Controlli Automatici - Prima parte
13 Aprile 2026 - Esercizi - INFO

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = [t^3 + \cos(4t)]\, e^{-3\,t}, \qquad\qquad x_2(t) = 2\,t^3 + 3\,\delta(t-5)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{6}{(s+3)^4} + \frac{(s+3)}{(s+3)^2+16}, \qquad\qquad X_2(s) = \frac{12}{s^4} + 3\,e^{-5\,s}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G(s)$:

$$G_1(s) = 4 + \frac{12}{s(s+2)(s+3)}, \qquad\qquad G_2(s) = \frac{16\,e^{-2\,s}}{s^2+64}$$

Soluzione:

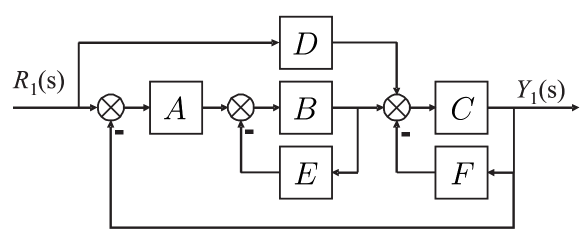
$$g_1(t) = 4\,\delta(t) + 2 - 6\,e^{-2\,t} + 4\,e^{-3\,t}, \qquad\qquad g_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ 2\,\sin(8(t-2)) & t \geq 2 \end{cases}$$

Infatti, per la seconda parte della funzione $G_1(s)$ si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G_1(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{12}{s(s+2)(s+3)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} - \frac{6}{(s+2)} + \frac{4}{(s+3)}\right] = 2 - 6\,e^{-2\,t} + 4\,e^{-3\,t}.$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y_1(s)}{R_1(s)}$:

$$G(s) = \frac{A\,B\,C + D\,C\,(1 + B\,E)}{1 + B\,E + C\,F + A\,B\,C + B\,E\,C\,F}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;

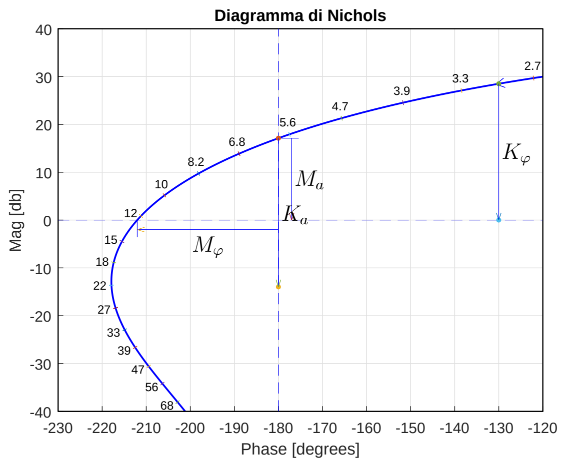
c.2) il margine di fase M_φ del sistema;

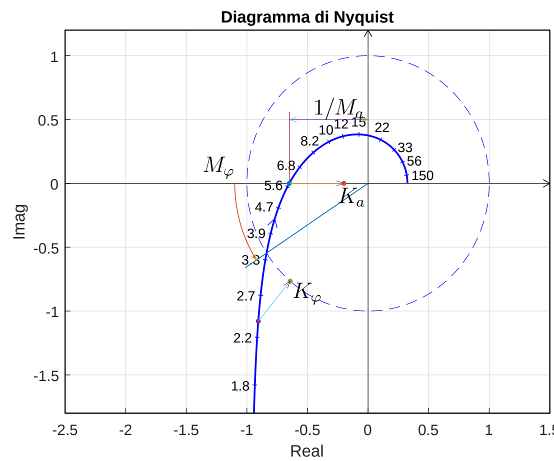
c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\, G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 50$;

c.4) il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha\, G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 5$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$ $\qquad\qquad$ $G_2(j\omega)$





c.1) $M_a = -17.1$ db $= 0.139$	c.1) $M_a = 1.54$
c.2) $M_\varphi = -32$	c.2) $M_\varphi = 33.1$
c.3) $K_\varphi = -28.5$ db $= 0.0376$	c.3) $K_\varphi = 0.71$
c.4) $K_a = -31.1$ db $= 0.0279$	c.4) $K_a = 0.308$

d) Sia dato il seguente sistema ad anello aperto:

$$r(t) \longrightarrow \boxed{\overset{G(s)}{\dfrac{2\,(s-1)\,(s+100)}{s\,(s^2+6\,s+81)}}} \longrightarrow y(t)$$

d.1) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

<u>Soluzione</u>.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

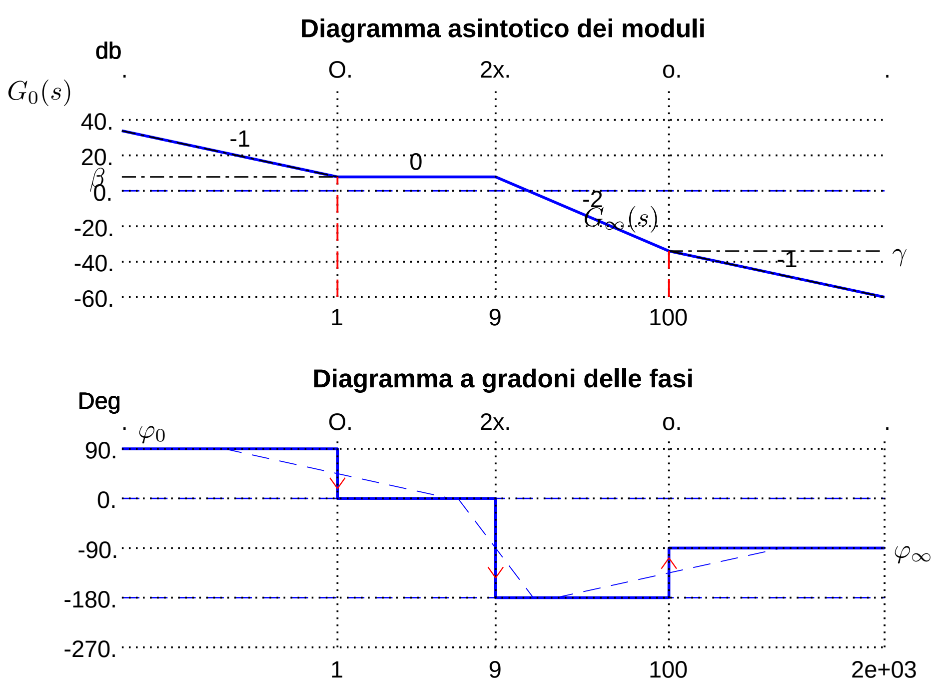


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{-2.4691}{s} = \frac{K}{s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{2}{s}.$$

where $K = -2.4691$. Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

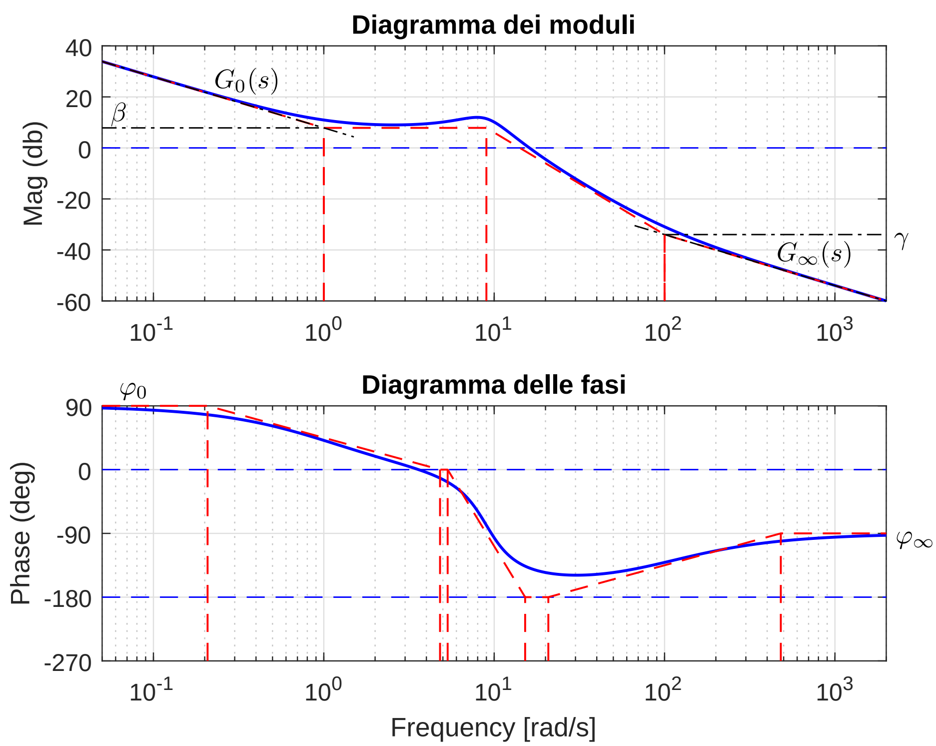
$$\varphi_0 = -\frac{3\,\pi}{2}, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 100$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=1} = 2.469 = 7.851 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=100} = 0.02 = -33.98 \text{ db}.$$

Coefficienti di smorzamento dei poli complessi coniugati: $\delta_1 = 0.33333$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.



i

Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

d.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 3. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è negativa:

$$\Delta\tau = \frac{1}{-1} + \frac{1}{100} - \frac{6}{81} = -1.064 < 0.$$

Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto. La posizione dell'asintoto è la seguente:

$$\sigma_a = K\Delta_\tau = -2.4691 \cdot (-1.0641) = 2.6273.$$

Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0,\ \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi = -\pi.$$

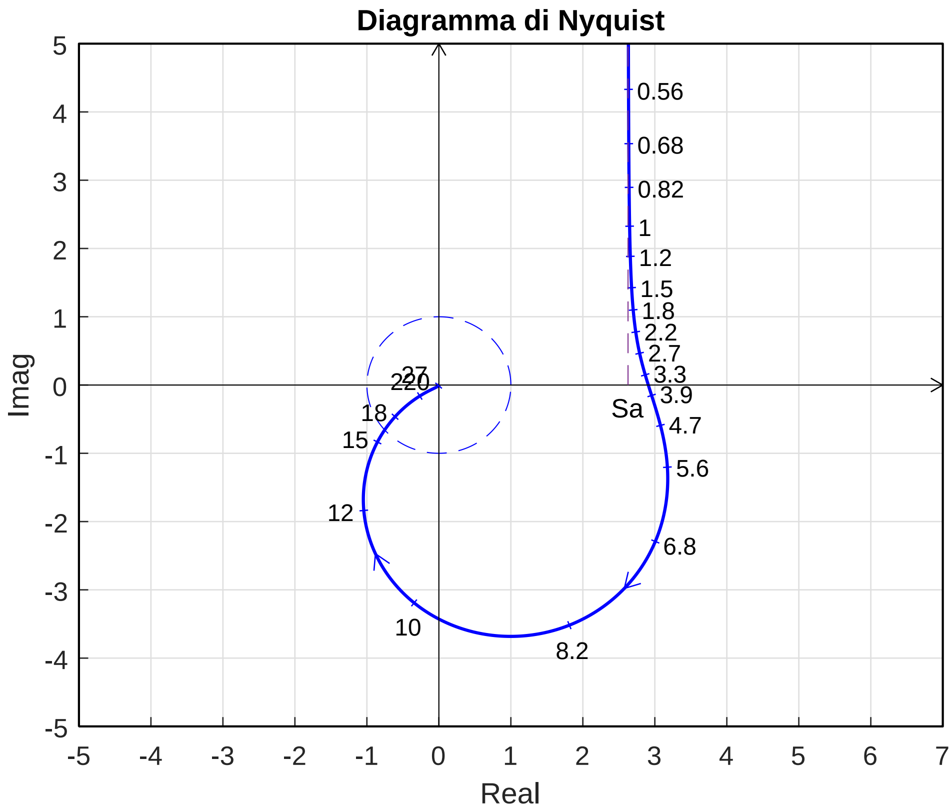


Figura 3: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $-\pi$ in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p del sistema è negativa:

$$\Delta_p = 1 - 100 + 6 = -93 < 0.$$

Esiste una sola intersezione con il semiasse reale negativo. L'intersezione avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K_1} = -\frac{1}{-0.34373} = 2.9093.$$

in corrispondente della pulsazione $\omega^* = 3.5973$.

e) Sia dato il seguente sistema ad anello aperto:

$$r(t) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{10\,(s-1)}{(s+10)^2}} \longrightarrow y(t)$$

e.1) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = -0.1, \qquad G_\infty(s) = \frac{10}{s}.$$

where $K = -0.1$. Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\pi, \qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

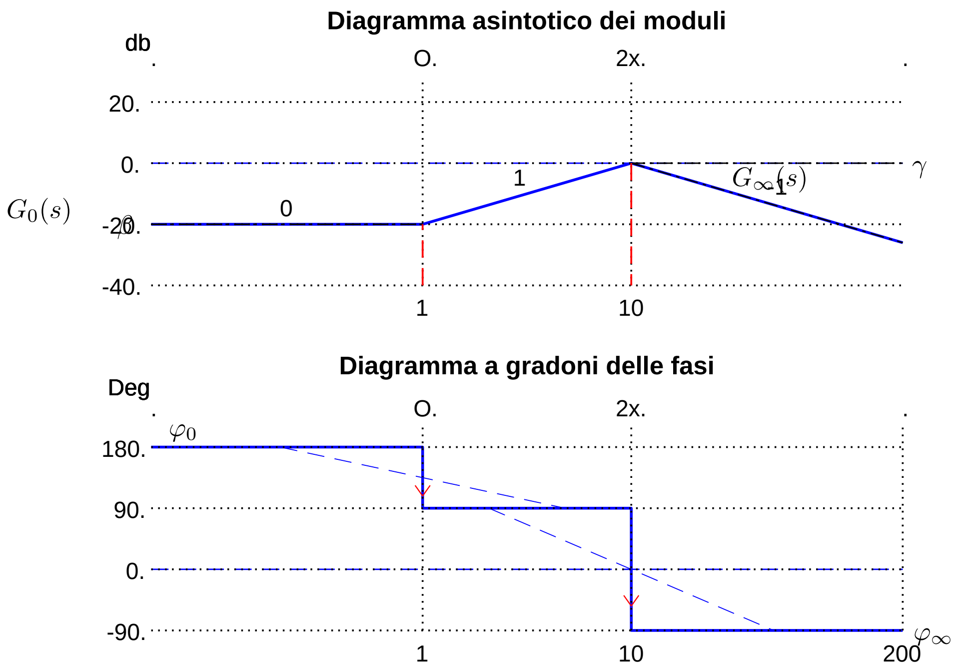


Figura 4: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=1} = 0.1 = -20 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = 1 = 0 \text{ db}.$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

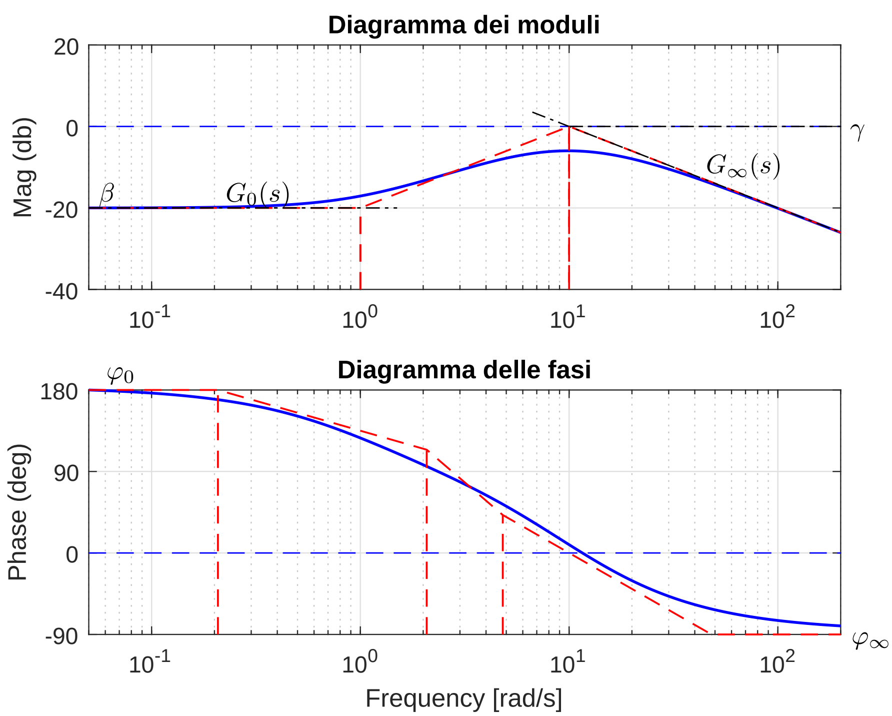


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

e.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 6. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\pi$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto a tale fase in quanto

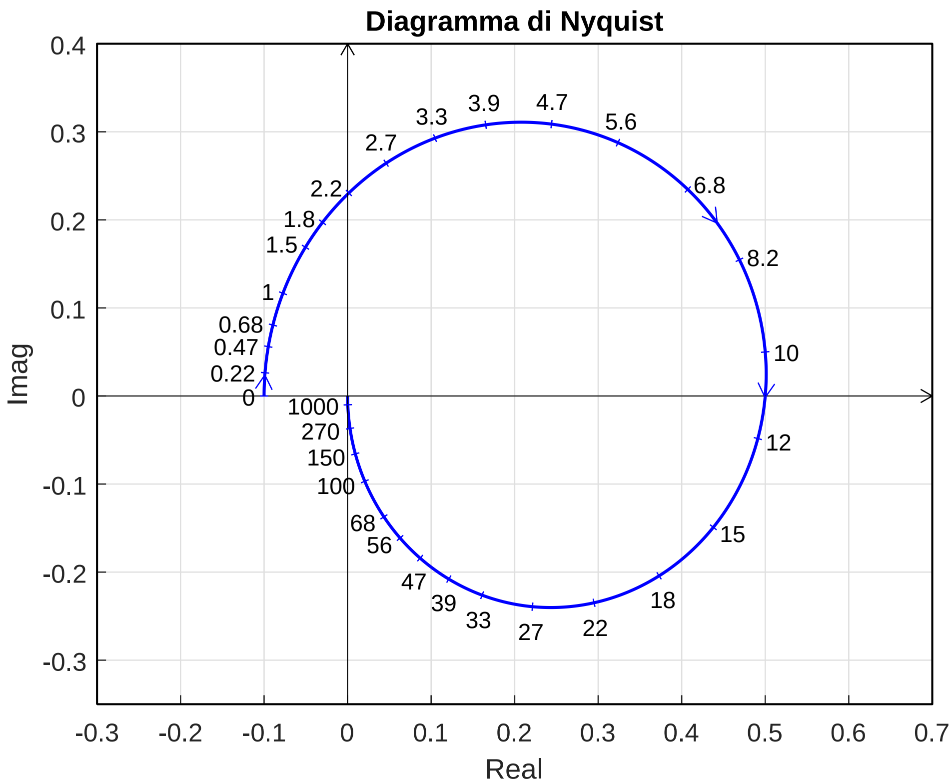


Figura 6: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

la somma delle costanti di tempo del sistema è negativa:

$$\Delta\tau = \frac{1}{-1} - \frac{1}{10} - \frac{1}{10} = -1.2 < 0.$$

Il sistema è di tipo 0 per cui nel diagramma di Nyquist non è presente nessun asintoto. Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = -\pi$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0,\ \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\,\pi}{2}.$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $-\frac{3\pi}{2}$ in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p del sistema è positiva:

$$\Delta_p = 1 + 10 + 10 = 21 > 0.$$

Esiste una sola intersezione con il semiasse reale negativo. L'intersezione avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K_1} = -\frac{1}{-2} = 0.5.$$

in corrispondente della pulsazione $\omega^* = 10.9545$.

e.3) Disegnare l'andamento qualitativo $y(t)$ della risposta al gradino unitario del sistema $G(s)$.

Valore a regime y_∞ per $t \to \infty$:

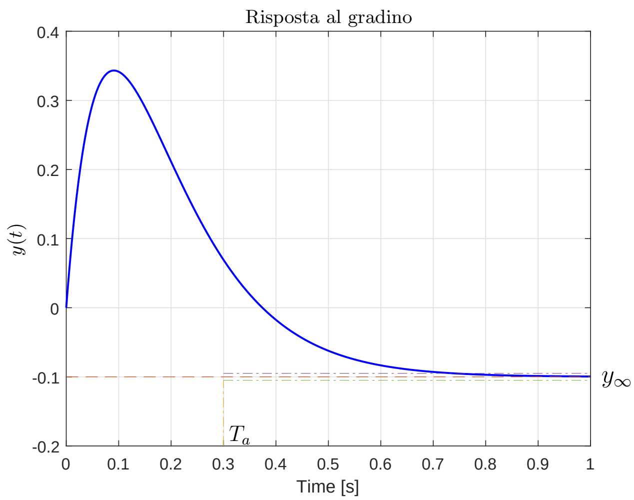
$$y_\infty = -0.1,$$

Tempo di assestamento T_a:

$$T_a \simeq \frac{3}{10} = 0.3\,\text{s},$$

Il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata:

$$T_\omega \simeq \nexists$$

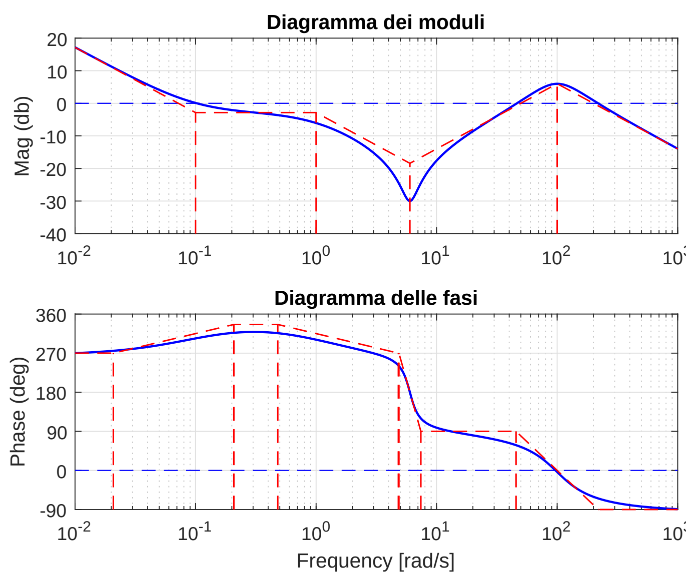


f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{200\,(s+0.1)\,(s^2-1.6\,s+36)}{s\,(s+1)\,(s^2+100\,s+10000)}$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.



Soluzione. La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{200\,(s+0.1)\,(s^2-1.6\,s+36)}{s\,(s+1)\,(s^2+100\,s+10000)}$$

Il valore $K = 200$ puó essere calcolato in due modi diversi:

1) calcolando il modulo β dell'approssimante $G_0(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.1$:

$$|G_0(s)|_{s=0.1\,j} = \left|\frac{0.00036\,K}{s}\right|_{s=0.1\,j} = \frac{0.00036\,K}{0.1} = \beta \simeq -2.85\text{ db} \simeq 0.72 \quad \Rightarrow \quad K \simeq 200.$$

2) calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 100$:

$$|G_\infty(s)|_{s=100\,j} = \left|\frac{K}{s}\right|_{s=100\,j} = \frac{K}{100} = \gamma \simeq 6.02\text{ db} \simeq 2 \quad \to \quad K \simeq 200.$$

I coefficienti di smorzamento δ delle coppie di poli o zeri complessi coniugati presenti all'interno della funzione G(s) sono i seguenti:

$$(s^2 - 1.6\,s + 6^2) \quad \to \quad M_{\omega_n} \simeq 11.5\text{ db} = 3.75 \quad \to \quad \delta = \tfrac{1}{2\,M_{\omega_n}} \simeq 0.133$$
$$(s^2 + 100\,s + 100^2) \quad \to \quad M_{\omega_n} \simeq 0\text{ db} = 1 \quad \to \quad \delta = \tfrac{1}{2\,M_{\omega_n}} \simeq 0.5$$

I valori M_{ω_n} si leggono sul diagramma di Bode dei moduli come distanza tra il diagramma asintotico e il diagramma reale alla pulsazione ω_n.

Controlli Automatici - Prima parte

13 Aprile 2026 - Domande - INFO

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$3\,\dddot{y}(t) + 2\,\dot{y}(t) + 5\,y(t) = 4\,\ddot{x}(t) + 3\,x(t) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4\,s^2 + 3}{3\,s^4 + 2\,s + 5}$$

2. Un numero complesso è:

○ una coppia ordinata di numeri interi;

⊗ una coppia ordinata di numeri reali;

○ una coppia ordinata di numeri immaginari;

○ nessuna delle altre opzioni;

3. Ridurre un sistema in forma minima significa:

⊗ trovare il numero minimo di funzioni di trasferimento che lo descrivono;

○ non trovare alcuna funzione di trasferimento;

⊗ trovare un numero di funzioni di trasferimento pari al numero degli ingressi per il numero delle uscite;

○ trovare una sola funzione di trasferimento;

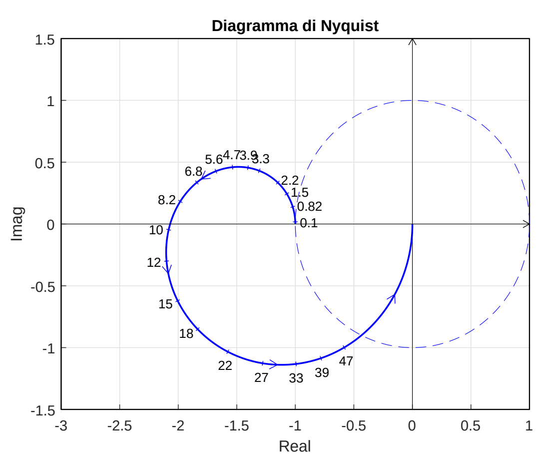
4. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace del segnate $f(t)$. Fornire l'enunciato del Teorema della traslazione in s:

$$\mathcal{L}[e^{-a\,t} f(t)] = F(s+a)$$

5. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+} y(t)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{6\,(s^2+3s+1)}{s(s+2)(s+4)(s+3)} \qquad \rightarrow \qquad y_0 = 0 \qquad\qquad y_\infty = 0.25$$

6. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $G(s) = \frac{60(s-3)}{(9-s)(20-s)}$. Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:



○ $0 < K < \bar{K}_2 < \infty$;

○ $0 < \bar{K}_1 < K < \infty$;

⊗ $0 < \bar{K}_1 < K < \bar{K}_2$;

○ nessuno dei precedenti;

Calcolare (se esistono) i valori $\bar{K}_1$ e $\bar{K}_2$:

$$\bar{K}_1 \simeq -\frac{1}{-2.1} = 0.4762, \qquad \bar{K}_2 \simeq 1.$$

7. Calcolare l'evoluzione forzata del sistema $2\dot{y}(t) + 3\,y(t) = 4\delta(t)$. Applicando la trasformata di Laplace si ha:

$$2\,s\,Y(s) + 3\,Y(s) = 4 \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{2}{s+1.5} \quad \rightarrow \quad y(t) = 2\,e^{-1.5\,t}.$$

8. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale $x(t)$:

$$x(t) = 2 + \sqrt{10}\sin(3t) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{s+4}{s+1}} \longrightarrow y(t) \simeq 8 + 5\sin(3t + \arctan\tfrac{3}{4} - \arctan 3)$$

9. Scegliere le opzioni corrette fra le seguenti relative alla scomposizione in fratti semplici:

◯ nel caso di poli multipli, tutte le costanti a numeratore della scomposizione sono residui;

⊗ nel caso di soli poli semplici, tutte le costanti a numeratore della scomposizione sono residui;

⊗ nel caso di poli semplici, i modi divergono per $t \to \infty$ solo se la parte reale del polo è positiva;

◯ nel caso di poli multipli, i modi divergono per $t \to \infty$ solo se la parte reale del polo è positiva;

10. Calcolare i parametri a e b della funzione di trasferimento $G(s) = \frac{a}{s+b}$ caratterizzata da un guadagno statico $G(0) = 3$ e da un tempo di assestamento $T_a = 0.2$ s alla risposta al gradino:

$$G(s) = \frac{a}{s+b} \qquad \to \qquad a = 45, \qquad\qquad b = 15.$$

11. Scegliere le opzioni corrette nel seguente confronto fra diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols:

◯ il diagramma di Nyquist, a differenza dei diagrammi di Bode, mette in evidenza la dipendenza diretta da ω;

⊗ il diagramma di Nyquist offre minor precisione rispetto ai diagrammi di Bode, soprattutto per ω molto piccole e molto grandi;

⊗ il diagramma di Nichols offre una migliore visualizzazione di moduli molto piccoli e molto grandi rispetto al diagramma di Nyquist;

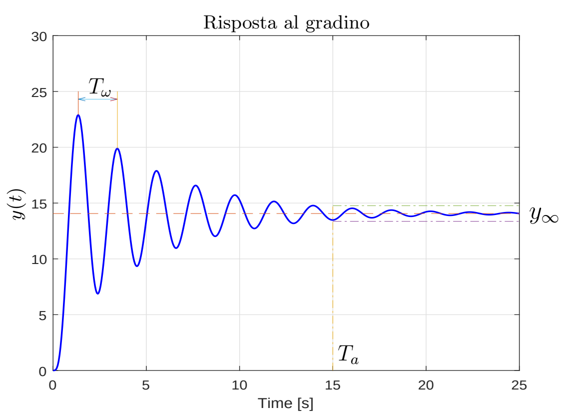
◯ il diagramma di Nichols, a differenza dei diagrammi di Bode, mette in evidenza la dipendenza diretta da ω;

12. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{300(15 + 0.5s)(s^2 + 12s + 900)}{(5s + 20)(0.3s + 4)(s^2 + 18s + 400)(\mathbf{s^2 + 0.4s + 9})}$$

Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$$y_\infty = 14.0625, \quad T_a \simeq \tfrac{3}{0.2} = 15\,\text{s}, \quad T_\omega \simeq \tfrac{2\pi}{3} = 2.0944.$$



13. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$ supponendo $t_0 > 0$:

$$G(s) = \frac{(10 - s)(s + 2)}{s(s + 3)^2}\, e^{-2\,t_0 s} \qquad \to \qquad \begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{100+\omega^2}\,\sqrt{4+\omega^2}}{\omega(9+\omega^2)} \\ \varphi(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{10} + \arctan\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{2} - 2\arctan\frac{\omega}{3} - 2\,t_0\,\omega \end{cases}$$