

**Controlli Automatici - Prima parte**  
**13 Aprile 2026 - Esercizi - ELE**

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info.    Elet.    Telecom.    Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace  $X(s)$  dei seguenti segnali temporali  $x(t)$ :

$$x_1(t) = [t^3 + \cos(4t)] e^{-3t}, \quad x_2(t) = 2t^3 + 3\delta(t - 5)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{6}{(s+3)^4} + \frac{(s+3)}{(s+3)^2 + 16}, \quad X_2(s) = \frac{12}{s^4} + 3e^{-5s}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva  $g(t)$  delle seguenti funzioni di trasferimento  $G(s)$ :

$$G_1(s) = 4 + \frac{12}{s(s+2)(s+3)}, \quad G_2(s) = \frac{16e^{-2s}}{s^2 + 64}$$

Soluzione:

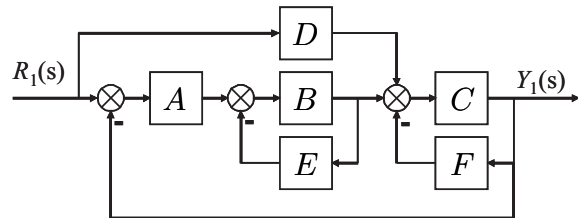
$$g_1(t) = 4\delta(t) + 2 - 6e^{-2t} + 4e^{-3t}, \quad g_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ 2 \sin(8(t-2)) & t \geq 2 \end{cases}$$

Infatti, per la seconda parte della funzione  $G_1(s)$  si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}[G_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{12}{s(s+2)(s+3)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} - \frac{6}{s+2} + \frac{4}{s+3}\right] = 2 - 6e^{-2t} + 4e^{-3t}.$$

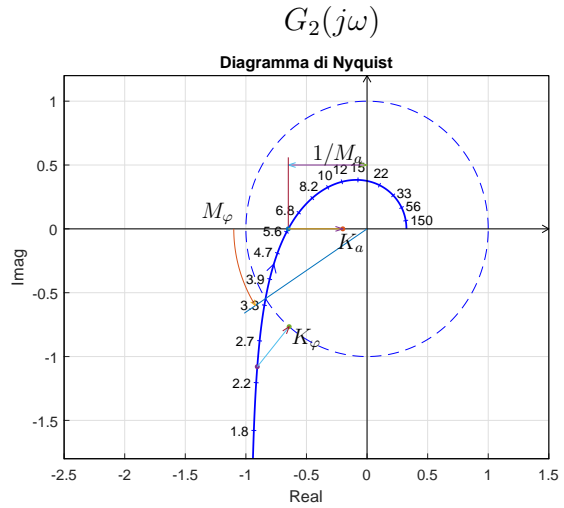
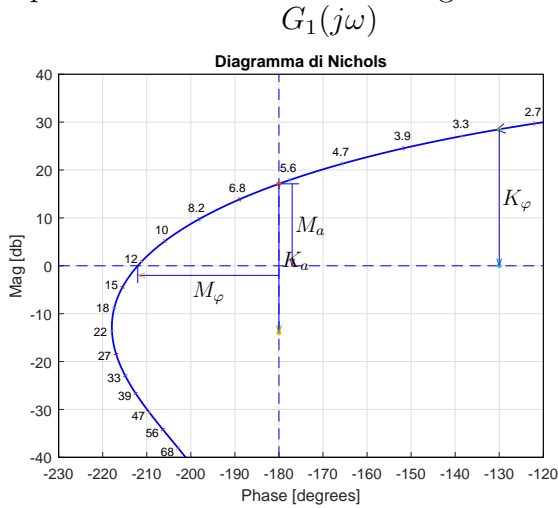
b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{Y_1(s)}{R_1(s)}$ :

$$G(s) = \frac{ABC + DC(1 + BE)}{1 + BE + CF + ABC + BECF}$$



- c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$ .  
 Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:
- il margine di ampiezza  $M_a$  del sistema;
  - il margine di fase  $M_\varphi$  del sistema;
  - il guadagno  $K_\varphi$  per cui il sistema  $K_\varphi G(s)$  ha un margine di fase  $M_\varphi = 50$ ;
  - il guadagno  $K_\alpha$  per cui il sistema  $K_\alpha G(s)$  ha un margine di ampiezza  $M_\alpha = 5$ ;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:



c.1)  $M_a = -17.1 \text{ db} = 0.139$

c.1)  $M_a = 1.54$

c.2)  $M_\phi = -32$

c.2)  $M_\phi = 33.1$

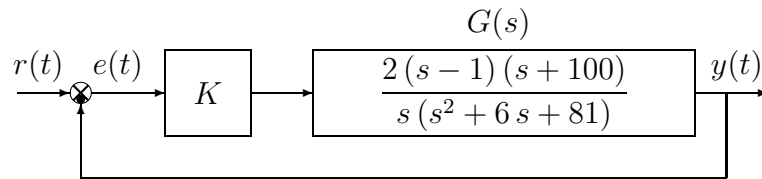
c.3)  $K_\phi = -28.5 \text{ db} = 0.0376$

c.3)  $K_\phi = 0.71$

c.4)  $K_a = -31.1 \text{ db} = 0.0279$

c.4)  $K_a = 0.308$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di  $K$  il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K \frac{2(s-1)(s+100)}{s(s^2+6s+81)} = 0 \rightarrow s^3 + (2K+6)s^2 + (198K+81)s + (-200K) = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 198K+81 \\ 2 & 2K+6 & -200K \\ 1 & 1550K+396K^2+486 & \\ 0 & -200K & \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano positivi si ricavano i seguenti vincoli:

$$2K+6 > 0, \quad 1550K+396K^2+486 > 0, \quad -200K > 0,$$

dai quali si ricava:

$$K > -3, \quad (K < -3.5704) \cup (K > -0.34373), \quad K < 0.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K_1 = -0.34373 < K < 0.$$

La pulsazione  $\omega_1$  corrispondente al valore limite  $K_1$  è:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{-200K_1}{2K_1+6}} = 3.5973.$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione  $G(s)$ .

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione  $G(s)$  sono mostrati in Fig. 1.

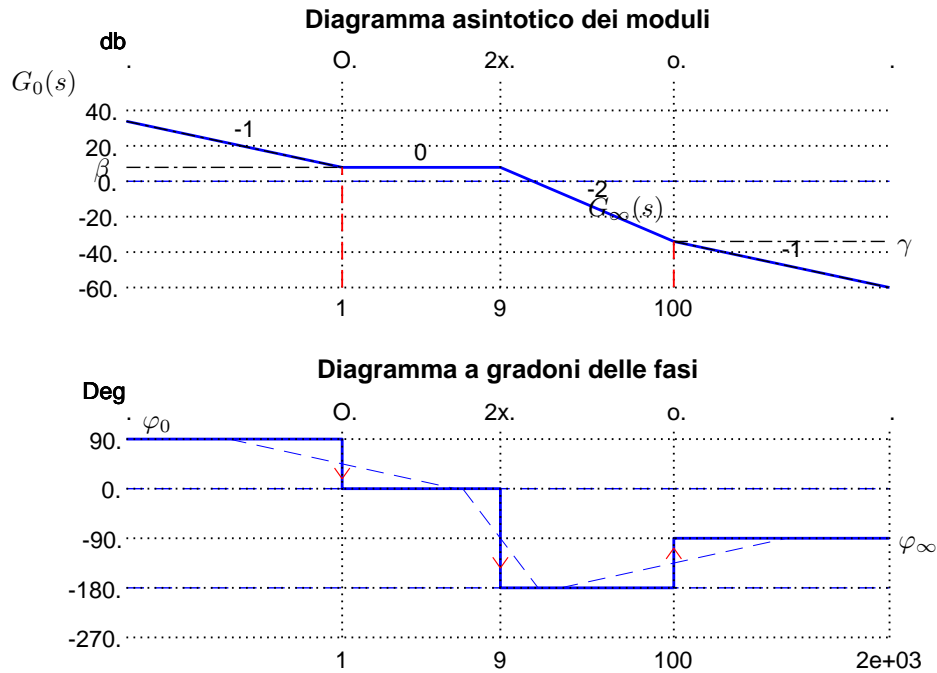


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione  $G(s)$ .

Le funzioni approssimanti  $G_0(s)$  e  $G_\infty(s)$  per  $\omega \rightarrow 0$  ed  $\omega \rightarrow \infty$  sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{-2.4691}{s} = \frac{K}{s}, \quad G_\infty(s) = \frac{2}{s}.$$

where  $K = -2.4691$ . Le corrispondenti fasi  $\varphi_0$  e  $\varphi_\infty$  hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}, \quad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno  $\beta$  alla pulsazione  $\omega = 1$  e il guadagno  $\gamma$  alla pulsazione  $\omega = 100$  sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=1} = 2.469 = 7.851 \text{ db}, \quad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=100} = 0.02 = -33.98 \text{ db}.$$

Coefficienti di smorzamento dei poli complessi coniugati:  $\delta_1 = 0.33333$ .

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione  $G(s)$  sono mostrati in Fig. 2.

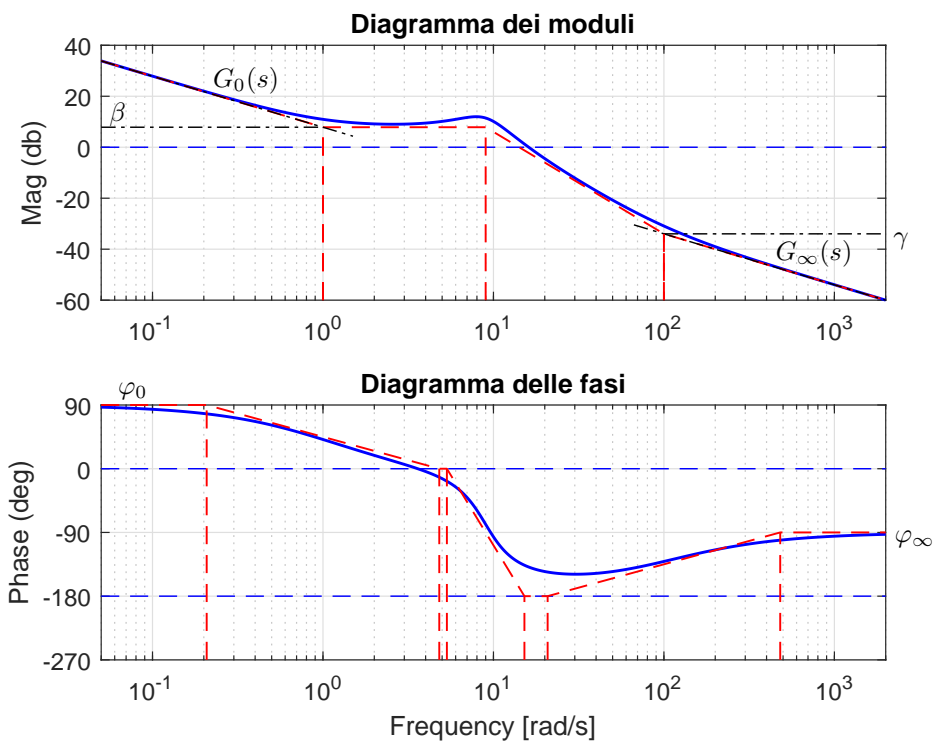
d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” della funzione  $G(s)$ . Calcolare esattamente la posizione  $\sigma_a$  di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni  $\sigma_i^*$  con il semiasse reale negativo e i corrispondenti valori delle pulsazioni  $\omega_i^*$ .

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione  $G(s)$  è mostrato in Fig. 3. La fase iniziale del sistema è  $\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}$ . Per  $\omega \rightarrow 0^+$  il diagramma parte in ritardo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è negativa:

$$\Delta\tau = \frac{1}{-1} + \frac{1}{100} - \frac{6}{81} = -1.064 < 0.$$

Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto. La posizione dell’asintoto è la seguente:

$$\sigma_a = K\Delta\tau = -2.4691 \cdot (-1.0641) = 2.6273.$$



i

Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione  $G(s)$ .

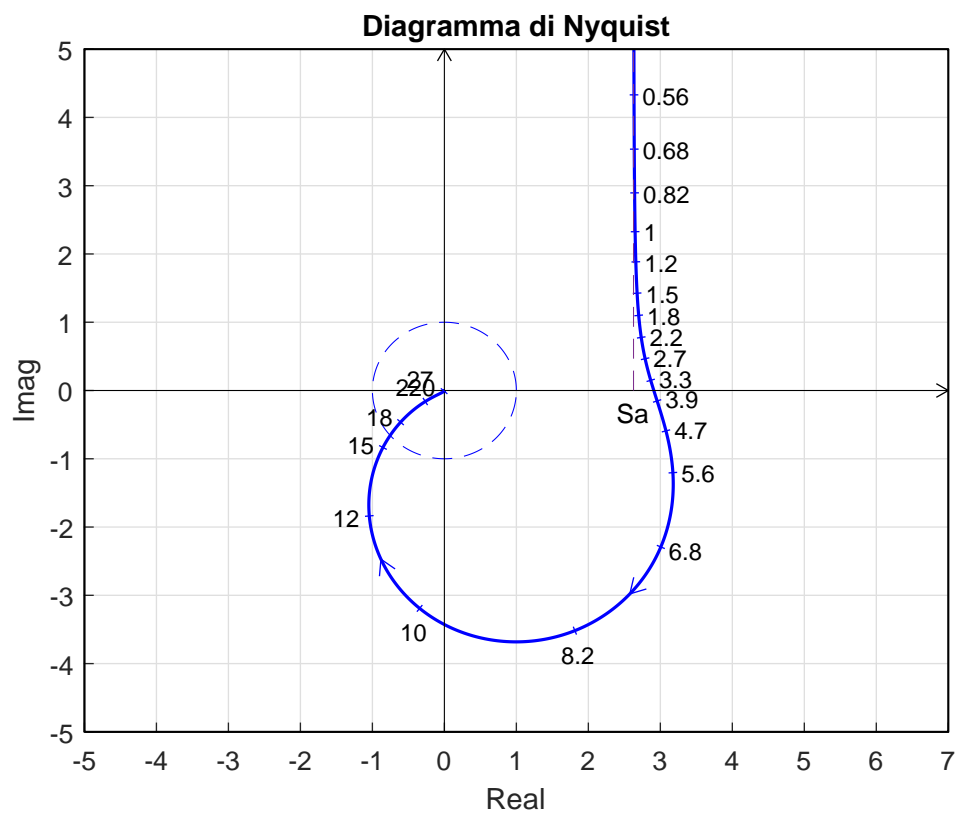


Figura 3: Il diagramma di Nyquist della funzione  $G(s)$ .

Partendo dalla fase iniziale  $\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}$ , la variazione di fase  $\Delta\varphi$  che il sistema subisce per  $\omega \in ]0, \infty[$  è:

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi = -\pi.$$

Ne segue che il vettore  $G(j\omega)$  ruota di  $-\pi$  in senso orario per raggiungere la fase finale  $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ . Per  $\omega \rightarrow \infty$  il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale  $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$  in quanto la somma  $\Delta_p$  del sistema è negativa:

$$\Delta_p = 1 - 100 + 6 = -93 < 0.$$

Esiste una sola intersezione con il semiasse reale negativo. L'intersezione avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K_1} = -\frac{1}{-0.34373} = 2.9093.$$

in corrispondente della pulsazione  $\omega^* = 3.5973$ .

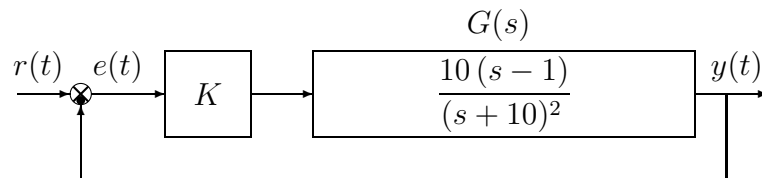
d.4) Calcolare il valore di  $K$  necessario per avere un errore a regime  $|e_v| = 0.01$  per ingresso a rampa  $x(t) = 2t$ .

Soluzione. L'errore a regime  $e_p$  del sistema retroazionato per ingresso a rampa  $x(t) = 2t$  è:

$$e_v = \frac{R_0}{|K_v|} = \frac{2}{2.4691 |K|} = 0.01 \quad \rightarrow \quad |K| = \frac{2}{2.4691 \cdot 0.01} \simeq 81.$$

Per tale valore di  $K$  il sistema retroazionato è instabile.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori di  $K$  il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K \frac{10(s-1)}{(s+10)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad s^2 + (10K + 20)s + (100.0 - 10K) = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 100.0 - 10K \\ 1 & 10K + 20 & \\ 0 & 100.0 - 10K & \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano positivi si ricavano i seguenti vincoli:

$$10K + 20 > 0, \quad 100.0 - 10K > 0,$$

dai quali si ricava:

$$K > -2, \quad K < 10.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K_1 = -2 < K < 10.$$

La pulsazione  $\omega_1$  corrispondente al valore limite  $K_1$  è:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{100.0 - 10K_1}{1}} = 10.9545.$$

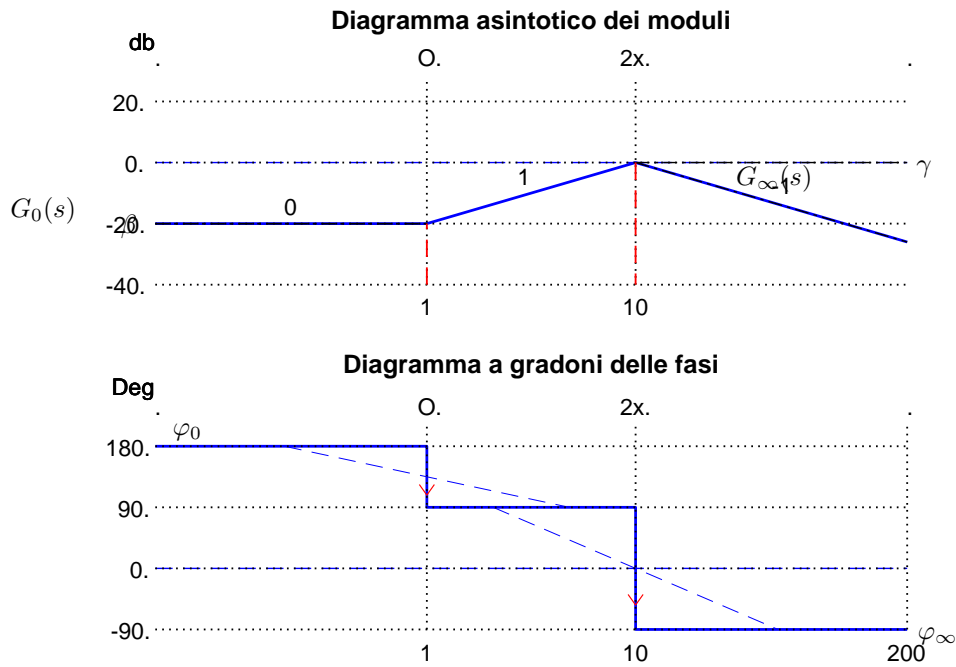


Figura 4: Diagrammi di Bode della funzione  $G(s)$ .

e.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione  $G(s)$ .

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione  $G(s)$  sono mostrati in Fig. 4.

Le funzioni approssimanti  $G_0(s)$  e  $G_\infty(s)$  per  $\omega \rightarrow 0$  ed  $\omega \rightarrow \infty$  sono le seguenti:

$$G_0(s) = -0.1, \quad G_\infty(s) = \frac{10}{s}.$$

where  $K = -0.1$ . Le corrispondenti fasi  $\varphi_0$  e  $\varphi_\infty$  hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\pi, \quad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno  $\beta$  alla pulsazione  $\omega = 1$  e il guadagno  $\gamma$  alla pulsazione  $\omega = 10$  sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=1} = 0.1 = -20 \text{ db}, \quad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = 1 = 0 \text{ db}.$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione  $G(s)$  sono mostrati in Fig. 5.

e.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione  $G(s)$ . Calcolare esattamente la posizione  $\sigma_a$  di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni  $\sigma_i^*$  con il semiasse reale negativo e i corrispondenti valori delle pulsazioni  $\omega_i^*$ .

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione  $G(s)$  è mostrato in Fig. 6. La fase iniziale del sistema è  $\varphi_0 = -\pi$ . Per  $\omega \rightarrow 0^+$  il diagramma parte in ritardo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è negativa:

$$\Delta\tau = \frac{1}{-1} - \frac{1}{10} - \frac{1}{10} = -1.2 < 0.$$

Il sistema è di tipo 0 per cui nel diagramma di Nyquist non è presente nessun asintoto. Partendo dalla fase iniziale  $\varphi_0 = -\pi$ , la variazione di fase  $\Delta\varphi$  che il sistema subisce per  $\omega \in ]0, \infty[$  è:

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}.$$

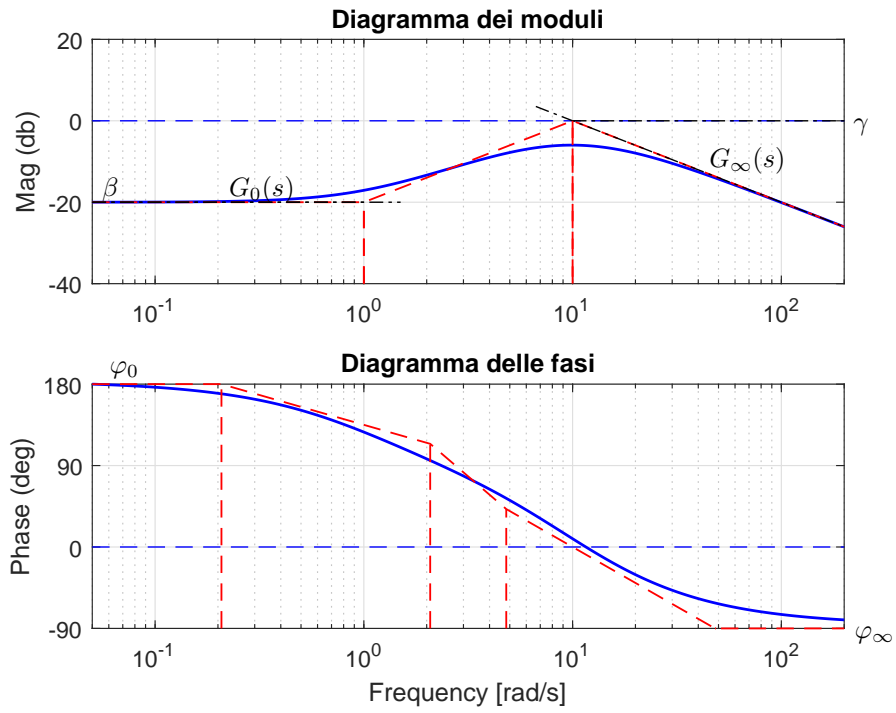


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione  $G(s)$ .

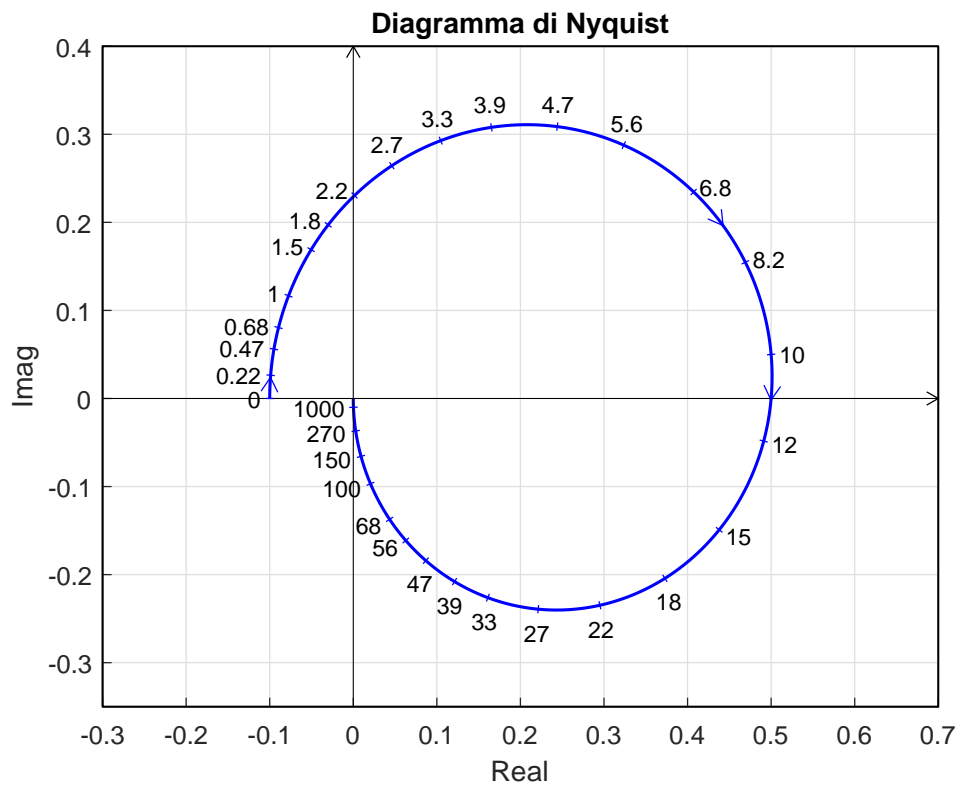


Figura 6: Il diagramma di Nyquist della funzione  $G(s)$ .

Ne segue che il vettore  $G(j\omega)$  ruota di  $-\frac{3\pi}{2}$  in senso orario per raggiungere la fase finale  $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ . Per  $\omega \rightarrow \infty$  il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale  $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$  in quanto la somma  $\Delta_p$  del sistema è positiva:

$$\Delta_p = 1 + 10 + 10 = 21 > 0.$$

Esiste una sola intersezione con il semiasse reale negativo. L'intersezione avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K_1} = -\frac{1}{-2} = 0.5.$$

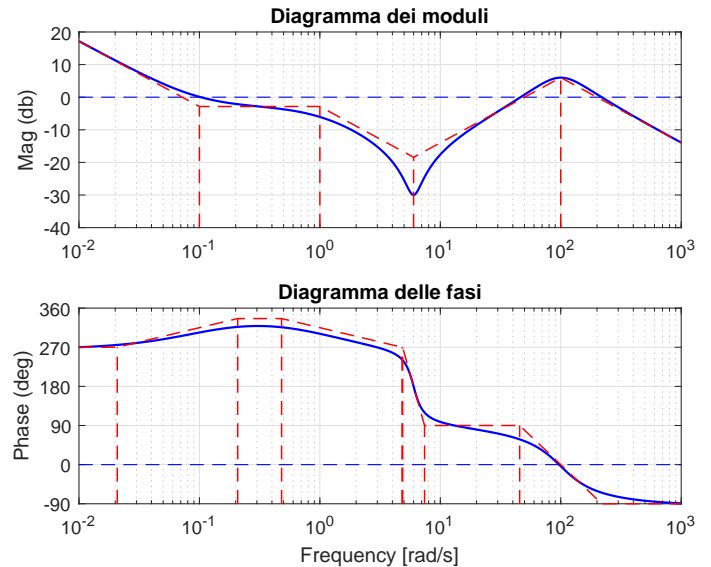
in corrispondente della pulsazione  $\omega^* = 10.9545$ .

f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione  $G(s)$  mostrati in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione  $G(s)$ .

$$G(s) = \frac{200(s+0.1)(s^2-1.6s+36)}{s(s+1)(s^2+100s+10000)}$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di  $\delta$ .



Soluzione. La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{200(s+0.1)(s^2-1.6s+36)}{s(s+1)(s^2+100s+10000)}$$

Il valore  $K = 200$  può essere calcolato in due modi diversi:

1) calcolando il modulo  $\beta$  dell'approssimante  $G_0(s)$  in corrispondenza della pulsazione  $\omega = 0.1$ :

$$|G_0(s)|_{s=0.1j} = \left| \frac{0.00036 K}{s} \right|_{s=0.1j} = \frac{0.00036 K}{0.1} = \beta \simeq -2.85 \text{ db} \simeq 0.72 \quad \Rightarrow \quad K \simeq 200.$$

2) calcolando il modulo  $\gamma$  dell'approssimante  $G_\infty(s)$  in corrispondenza della pulsazione  $\omega = 100$ :

$$|G_\infty(s)|_{s=100j} = \left| \frac{K}{s} \right|_{s=100j} = \frac{K}{100} = \gamma \simeq 6.02 \text{ db} \simeq 2 \quad \rightarrow \quad K \simeq 200.$$

I coefficienti di smorzamento  $\delta$  delle coppie di poli o zeri complessi coniugati presenti all'interno della funzione  $G(s)$  sono i seguenti:

$$\begin{aligned} (s^2 - 1.6s + 36) &\rightarrow M_{\omega_n} \simeq 11.5 \text{ db} = 3.75 \rightarrow \delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq 0.133 \\ (s^2 + 100s + 100^2) &\rightarrow M_{\omega_n} \simeq 0 \text{ db} = 1 \rightarrow \delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq 0.5 \end{aligned}$$

I valori  $M_{\omega_n}$  si leggono sul diagramma di Bode dei moduli come distanza tra il diagramma asintotico e il diagramma reale alla pulsazione  $\omega_n$ .



7. Calcolare l'evoluzione forzata del sistema  $2\dot{y}(t) + 3y(t) = 4\delta(t)$ . Applicando la trasformata di Laplace si ha:

$$2sY(s) + 3Y(s) = 4 \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{2}{s + 1.5} \quad \rightarrow \quad y(t) = 2e^{-1.5t}.$$

8. Calcolare la risposta a regime  $y(t)$  del sistema  $G(s)$  quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale  $x(t)$ :

$$x(t) = 2 + \sqrt{10}\sin(3t) \xrightarrow{G(s)} \left[ \frac{s+4}{s+1} \right] y(t) \simeq 8 + 5\sin\left(3t + \arctan\frac{3}{4} - \arctan 3\right)$$

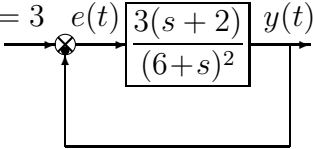
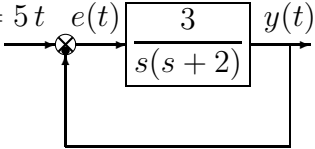
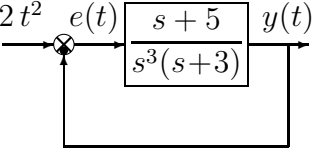
9. Scegliere le opzioni corrette fra le seguenti relative alla scomposizione in fratti semplici:

- nel caso di poli multipli, tutte le costanti a numeratore della scomposizione sono residui;
- nel caso di solo poli semplici, tutte le costanti a numeratore della scomposizione sono residui;
- nel caso di poli semplici, i modi divergono per  $t \rightarrow \infty$  solo se la parte reale del polo è positiva;
- nel caso di poli multipli, i modi divergono per  $t \rightarrow \infty$  solo se la parte reale del polo è positiva;

10. Calcolare i parametri  $a$  e  $b$  della funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{a}{s+b}$  caratterizzata da un guadagno statico  $G(0) = 3$  e da un tempo di assestamento  $T_a = 0.2$  s alla risposta al gradino:

$$G(s) = \frac{a}{s+b} \quad \rightarrow \quad a = 45, \quad b = 15.$$

11. Calcolare l'errore a regime  $e(\infty)$  per i seguenti sistemi retroazionati:

$r(t) = 3$ 	$r(t) = 5t$ 	$r(t) = 2t^2$ 
$e(\infty) = \frac{3}{1 + \frac{1}{6}} = \frac{18}{7} = 2.5714$	$e(\infty) = \frac{10}{3} = 3.33$	$e(\infty) = 0$

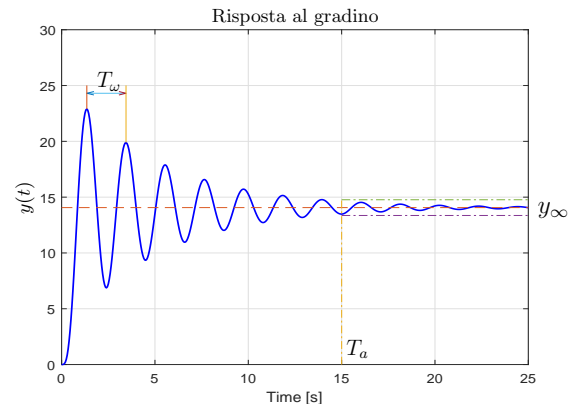
12. Disegnare l'andamento qualitativo  $y_1(t)$  della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{300(15 + 0.5s)(s^2 + 12s + 900)}{(5s + 20)(0.3s + 4)(s^2 + 18s + 400)(s^2 + 0.4s + 9)}$$

Calcolare inoltre:

- a) il valore a regime  $y_\infty$  della risposta al gradino per  $t \rightarrow \infty$ ;
- b) il tempo di assestamento  $T_a$  della risposta al gradino  $y_1(t)$ ;
- c) il periodo  $T_\omega$  dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale  $y_1(t)$ :

$$y_\infty = 14.0625, \quad T_a \simeq \frac{3}{0.2} = 15 \text{ s}, \quad T_\omega \simeq \frac{2\pi}{3} = 2.0944.$$



13. Scrivere il modulo  $M(\omega) = |G(j\omega)|$  e la fase  $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$  della funzione di risposta armonica del seguente sistema  $G(s)$  supponendo  $t_0 > 0$ :

$$G(s) = \frac{(10-s)(s+2)}{s(s+3)^2} e^{-2t_0s} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{100+\omega^2}\sqrt{4+\omega^2}}{\omega(9+\omega^2)} \\ \varphi(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{10} + \arctan\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{2} - 2\arctan\frac{\omega}{3} - 2t_0\omega \end{cases}$$