \simeq 15 \text{ s}, \quad T_\omega \simeq \emptyset$$



11. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$ supponendo $t_0 > 0$:

$$G(s) = \frac{(2s + 3)^2}{s(5s - 2)} e^{-3t_0s} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} M(\omega) = \frac{4\omega^2 + 9}{\omega\sqrt{4 + 25\omega^2}} \\ \varphi(\omega) = 2 \arctan \frac{2\omega}{3} - 3t_0\omega - \frac{\pi}{2} - \pi + \arctan \frac{5\omega}{2} \end{cases}$$