

Controlli Automatici - Prima parte
16 Aprile 2025 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. Elet. Telecom. Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = (2 + 3e^{-5t}) \cos(6t), \quad x_2(t) = (4 + 5t^2)e^{3t}$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{2s}{s^2 + 6^2} + \frac{3(s+5)}{(s+5)^2 + 6^2}, \quad X_2(s) = \frac{4}{(s-3)} + \frac{10}{(s-3)^3}$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

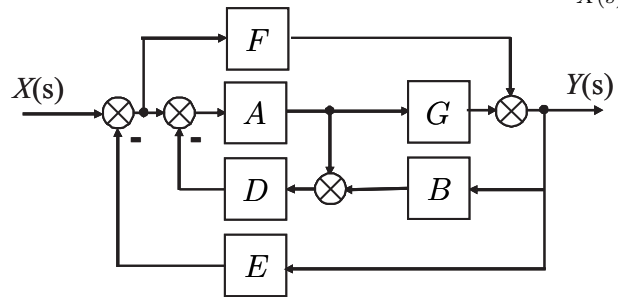
$$G_1(s) = \frac{4}{(s+3)(2s+1)}, \quad G_2(s) = 5 + \frac{12}{(s+6)^4}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = \frac{4}{5} [e^{-0.5t} - e^{-3t}], \quad g_2(t) = 5\delta(t) + 2t^3e^{-6t}$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$:

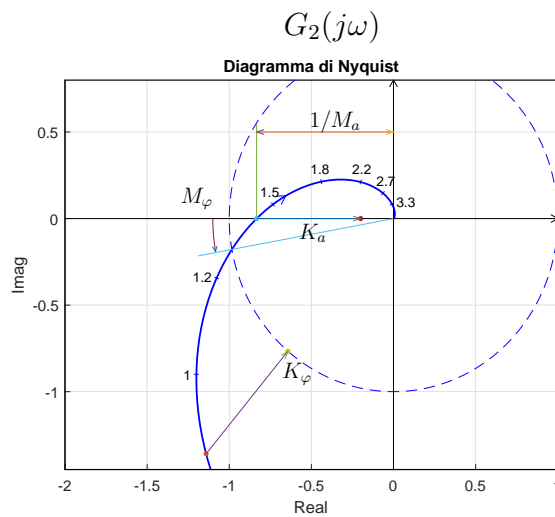
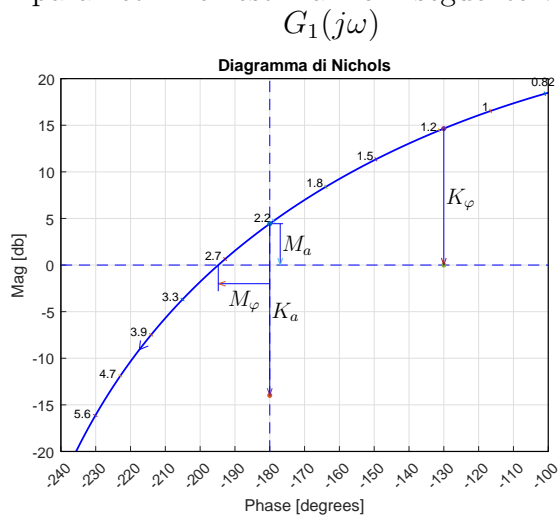
$$G_1(s) = \frac{AG + F(1 + AD)}{1 + AD + FE + AGBD + AGE + ADEF}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$. Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

- c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;
- c.2) il margine di fase M_φ del sistema;
- c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 50$;
- c.4) il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 5$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:



c.1) $M_a = -4.44 \text{ db} = 0.6$

c.1) $M_a = 1.2$

c.2) $M_\varphi = -14.8$

c.2) $M_\varphi = 10.3$

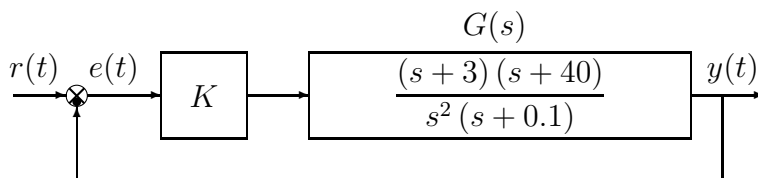
c.3) $K_\varphi = -14.6 \text{ db} = 0.185$

c.3) $K_\varphi = 0.563$

c.4) $K_a = -18.4 \text{ db} = 0.12$

c.4) $K_a = 0.24$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K \frac{(s+3)(s+40)}{s^2(s+0.1)} = 0 \rightarrow s^3 + (K+0.1)s^2 + 43Ks + 120K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 43K \\ 2 & K+0.1 & 120K \\ 1 & 43K^2 - 115.7K & \\ 0 & 120K & \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano positivi si ricavano i seguenti vincoli:

$$K + 0.1 > 0, \quad 43K^2 - 115.7K > 0, \quad 120K > 0,$$

dai quali si ricava:

$$K > -0.1, \quad (K < 0) \cup (K > 2.6907), \quad K > 0.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 2.6907 = K_1.$$

La pulsazione ω_1 corrispondente al valore limite K_1 è:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{120K_1}{K_1 + 0.1}} = 10.7564.$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

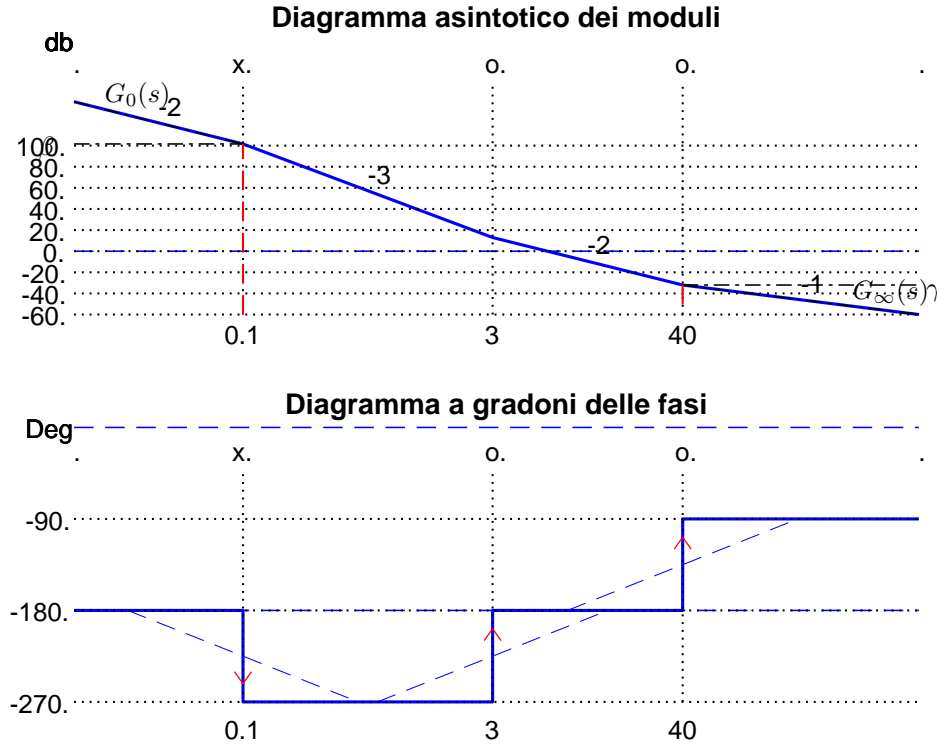


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \rightarrow 0$ ed $\omega \rightarrow \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{1200}{s^2}, \quad G_\infty(s) = \frac{1}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\pi, \quad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 40$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.1} = 1.2e + 05 = 101.6 \text{ db}, \quad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=40} = 0.025 = -32.04 \text{ db}.$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 3. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\pi$. Per $\omega \rightarrow 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è negativa:

$$\Delta\tau = \frac{1}{3} + \frac{1}{40} - 10 = -9.642 < 0.$$

Il sistema è di tipo 2 per cui nel diagramma di Nyquist non è presente nessun asintoto. Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = -\pi$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

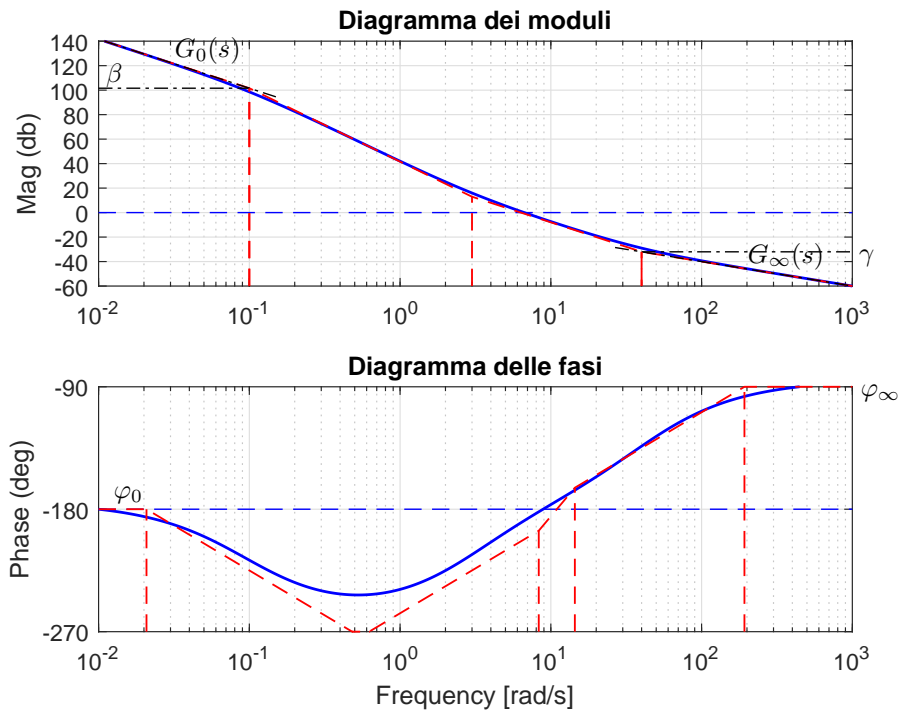


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

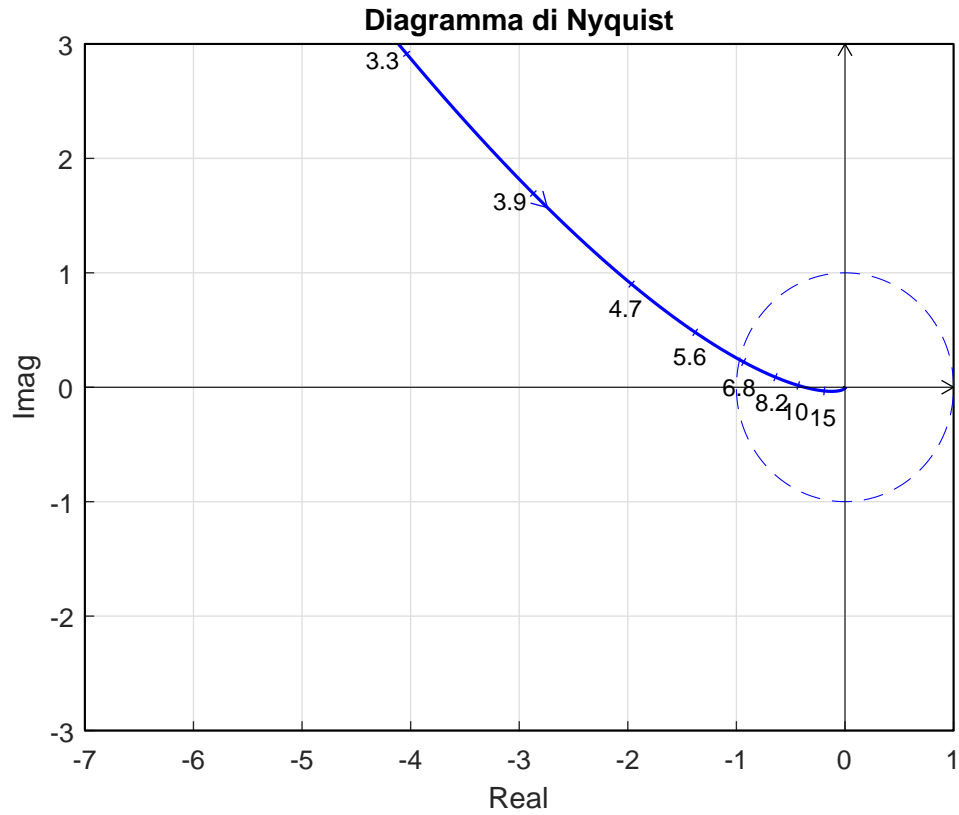
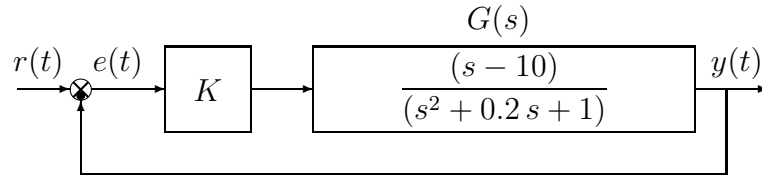


Figura 3: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \rightarrow \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p del sistema è negativa:

$$\Delta_p = -3 - 40 + 0.1 = -42.9 < 0.$$

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K \frac{(s-10)}{(s^2 + 0.2s + 1)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^2 + (K + 0.2)s + (1.0 - 10K) = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 1.0 - 10K \\ 1 & K + 0.2 & \\ 0 & 1.0 - 10K & \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano positivi si ricavano i seguenti vincoli:

$$K + 0.2 > 0, \quad 1.0 - 10K > 0,$$

dai quali si ricava:

$$K > -0.2, \quad K < 0.1.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K_1 = -0.2 < K < 0.1.$$

La pulsazione ω_1 corrispondente al valore limite K_1 è:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1.0 - 10K_1}{1}} = 1.7321.$$

e.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \rightarrow 0$ ed $\omega \rightarrow \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = -10, \quad G_\infty(s) = \frac{1}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\pi, \quad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=1} = 10 = 20 \text{ db}, \quad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = 0.1 = -20 \text{ db}.$$

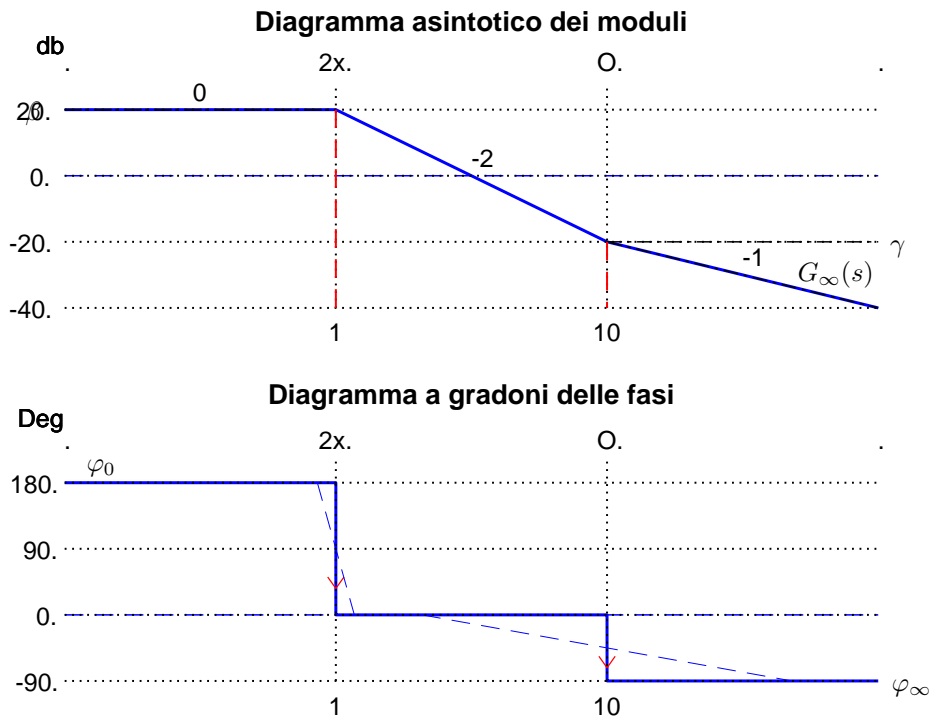


Figura 4: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

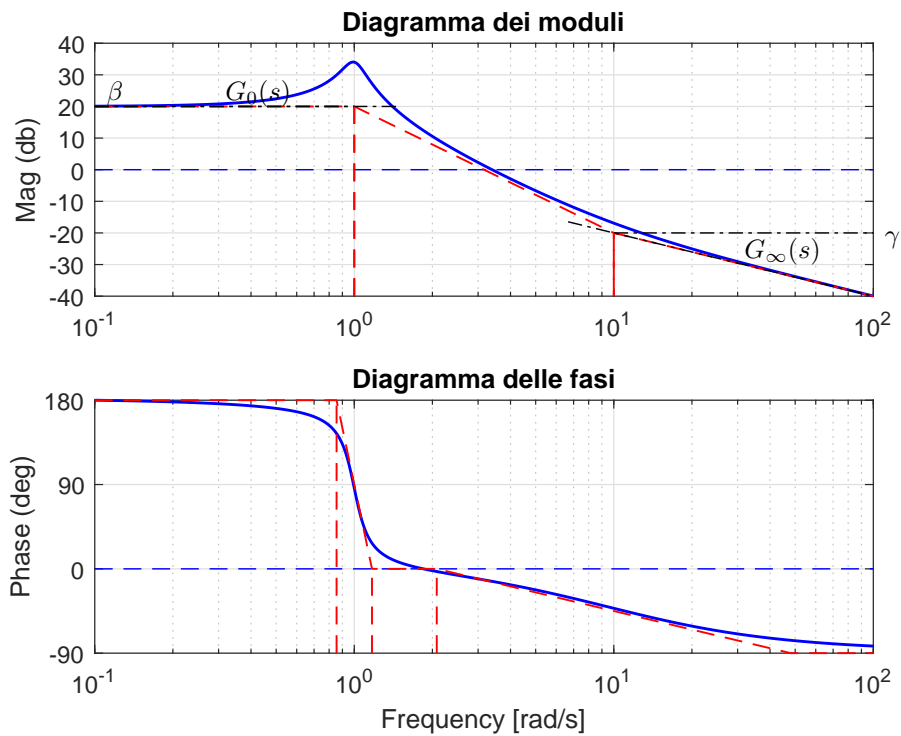


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

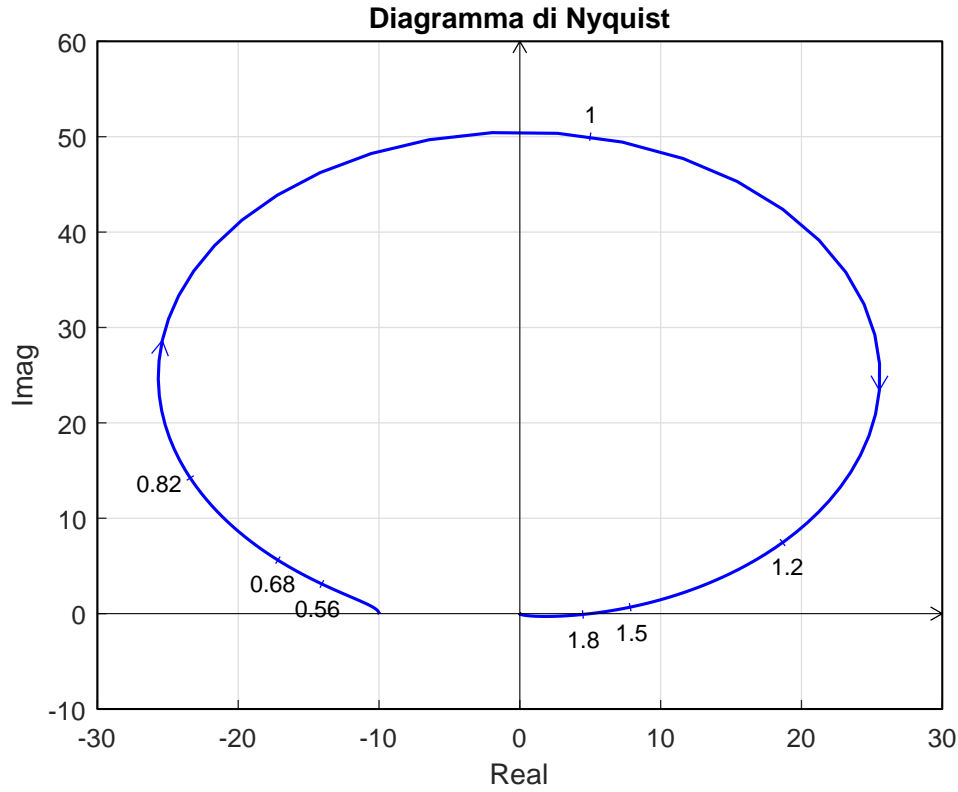


Figura 6: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

Coefficienti di smorzamento dei poli complessi coniugati: $\delta_1 = 0.1$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

e.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” della funzione $G(s)$.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 6. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\pi$. Per $\omega \rightarrow 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è negativa:

$$\Delta\tau = \frac{1}{-10} - \frac{1}{5} = -0.3 < 0.$$

Il sistema è di tipo 0 per cui nel diagramma di Nyquist non è presente nessun asintoto. Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = -\pi$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{3\pi}{2}.$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $-\frac{3\pi}{2}$ in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \rightarrow \infty$ il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p del sistema è positiva:

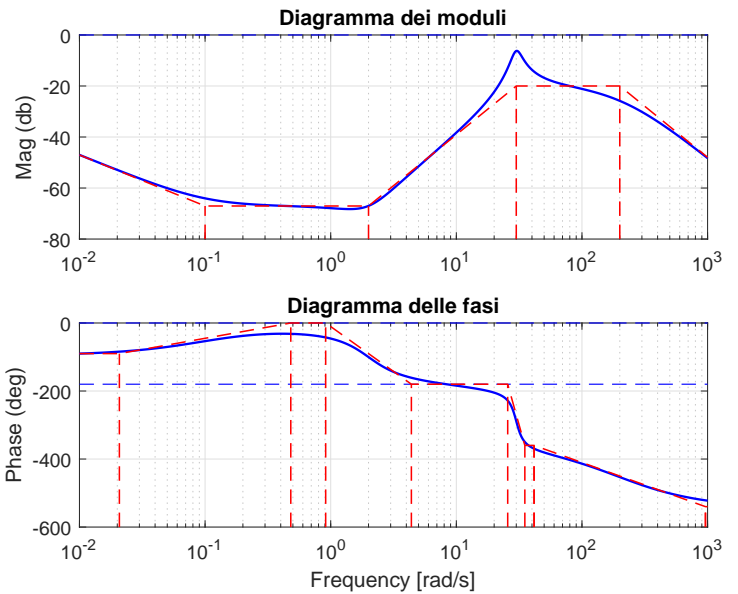
$$\Delta_p = 10 + 0.2 = 10.2 > 0.$$

f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{4000 (s + 0.1) (s^2 - 2s + 4)}{s (s^2 + 6s + 900) (s + 200)^2}$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ .



Soluzione. La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{4000 (s + 0.1) (s^2 - 2s + 4)}{s (s^2 + 6s + 900) (s + 200)^2}$$

Il valore $K = 4000$ può essere calcolato in due modi diversi:

1) calcolando il modulo β dell'approssimante $G_0(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.1$:

$$|G_0(s)|_{s=0.1j} = \left| \frac{1.111 \cdot 10^{-8} K}{s} \right|_{s=0.1j} = \frac{1.111 \cdot 10^{-8} K}{0.1} = \beta \simeq -67 \text{ db} \simeq 0.000444 \quad \Rightarrow \quad K \simeq 4000.$$

2) calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 200$:

$$|G_\infty(s)|_{s=200j} = \left| \frac{K}{s^2} \right|_{s=200j} = \frac{K}{200^2} = \gamma \simeq -20 \text{ db} \simeq 0.1 \quad \rightarrow \quad K \simeq 4000.$$

I coefficienti di smorzamento δ delle coppie di poli o zeri complessi coniugati presenti all'interno della funzione $G(s)$ sono i seguenti:

$$\begin{aligned} (s^2 + 6s + 30^2) &\rightarrow M_{\omega_n} \simeq 14 \text{ db} = 5 \quad \rightarrow \quad \delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq 0.1 \\ (s^2 - 2s + 2^2) &\rightarrow M_{\omega_n} \simeq 0 \text{ db} = 1 \quad \rightarrow \quad \delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq 0.5 \end{aligned}$$

I valori M_{ω_n} si leggono sul diagramma di Bode dei moduli come distanza tra il diagramma asintotico e il diagramma reale alla pulsazione ω_n .

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. Elet. Telec. Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

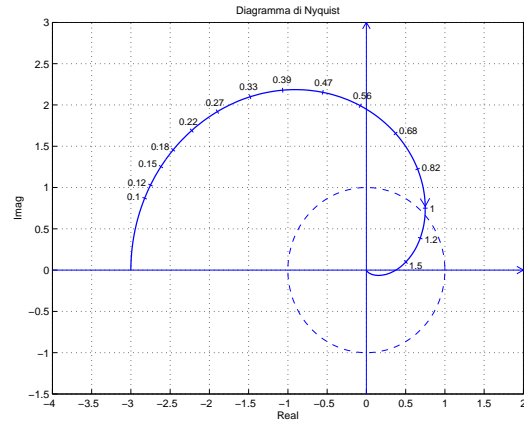
$$2\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 5y(t) = 6\ddot{x}(t) + 7x(t) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{6s^2 + 7}{2s^3 + 3s^2 + 5s + 1}$$

2. Sia dato il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{-3}{(s+1)^3}$.

In base al criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K :

$$-2.667 = -\frac{8}{3} < K < \frac{1}{3} = 0.333$$

Calcolare dal grafico, in modo approssimato, i valori limite dell'intervallo di ammissibilità del parametro K .



3. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale $x(t)$:

$$x(t) = 6 + 5 \cos(3t) \quad \xrightarrow{\begin{matrix} G(s) \\ \frac{s+1}{s+4} \end{matrix}} \quad y(t) \simeq \frac{3}{2} + \sqrt{10} \cos(3t + \arctan 3 - \arctan \frac{3}{4})$$

4. Posto $a_0 \neq 0$, l'equazione ausiliaria che si ottiene dalla tabella di Routh quando tutti gli elementi di una riga si annullano:

- ha radici simmetriche rispetto all'origine
- è composta solo da termini di grado pari in s
- è composta solo da termini di grado dispari in s
- ha radici simmetriche rispetto all'asse immaginario

5. Nella graficazione qualitativa del diagramma di Nyquist di una funzione $G(s)$, il parametro Δ_τ :

- quando è maggiore di 0 indica che il diagramma di Nyquist parte in ritardo rispetto a φ_0
- quando è maggiore di 0 indica che il diagramma di Nyquist parte in anticipo rispetto a φ_0
- si calcola come $\Delta_\tau = \sum_{i=1}^m \tau'_i - \sum_{j=1}^{n-h} \tau_j$, dove τ'_i e τ_j sono le costanti di tempo, rispettivamente, degli zeri e dei poli di $G(s)$
- si calcola come $\Delta_\tau = \sum_{i=1}^m \tau'_i - \sum_{j=1}^{n-h} \tau_j$, dove τ'_i e τ_j sono costanti di tempo, rispettivamente, dei poli e degli zeri di $G(s)$

6. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2(5-3s)(s+3)}{s(4s+1)(5s+10)} \quad \rightarrow \quad y_0 = -\frac{3}{10} \quad y_\infty = 3$$

7. Nella graficazione qualitativa del diagramma di Nyquist di una funzione $G(s)$, il parametro Δ_φ :

- si calcola a partire da tutti i poli e gli zeri del sistema, inclusi quelli nell'origine
- indica di quanto ruotare rispetto all'origine nel collegare il punto iniziale $G(j0^+)$ al punto finale $G(j\infty)$
- indica quante semicirconferenze all'infinito vanno tracciate
- indica di quanto ruotare rispetto all'origine nel collegare il punto finale $G(j\infty)$ al punto iniziale $G(j0^+)$

8. Calcolare l'evoluzione forzata del sistema $5\dot{y}(t) + 3y(t) = 10x(t)$, con $x(t) = \delta(t)$. Applicando la trasformata di Laplace si ha:

$$5sY(s) + 3Y(s) = 10 \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{2}{s + \frac{3}{5}} \quad \rightarrow \quad y(t) = 2e^{-0.6t}.$$

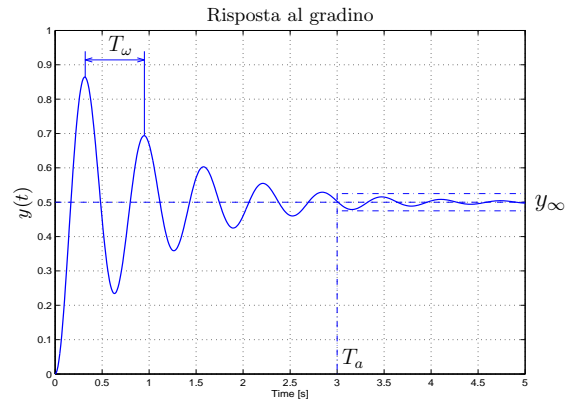
9. a) Scrivere, in funzione dei segnali $F(t)$ e $y(t)$, l'equazione differenziale corrispondente alla seguente funzione di trasferimento $G(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{50}{s^2 + 2s + 100} \quad \rightarrow \quad \ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 100y(t) = 50F(t)$$

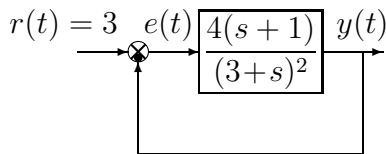
b) Nel riquadro a fianco disegnare l'andamento qualitativo $y(t)$ della risposta al gradino unitario.

c) Calcolare il valore a regime y_∞ , il tempo di assestamento T_a e il periodo di oscillazione T_ω della risposta al gradino $y(t)$:

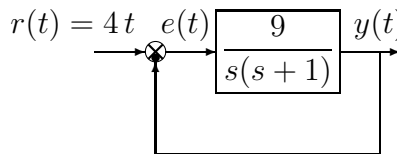
$$y_\infty = 0.5, \quad T_a \simeq 3 \text{ s}, \quad T_\omega \simeq \frac{2\pi}{10} = 0.63.$$



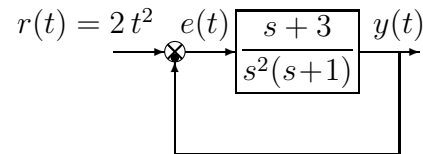
10. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



$$e(\infty) = \frac{3}{1 + \frac{4}{9}} = \frac{27}{13} = 2.08$$



$$e(\infty) = \frac{4}{9} = 0.444$$



$$e(\infty) = \frac{4}{3} = 1.333$$

11. Nella risposta al gradino di un sistema del secondo ordine, il tempo di ritardo T_r :

- è il tempo che impiega l'uscita per passare dal 10% al 90% del valore finale
- è il tempo che impiega l'uscita per raggiungere il 50% del valore finale
- è il tempo occorrente perchè l'uscita rimanga entro il $\pm 5\%$ del valore finale
- si calcola come $\frac{3}{|\sigma|}$, dove σ è la parte reale dei poli del sistema

12. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(s+2)}{s(3s-1)^2} e^{-3s} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2+4}}{\omega(1+9\omega^2)} \\ \varphi(\omega) = \arctan \frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{2} - 2(\pi - \arctan 3\omega) - 3\omega \end{cases}$$