Controlli Automatici A
Compito Completo
19 Aprile 2011 - Esercizi

Compito B Nr. $a =$ $b =$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad a e b i valori assegnati e si risponda alle domande.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = (\mathbf{b} + e^{-\mathbf{a}t})\cos(3\,\mathbf{b}\,t), \qquad x_2(t) = 2\,(\mathbf{b} + t^3)\,e^{\mathbf{a}\,t}$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{\mathbf{b}\,s}{s^2 + 9\,\mathbf{b}^2} + \frac{s + \mathbf{a}}{(s+\mathbf{a})^2 + 9\,\mathbf{b}^2}, \qquad X_2(s) = \frac{2\mathbf{b}}{(s-\mathbf{a})} + \frac{12}{(s-\mathbf{a})^4}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

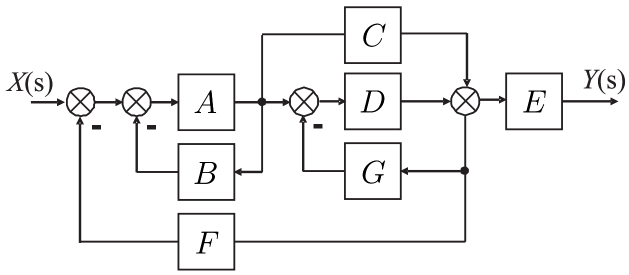
$$G_1(s) = \frac{\mathbf{b}}{s^2(1 + \mathbf{b}\,s)} \qquad G_2(s) = \frac{\mathbf{a}\,e^{-\mathbf{b}\,s}}{s^2}$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+\frac{1}{\mathbf{b}})}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathbf{b}}{s^2} - \frac{\mathbf{b}^2}{s} + \frac{\mathbf{b}^2}{(s+\frac{1}{\mathbf{b}})}\right], \\ &= \mathbf{b}\,t - \mathbf{b}^2 + \mathbf{b}^2\,e^{-\frac{t}{\mathbf{b}}} \end{aligned} \qquad g_2(t) = \begin{cases} 0 & t < \mathbf{b} \\ \mathbf{a}(t - \mathbf{b}) & t \geq \mathbf{b} \end{cases}$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$:

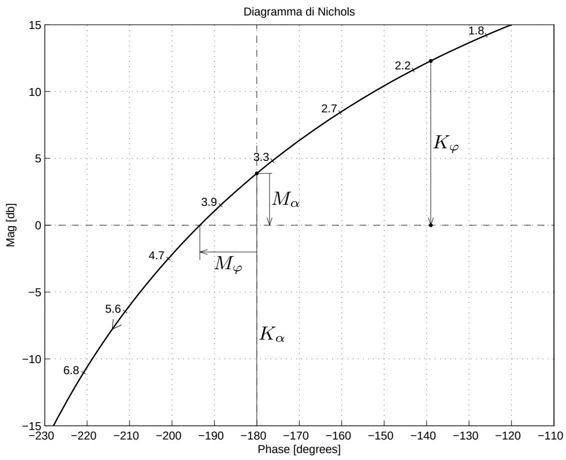
$$G_1(s) = \frac{ADE + ACE}{1 + AB + DG + ADF + ACF + ABDG}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:
c.1) il margine di ampiezza M_a e il margine di fase M_φ del sistema;
c.2) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\,G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = (35 + 3\,\mathbf{b})$;
c.3) il guadagno K_a per cui il sistema $K_a\,G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_a = (2 + \mathbf{a})$;

Per $\mathbf{b} = 8$ e $\mathbf{a} = 2$ si ha $M_\varphi = 59^o$ e $M_a = 4$. I parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$



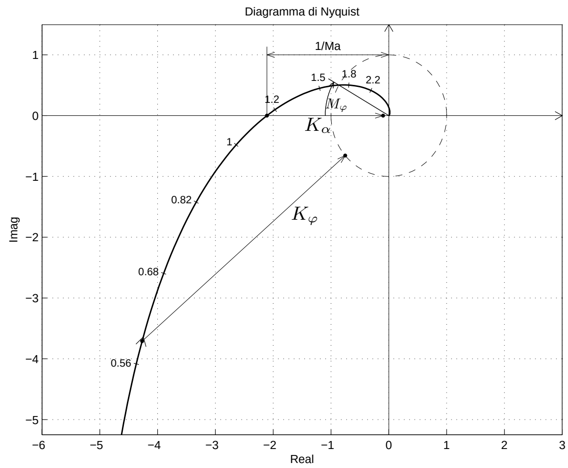
c.1) $M_a = -3.87$ db $= 0.64$

$M_\varphi = -13.4$ gradi

c.2) $K_\varphi = -12.3$ db $= 0.243$

c.3) $K_a = -23.9$ db $= 0.064$

$G_2(j\omega)$



c.1) $M_a = 0.474$

$M_\varphi = -30.2$ gradi

c.2) $K_\varphi = 0.176$

c.3) $K_a = 0.0475$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:

$$r(t) \to e(t) \to \boxed{K} \to \boxed{G(s) = \frac{20(s^2 + 0.2\,s + 0.16)}{s\,(\mathbf{b} - s)(s + 10)}} \to y(t)$$

d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{20K(s^2 + 0.2\,s + 0.16)}{s\,(\mathbf{b} - s)(s + 10)} = 0 \quad \to \quad s^3 + (10 - \mathbf{b} - 20K)s^2 - (4K + 10\mathbf{b})s - 3.2K = 0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|ccl} 3 & 1 & -(4K + 10\mathbf{b}) & \to \quad 1 > 0 \\ 2 & (10 - \mathbf{b} - 20K) & -3.2K & \to \quad K < \frac{10-\mathbf{b}}{20} \\ 1 & (20K - 10 + \mathbf{b})(4K + 10\mathbf{b}) + 3.2K & & \to \quad K < K^* \\ 0 & -3.2K & & \to \quad K < 0 \end{array}$$

Dalla riga 1 si ricava la seguente equazione:

$$80K^2 + (204\mathbf{b} - 36.8)K - 10\mathbf{b}(10 - \mathbf{b}) = 0$$

L'equazione ha una radice positiva e una radice negativa. La radice negativa K_1 vale:

$$K_1 = \frac{-102\mathbf{b} + 18.4 - \sqrt{(-102\mathbf{b} + 18.4)^2 + 800\mathbf{b}(10 - \mathbf{b})}}{80}$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K < K_1 = K^*$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{-4K^* - 10\mathbf{b}}$$

Per $\mathbf{b} = 5$ si ha $K^* = -12.54$ e $\omega^* = 0.396$.

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ per $\mathbf{b} = 5$ sono mostrati in Fig. 1. Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le

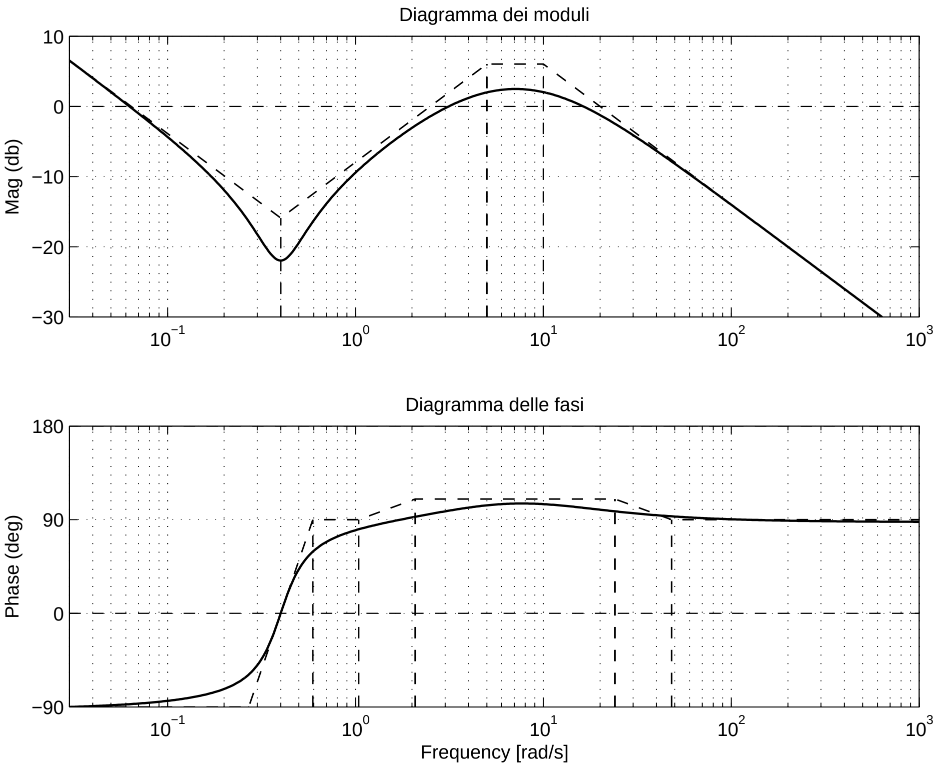


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ per $\mathbf{b} = 5$.

seguenti:

$$G_0(s) = \frac{3.2}{10\mathbf{b}\, s}, \qquad G_\infty(s) = -\frac{20}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ sono:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \qquad \varphi_\infty = -\frac{3\,\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze, i guadagni β e γ in corrispondenza delle pulsazioni $\omega = 0.4$ e $\omega = 10$ hanno i seguenti valori:

$$\beta = 0.16 = -15.9 \text{ db}, \qquad \gamma = 2 = 6 \text{ db}.$$

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\mathbf{b} = 5$ e $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 2. La fase iniziale del sistema coincide con la vase φ_0 dell'approssimante $G_0(s)$. Per $\omega \to 0^+$ la somma delle costanti di tempo del sistema è negativa:

$$\Delta\tau = \frac{0.2}{0.16} + \frac{1}{\mathbf{b}} - \frac{1}{10} = 1.15 + \frac{1}{\mathbf{b}} > 0$$

per cui il diagramma parte sempre in anticipo rispetto alla fase iniziale φ_0. Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale la cui posizione è:

$$\sigma_a = K_\tau\, \Delta_\tau = \frac{3.2}{10\mathbf{b}} \left(1.15 + \frac{1}{\mathbf{b}}\right) = \frac{0.32(1.15\mathbf{b} + 1)}{\mathbf{b}^2}$$

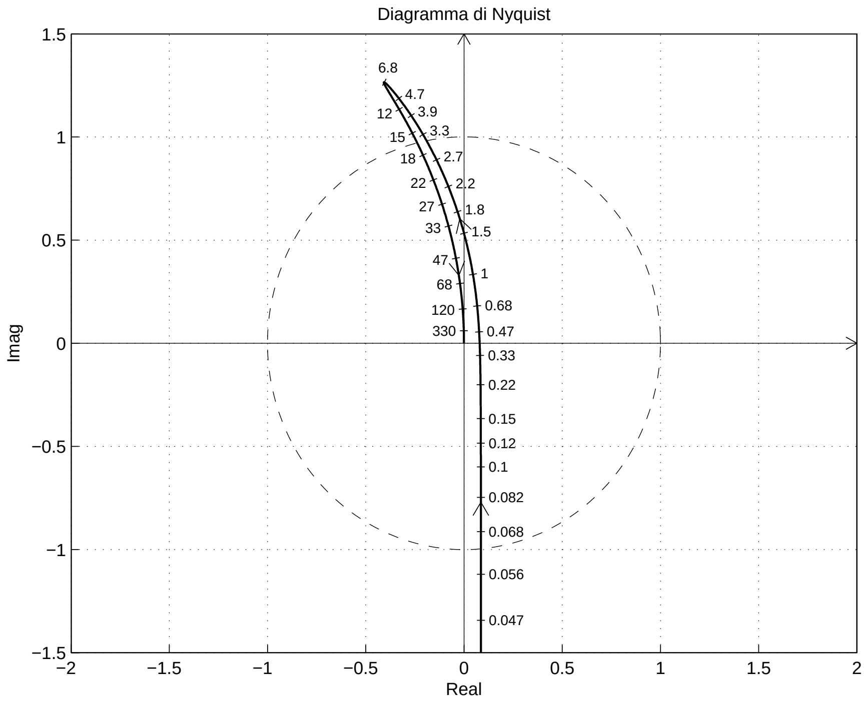


Figura 2: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\mathbf{b} = 5$ e $\omega \in [0,\ \infty]$.

Per $\mathbf{b} = 5$ si ha $\sigma_a = 0.0864$. La variazione di fase $\Delta\varphi$ della funzione $G(j\,\omega)$ quando $\omega \in [0^+,\ \infty]$ è $\Delta\varphi = \pi$. Vi è un'unica intersezione σ_1^* con il semiasse reale positivo. Tale intersezione si ricava direttamente dalla precedente analisi di Routh:

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{K^*}$$

Il corrispondente valore di ω_1^* è quello determinato con il criterio di Routh: $\omega_1^* = \omega^*$. Per $\mathbf{b} = 5$ si ha $\sigma_1^* = 0.0797$ e $\omega_1^* = 0.396$.

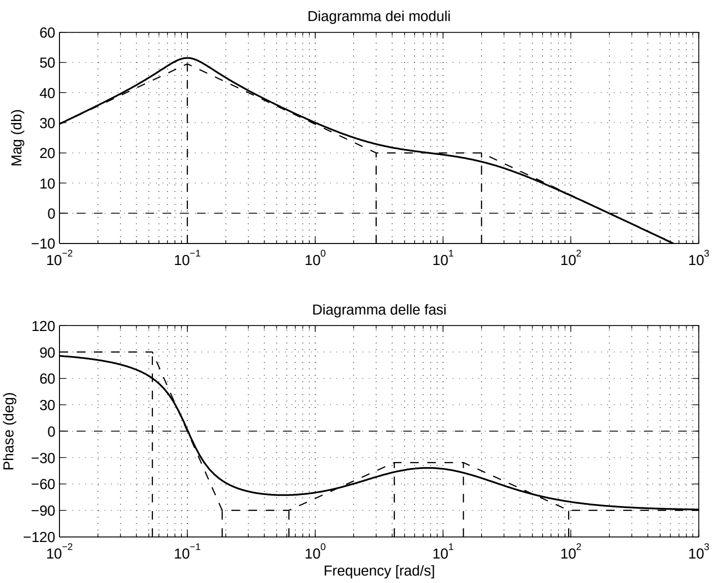
d.4) Calcolare, in funzione di K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ per ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

Soluzione: Il sistema $G(s)$ è tipo 1 per cui segnale di ingresso $r(t) = 3t$ può essere inseguito solo con errore a regime non nullo:

$$e_\infty(t) = \frac{R_0}{K_v} = \frac{3}{\frac{3.2\,K}{10\mathbf{b}}} = \frac{9.375\,\mathbf{b}}{K}.$$

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura.

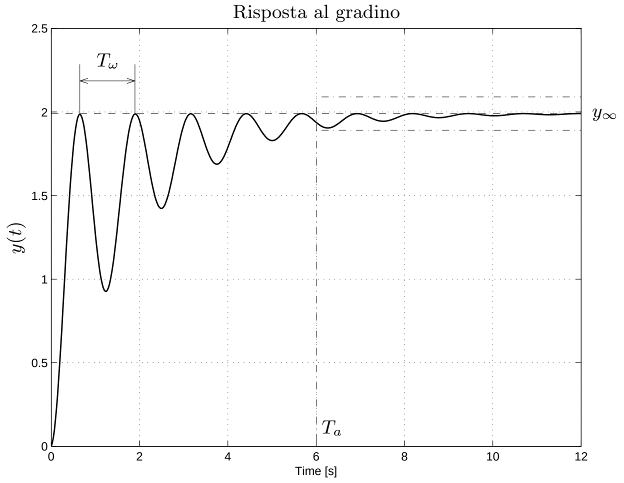
Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.



$$G(s) \simeq \frac{200s(s+3)}{(s^2+0.08s+0.01)(s+20)}$$

Il valore di δ è $\delta = 0.4$. Il valore $K = 200$ si determina imponendo che il modulo dell'approssimante $G_\infty(s) = \frac{K}{s}$ valga 20 db (cioè 10) per $\omega = 20$.

f) In figura è riportata la risposta $y(t)$ al gradino unitario di un sistema lineare $G(s)$ a fase minima i cui tre poli p_1, $p_{2,3}$ hanno la stessa parte reale. Nei limiti della precisione del grafico determinare:



1) Il guadagno statico del sistema:

$$G_0 = y_\infty = 2.$$

2) La posizione del polo reale p_1:

$$p_1 = -\frac{3}{T_a} = -\frac{3}{6} = -0.5.$$

3) La posizione dei poli complessi coniugati $p_{2,3}$:

$$p_{2,3} = -0.5 \pm \frac{2\pi}{1.25} j = -0.5 \pm 5.03j.$$

Controlli Automatici - Primo Compito
19 Aprile 2011 - Domande
Compito B Nr. $a =$ $b =$

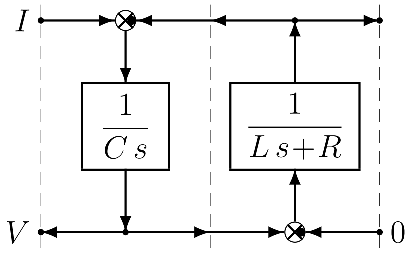
Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad "a" e "b" i valori assegnati e si risponda alle domande.

1. Il metodo della Trasformata di Laplace nella risoluzione di equazioni differenziali lineari a parametri concentrati

   ⊗ può essere utilizzato solo nel caso di equazioni tempo invarianti
   ○ può essere utilizzato anche nel caso di equazioni tempo varianti
   ⊗ permette di calcolare la risposta forzata del sistema
   ⊗ permette di calcolare la risposta libera del sistema

2. Dato il seguente schema a blocchi, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso I all'uscita V e scrivere la corrispondente equazione differenziale che lega i segnali $I(t)$ e $V(t)$:



$$G(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{L\,s + R}{CL\,s^2 + CR\,s + 1}$$

$$CL\ddot{V}(t) + CR\dot{V}(t) + V(t) = L\,\dot{I}(t) + R\,I(t)$$

3. Posto $R = 0$, calcolare la pulsazione di risonanza ω_R del sistema dinamico definito al punto 2:

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

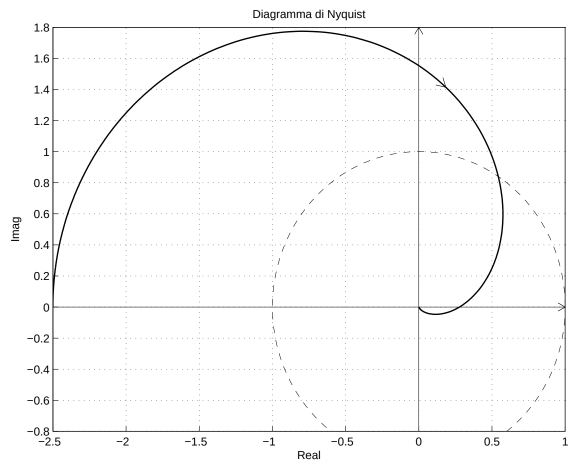
4. Sia $G(s)$ una funzione razionale fratta in s. La scomposizione in fratti semplici della funzione $G(s)$ mediante il metodo dei residui, $G(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s-p_i}$ con $K_i = \lim_{s\to p_i}(s-p_i)G(s)$,

   ○ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è propria ($n \geq m$)
   ⊗ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è strettamente propria ($n > m$)
   ○ è possibile solo per sistemi a fase minima
   ○ è sempre possibile

5. Il ritardo puro $G(s) = e^{-t_0 s}$ è:

   ⊗ un sistema stabile
   ○ un sistema a fase minima
   ⊗ un sistema lineare
   ○ un sistema non lineare

6. Sia dato il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \dfrac{-10}{(s+1)(s+2)^2}$



Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

   ○ $(K < 0,\ |K| >> 1)$;
   ⊗ $(K < 0,\ |K| << 1)$;
   ⊗ $(K > 0,\ |K| << 1)$;
   ○ $(K > 0,\ |K| >> 1)$;

7. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+} y(t)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{5\,(\mathbf{a}\,s - \mathbf{b})(s+1)}{s(s+2)(3\,s+50)} \qquad \to \qquad y_0 = \frac{5\mathbf{a}}{3}, \qquad y_\infty = -0.05\mathbf{b}$$

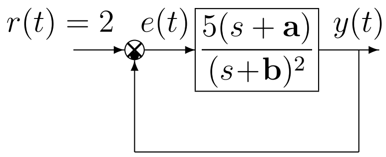
8. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $\dot{y}(t) + \mathbf{b}\,y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = \mathbf{a}$. Applicando la trasformata di Laplace si ha:

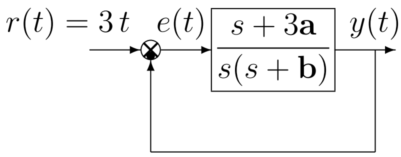
$$\mathcal{L}[\dot{y}(t) + \mathbf{b}\,y(t) = 0] \quad \to \quad s\,Y(s) - \mathbf{a} + \mathbf{b}\,Y(s) = 0$$

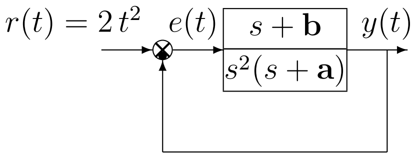
da cui si ottiene:

$$Y(s) = \frac{\mathbf{a}}{s+\mathbf{b}} \qquad \to \qquad y(t) = \mathbf{a}\,e^{-\mathbf{b}\,t}.$$

9. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:







$$e(\infty) = \frac{2\mathbf{b}^2}{\mathbf{b}^2 + 5\mathbf{a}} \qquad e(\infty) = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} \qquad e(\infty) = \frac{4\,\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$$

10. Posto $a_0 \neq 0$, l'equazione ausiliaria che di ottiene dalla tabella di Routh quando tutti gli elementi di una riga si annullano:

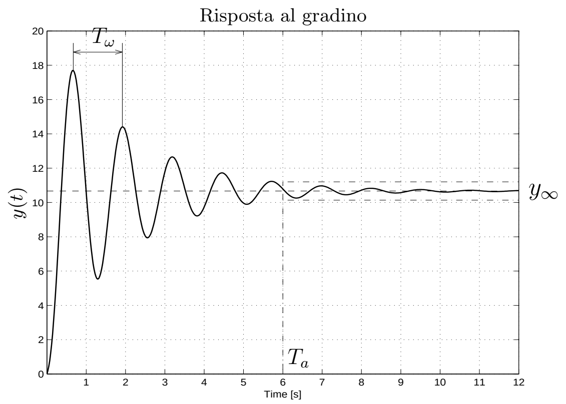
- ⊗ ha radici simmetriche rispetto all'origine
- ⊗ ha radici simmetriche rispetto all'asse immaginario
- ⊗ è composta solo da termini di grado pari in s
- ○ è composta solo da termini di grado dispari in s

11. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{(2+0.05\,s)(s^2+20\,s+400)}{(3+0.2\,s)(1+0.04\,s)(s^2+s+25)}$$

Calcolare inoltre:
1) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
2) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
3) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$y_\infty = 10.67, \qquad T_a \simeq 6\,\mathrm{s}, \qquad T_\omega \simeq 1.26\,\mathrm{s}.$



12. Calcolare la posizione σ_a dell'asintoto verticale del diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(5s^2 + 3\,\mathbf{b}\,s + \mathbf{b})}{s(4s^2 + 2\,\mathbf{a}\,s + \mathbf{a})} \qquad \to \qquad \sigma_a = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$$

13. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$ supponendo $t_0 > 0$:

$$G(s) = \frac{(\mathbf{b}+s)^2}{s(1-\mathbf{a}\,s)}\,e^{-3\,t_0 s} \qquad \to \qquad \begin{cases} M(\omega) = \dfrac{\omega^2 + \mathbf{b}^2}{\omega\sqrt{1+\omega^2\,\mathbf{a}^2}} \\ \varphi(\omega) = -\dfrac{\pi}{2} - 3\,t_0\,\omega + 2\arctan\dfrac{\omega}{\mathbf{b}} + \arctan\mathbf{a}\,\omega \end{cases}$$