Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Controlli Automatici - Prima parte
17 Aprile 2024 - Esercizi

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = [t^4 + 3\sin(5t)]\, e^{-3\,t}, \qquad\qquad x_2(t) = 5\, e^{-2\,t}\cos(4\,t) + 2\,\delta(t-3)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{24}{(s+3)^5} + \frac{15}{(s+3)^2+25}, \qquad\qquad X_2(s) = \frac{5(s+2)}{(s+2)^2+16} + 2\,e^{-3\,s}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G(s)$:

$$G_1(s) = \frac{5}{s^2} + \frac{12}{s(1+s)(3+s)}, \qquad\qquad G_2(s) = \frac{12\,e^{-3s}}{(s+2)^4}$$

Soluzione:

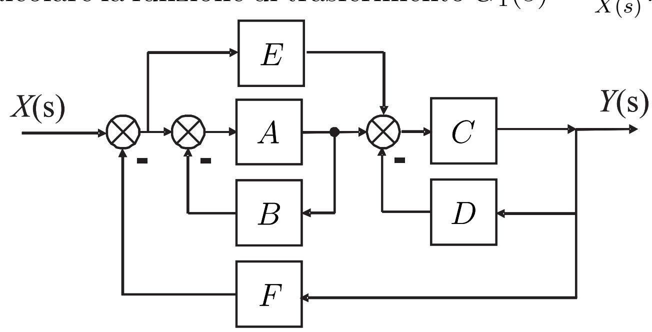
$$g_1(t) = 5\,t + 4 - 6\,e^{-t} + 2\,e^{-3\,t}, \qquad\qquad g_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ 2\,(t-3)^3 e^{-2(t-3)} & t \geq 3 \end{cases}$$

Infatti, per la seconda parte $\bar{G}_1(s)$ della funzione $G_1(s)$ si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\bar{G}_1(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{12}{s(s+1)(s+3)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s} - \frac{6}{(s+1)} + \frac{2}{(s+3)}\right] = 4 - 6\,e^{-t} + 2\,e^{-3\,t}.$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$:

$$G_1(s) = \frac{AC+EC(1+AB)}{1+AB+CD+ACF+ECF+ABCD+ABECF}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;

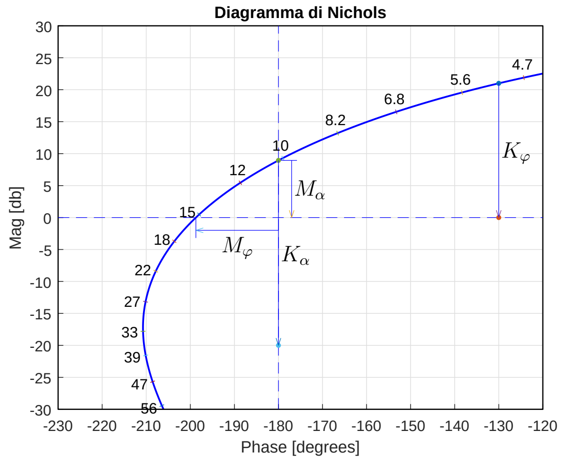
c.2) il margine di fase M_φ del sistema;

c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\, G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 50$;

c.4) il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha\, G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 10$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$



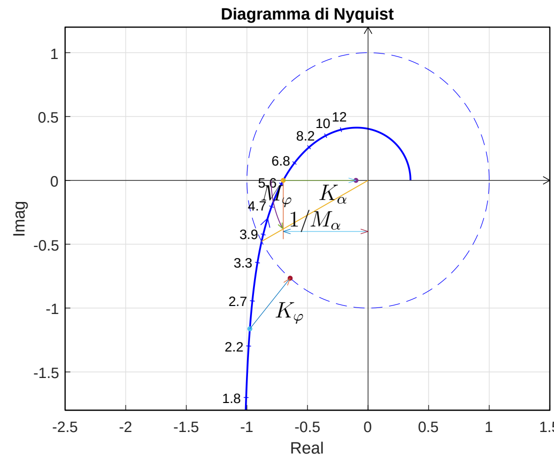
c.1) $M_a = -8.94$ db $= 0.357$

c.2) $M_\varphi = -18.7$

c.3) $K_\varphi = -21$ db $= 0.0891$

c.4) $K_\alpha = -28.9$ db $= 0.0357$

$G_2(j\omega)$



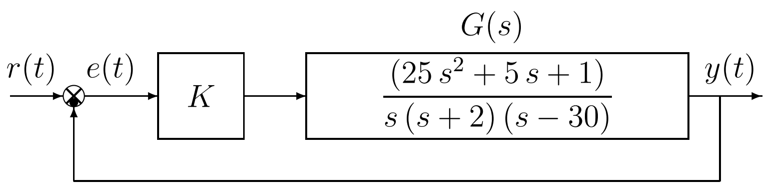
c.1) $M_a = 1.43$

c.2) $M_\varphi = 28.5$

c.3) $K_\varphi = 0.659$

c.4) $K_\alpha = 0.143$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K\,\frac{(25\,s^2+5\,s+1)}{s\,(s+2)\,(s-30)} = 0 \qquad \to \qquad s^3 + (25K-28)s^2 + (5K-60)s + K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 5K-60 \\ 2 & 25K-28 & K \\ 1 & 125K^2-1641K+1680 & \\ 0 & K & \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano positivi si ricavano i seguenti vincoli:

$$25K-28>0, \qquad 125K^2-1641K+1680>0, \qquad K>0,$$

dai quali si ricava:

$$K>1.12, \qquad (K<1.1192)\cup(K>12.0088), \qquad K>0.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 12.0088 = K_1.$$

La pulsazione ω_1 corrispondente al valore limite K_1 è:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_1}{25K_1-28}} = 0.21.$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

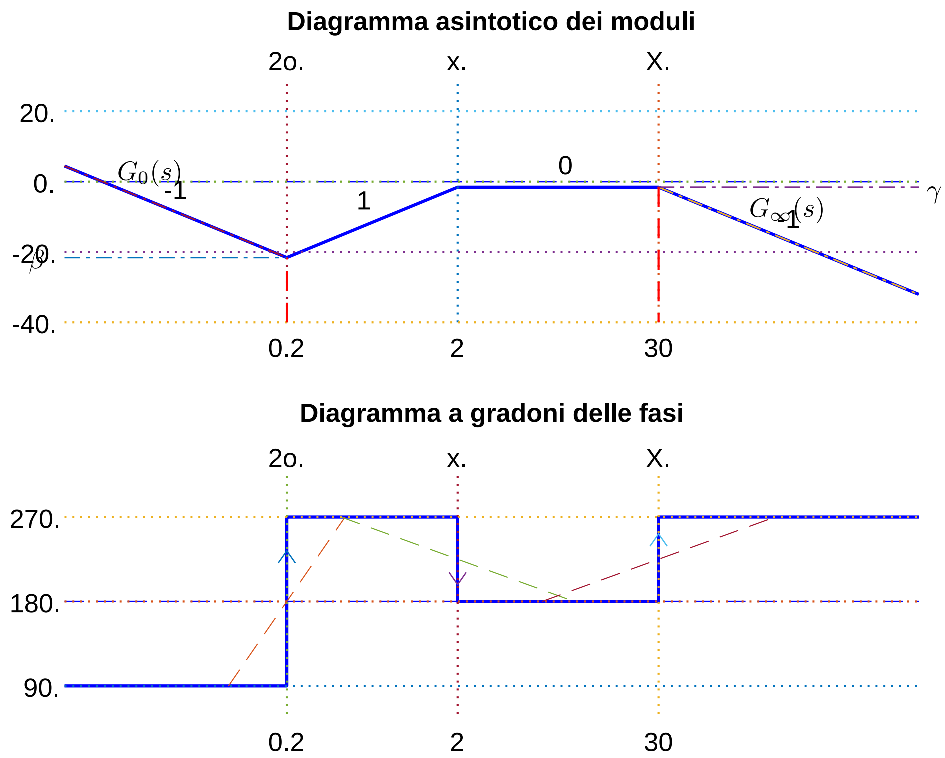


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = -\frac{0.016667}{s} = -\frac{1}{60\,s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{25}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{3\,\pi}{2}, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.2$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 30$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.2} = 0.08333 = -21.58 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=30} = 0.8333 = -1.584 \text{ db}.$$

Coefficienti di smorzamento degli zeri complessi coniugati: $\delta_1 = 0.5$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con il semiasse reale negativo e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 3. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = 5 - \frac{1}{2} - \frac{1}{-30} = 4.533 > 0.$$

Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto. La posizione dell'asintoto è la seguente:

$$\sigma_a = K\Delta_\tau = -0.016667 \cdot (4.5333) = -0.075557.$$

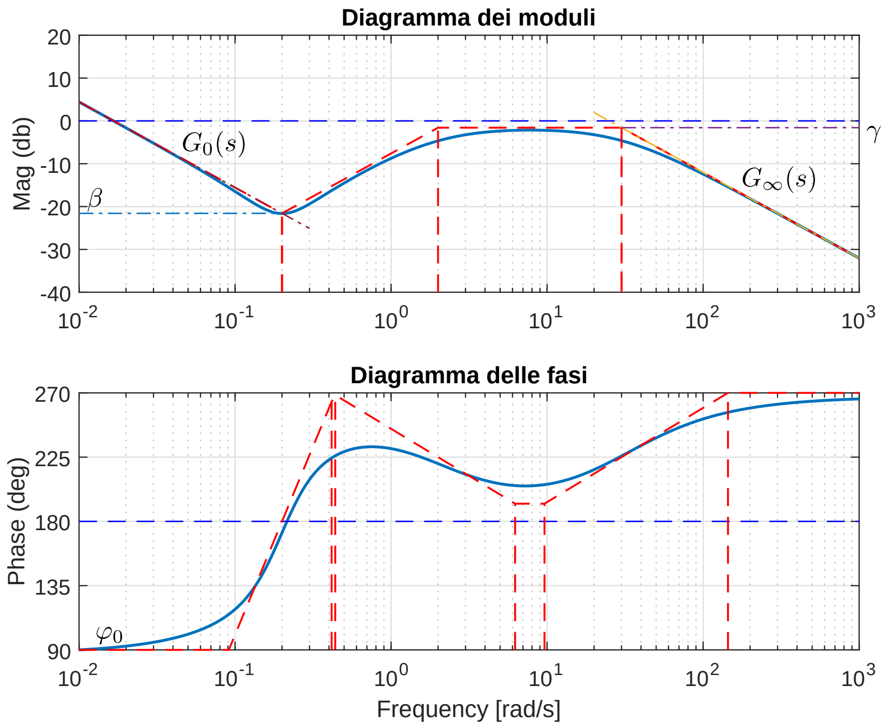


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

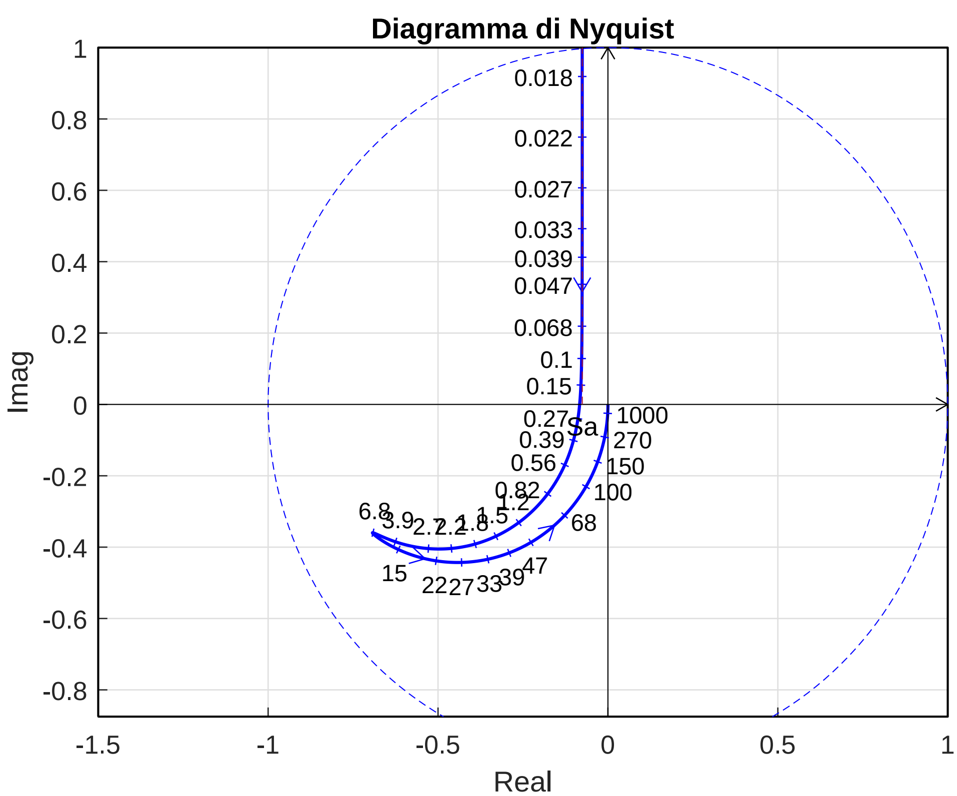


Figura 3: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di π in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p del sistema è negativa:

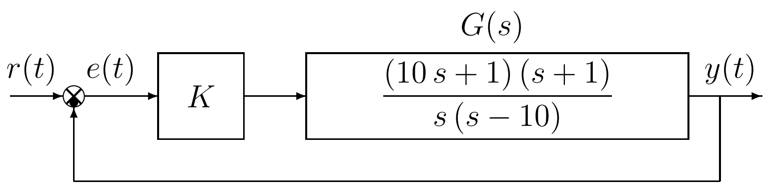
$$\Delta_p = -0.2 + 2 - 30 = -28.2 < 0.$$

Per $K = K_1$, l'intersezione σ_1 del diagramma di Nyquist con l'asse reale negativo si ha nel punto:

$$\sigma_1 = -\frac{1}{K_1} = -\frac{1}{12.0088} = -0.0833.$$

in corrispondente della pulsazione $\omega_1 = 0.21$.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K\,\frac{(10\,s+1)\,(s+1)}{s\,(s-10)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad (10K+1)s^2 + (11K-10)s + K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 10K+1 & K \\ 1 & 11K-10 & \\ 0 & K & \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano positivi si ricavano i seguenti vincoli:

$$10K+1 > 0, \qquad 11K-10 > 0, \qquad K > 0,$$

dai quali si ricava:

$$K > -0.1, \quad K > 0.90909, \quad K > 0 \quad \rightarrow \quad K > 0.90909 = K^*.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{K^*}{10K^*+1}} = 0.30015.$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano negativi si ricavano i seguenti vincoli:

$$K < -0.1, \quad K < 0.90909, \quad K < 0 \quad \rightarrow \quad K < -0.1 = K_1.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$(K < -0.1 = K_1) \cup (K > 0.90909 = K^*)$$

e.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$.

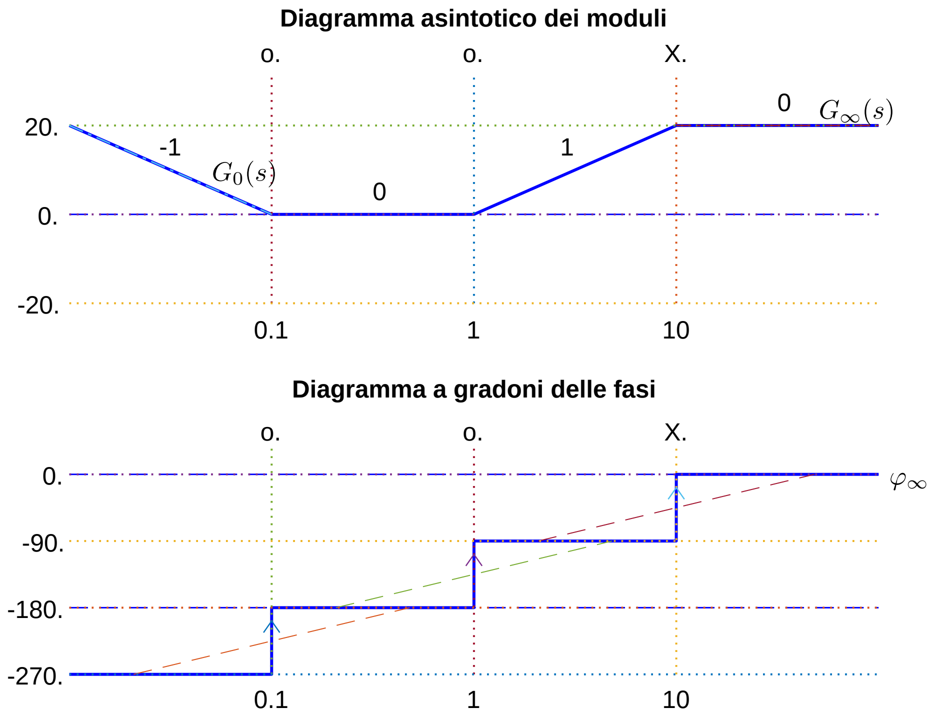


Figura 4: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{-0.1}{s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = 10.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{3\,\pi}{2}, \qquad\qquad \varphi_\infty = 0.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.1} = 1 = 0 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = 10 = 20 \text{ db}.$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

e.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G_e(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 6. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = 10 + 1 - \frac{1}{-10} = 11.1 > 0.$$

Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto. La posizione dell'asintoto è la seguente:

$$\sigma_a = K\Delta_\tau = -0.1 \cdot (11.1) = -1.11.$$

Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0,\ \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\,\pi}{2}.$$

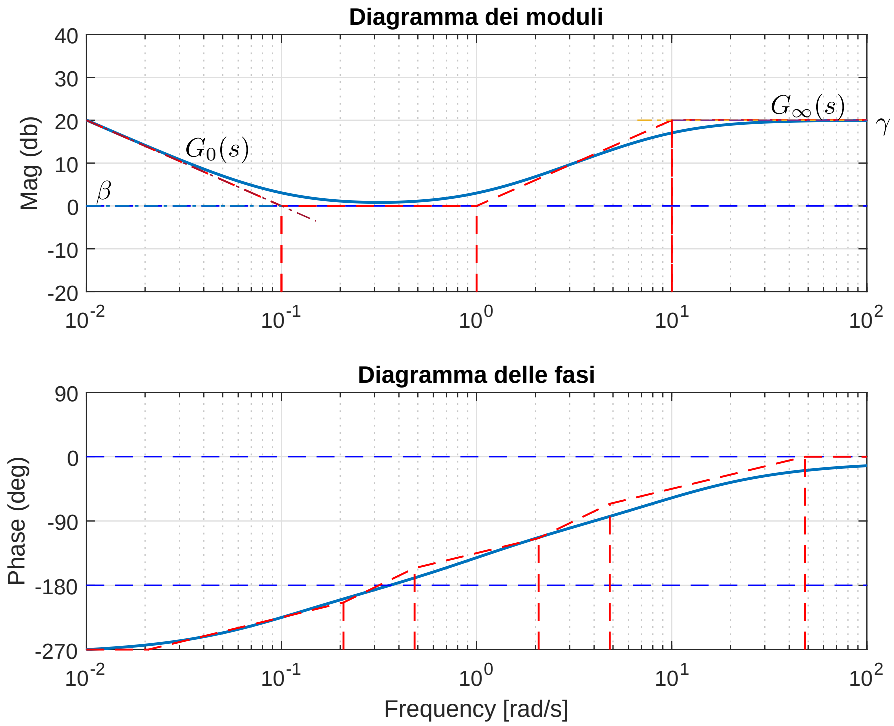


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

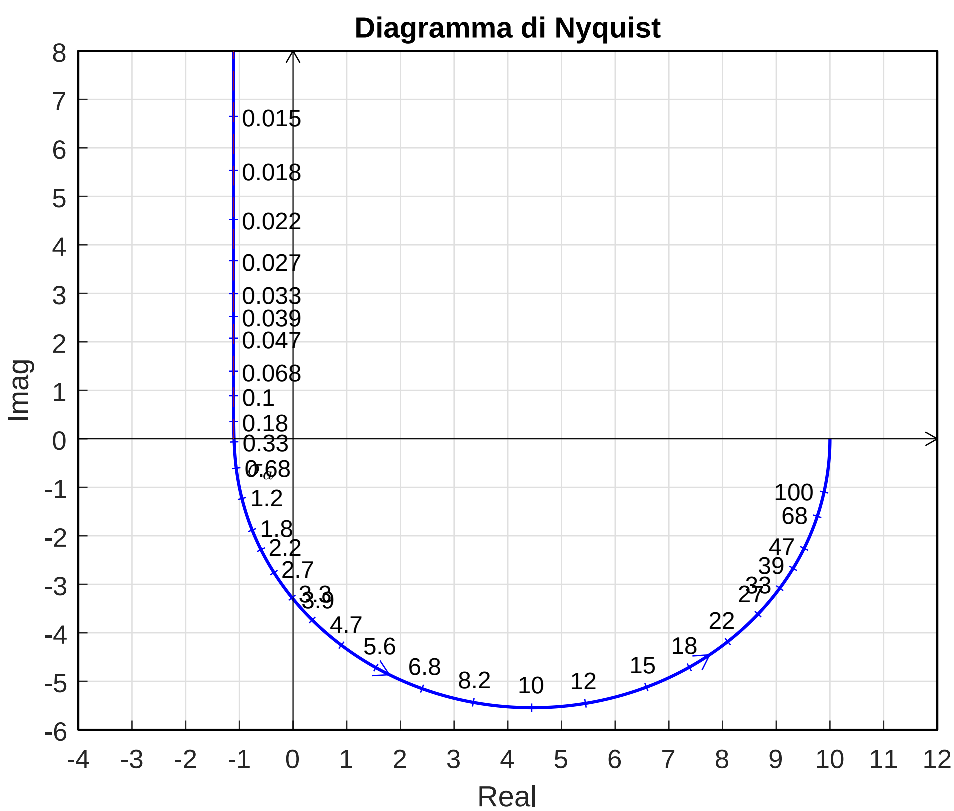


Figura 6: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $\frac{3\pi}{2}$ in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = 0$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = 0$ in quanto la somma Δ_p del sistema è negativa:

$$\Delta_p = -0.1 - 1 - 10 = -11.1 < 0.$$

Per $K = K^*$, l'intersezione del diagramma di Nyquist con l'asse reale negativo si ha nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{0.90909} = -1.1.$$

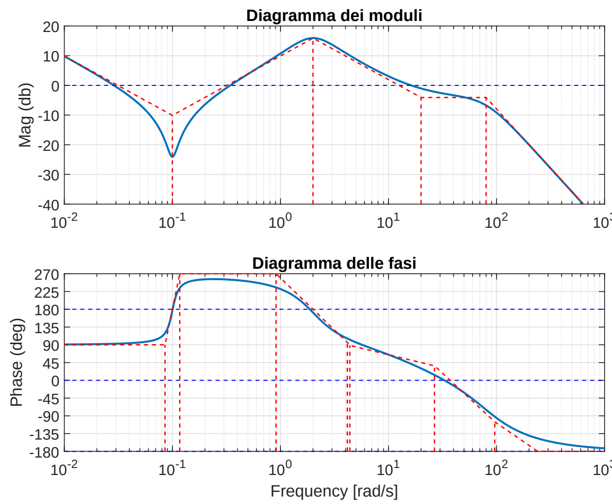
in corrispondente della pulsazione $\omega^* = 0.30015$.

f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{4000\,(s-20)\,(s^2+0.02\,s+0.01)}{s\,(s^2+2\,s+4)\,(s^2+112\,s+6400)}$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.



Soluzione. La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{4000\,(s-20)\,(s^2+0.02\,s+0.01)}{s\,(s^2+2\,s+4)\,(s^2+112\,s+6400)}$$

Il valore $K = 4000$ puó essere calcolato in due modi diversi:

1) calcolando il modulo β dell'approssimante $G_0(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.1$:

$$|G_0(s)|_{s=0.1\,j} = \left|\frac{-7.813\cdot 10^{-6}\,K}{s}\right|_{s=0.1\,j} = \frac{7.813\cdot 10^{-6}\,K}{0.1} = \beta \simeq -10.1 \text{ db} \simeq 0.312 \quad \Rightarrow \quad K \simeq 4000.$$

2) calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 80$:

$$|G_\infty(s)|_{s=80\,j} = \left|\frac{K}{s^2}\right|_{s=80\,j} = \frac{K}{80^2} = \gamma \simeq -4.08 \text{ db} \simeq 0.625 \quad \to \quad K \simeq 4000.$$

I coefficienti di smorzamento δ delle coppie di poli o zeri complessi coniugati presenti all'interno della funzione G(s) sono i seguenti:

$$\begin{array}{lclcl}
(s^2+0.02\,s+0.1^2) & \to & M_{\omega_n} \simeq 14 \text{ db} = 5 & \to & \delta = \frac{1}{2\,M_{\omega_n}} \simeq 0.1 \\
(s^2+2\,s+2^2) & \to & M_{\omega_n} \simeq 0 \text{ db} = 1 & \to & \delta = \frac{1}{2\,M_{\omega_n}} \simeq 0.5 \\
(s^2+112\,s+80^2) & \to & M_{\omega_n} \simeq -2.92 \text{ db} = 0.714 & \to & \delta = \frac{1}{2\,M_{\omega_n}} \simeq 0.7
\end{array}$$

I valori M_{ω_n} si leggono sul diagramma di Bode dei moduli come distanza tra il diagramma asintotico e il diagramma reale alla pulsazione ω_n.

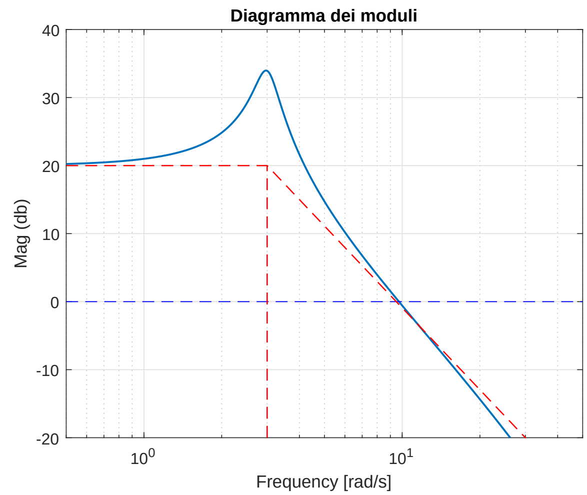
g) In figura é riportato il diagramma di Bode dei moduli di un sistema lineare $G(s)$ a fase minima. Calcolare:

a) la posizione della coppia di poli dominanti $p_{1,2}$ del sistema $G(s)$:

$$p_{1,2} \simeq -0.3 \pm j\,2.97.$$

b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino del sistema $G(s)$:

$$T_a \simeq \frac{3}{0.3}\;\text{ s} = 10\;\text{ s}.$$



Controlli Automatici - Prima parte

17 Aprile 2024 - Domande

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

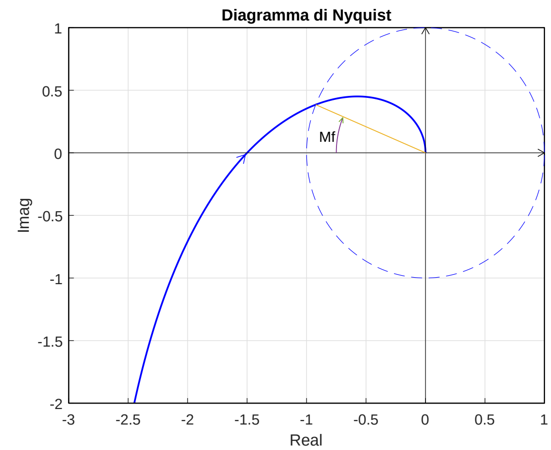
1. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$\ddddot{y}(t)+3\,\dddot{y}(t)+5\,\ddot{y}(t)+4\,\dot{y}(t)+2\,y(t)=2\,x(t) \quad\rightarrow\quad G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{2}{s^4+3s^3+4\,s+5\,s^2+2}$$

Usando il criterio di Routh dire quanti sono i poli a parte reale positiva della funzione $G(s)$:

⊗ 0 poli instabili; ◯ 1 polo instabile; ◯ 2 poli instabili; ◯ 3 poli instabili;

2. Sul piano di Nyquist riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ di un sistema stabile $G(s)$ caratterizzato dai seguenti parametri:
   a) Approssimante per $\omega = 0$: $G_0(s) = \frac{1.5}{s}$;
   b) Parametro $\Delta\tau < 0$;
   c) Margine di ampiezza $M_\alpha \simeq 0.666$;
   d) Margine di fase $M_\varphi \simeq -23°$;
   e) Approssimante per $\omega = \infty$: $G_\infty(s) = -\frac{1.5}{s}$;



3. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $\frac{2(1-s)}{(s+1)^2}$. Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

⊗ $K_1^* < K < K_2^*$;

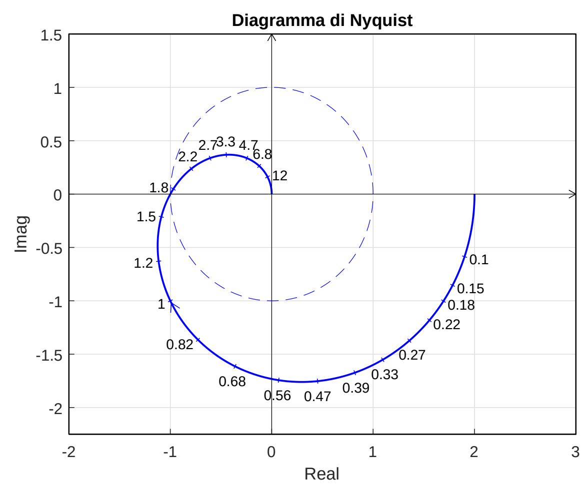
◯ $K_1^* < K < K_2^* < 0$;

◯ $0 < K_1^* < K < K_2^*$;

◯ $(K < K_1^*) \cup (K > K_2^*)$;

Indicare i valori dei parametri K_1^* e K_2^*:

$$K_1^* = -\frac{1}{2}, \qquad K_2^* = 1$$



4. Enunciare il criterio di Nyquist nella formulazione valida anche per sistemi instabili ad anello aperto. Fornire sia l'ipotesi che la tesi del criterio.

Criterio di Nyquist. Nell'ipotesi che il sistema ad anello aperto non presenti poli immaginari, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ circondi il punto critico $-1+j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $F(s)$ con parte reale positiva.

5. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del seguente sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il seguente segnale $x(t)$:

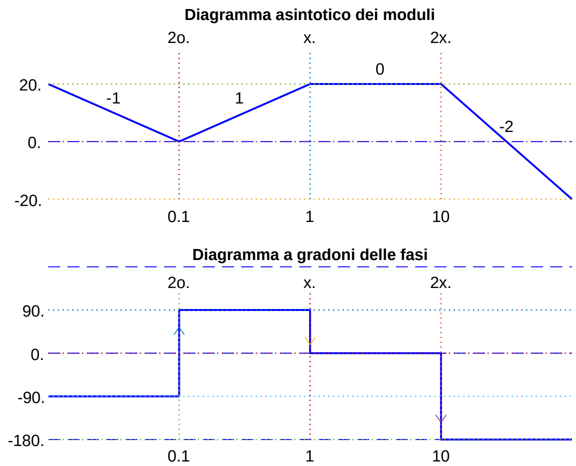
$$x(t) = 3 + 2\cos(2\,t) \longrightarrow \boxed{\dfrac{(s+2)^2}{(s+1)^2}} \longrightarrow y(t) \simeq 12 + 3.2\,\cos(2\,t - 36.87^\circ)$$

Infatti si ha che:

$$G(j2) = \frac{(j2+2)^2}{(j2+1)^2} \quad \rightarrow \quad |G(j2)| = \frac{8}{5} = 1.6, \qquad \arg G(j2) = 2\arctan(1) - 2\arctan(2) = -36.87^\circ$$

6. Si faccia riferimento al diagramma asintotico di Bode dei moduli riportato a fianco, relativo ad un sistema $G(s)$ a fase minima.

   Utilizzando in modo qualitativo la formula di Bode, calcolare in modo approssimato l'andamento a gradoni del diagramma di Bode delle fasi del sistema $G(s)$.

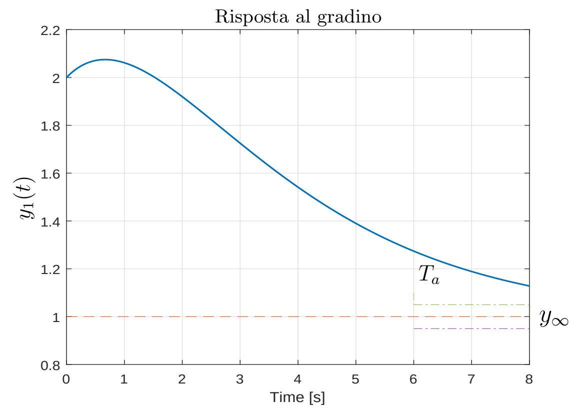


7. Utilizzando i teoremi del valore iniziale e del valore finale, disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{(1+8\,s)(s+1)}{(2\,s+1)^2}$$

   Calcolare il valore iniziale y_0, il valore finale y_∞ e il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$:

$$y_0 = 2, \qquad y_\infty \simeq 1, \qquad T_a \simeq 6\,\text{s}.$$

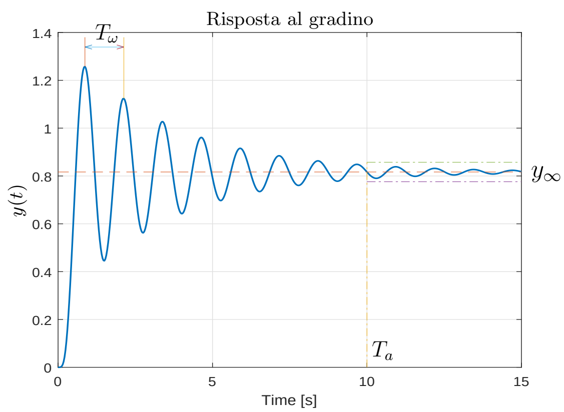


8. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{200(5+0.3s)(s^2+25s+70^2)}{(5s+30)(3s+20)(s^2+7s+400)(s^2+0.6s+25)}$$

   Calcolare inoltre:
   a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
   b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
   c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$$y_\infty = 0.8166, \qquad T_a \simeq 10\,\text{s}, \qquad T_\omega \simeq \frac{2\pi}{5} = 1.26\,\text{s}.$$



9. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(1-4s)}{s^2(s-3)^2}\,e^{-2\,s} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{1+16\omega^2}}{\omega^2(\omega^2+9)} \\ \varphi(\omega) = -\arctan 4\omega - \pi - 2\left(\pi - \arctan\frac{\omega}{3}\right) - 2\,\omega \end{cases}$$