Controlli Automatici A
13 Aprile 2012 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = [3\,t^3 + \sin(4\,t)]\,e^{-5\,t}, \qquad\qquad x_2(t) = 4\,\delta(t) + 3\,t^2\,e^{-2\,t}$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{18}{(s+5)^4} + \frac{4}{(s+5)^2+16}, \qquad\qquad X_2(s) = 4 + \frac{6}{(s+2)^3}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

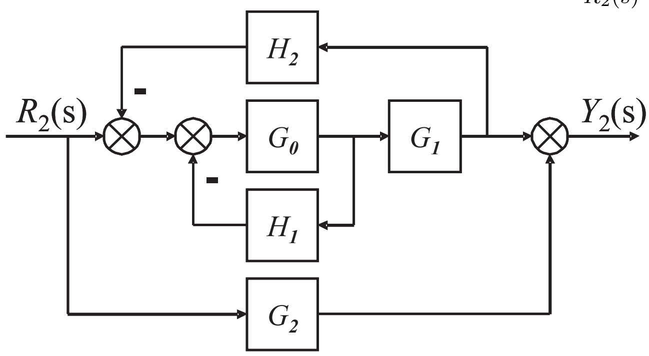
$$G_1(s) = \frac{10}{(s+3)(1+2\,s)} \qquad\qquad G_2(s) = 3 + \frac{10}{(s+5)^3}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = \frac{10}{5}\left[e^{-0.5\,t} - e^{-3\,t}\right], \qquad\qquad g_2(t) = 3\,\delta(t) + 5\,t^2 e^{-5\,t}$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y_2(s)}{R_2(s)}$:

$$G(s) = \frac{G_0G_1 + G_2(1+G_0H_1+G_0G_1H_2)}{1+G_0H_1+G_0G_1H_2}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

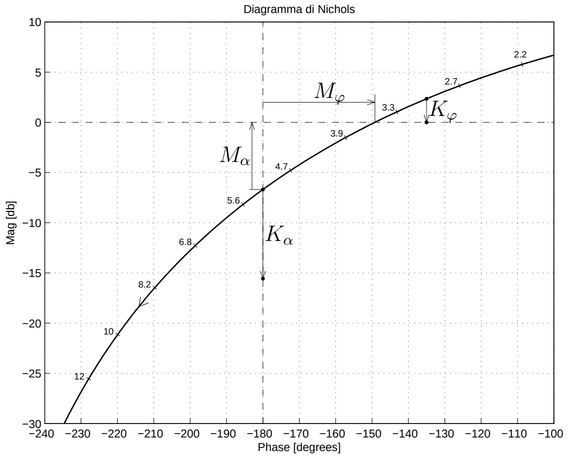
c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;

c.2) il margine di fase M_φ del sistema;

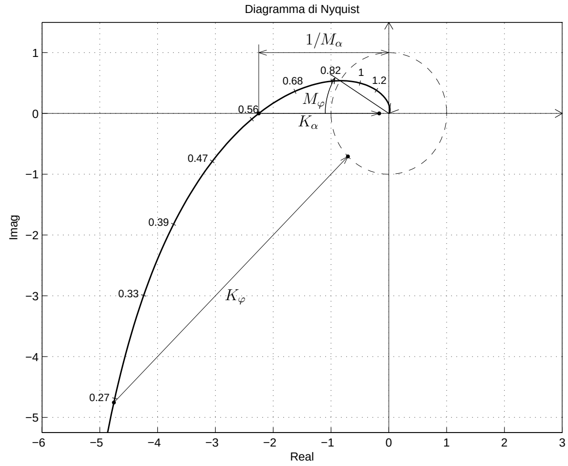
c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\, G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 45$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$



$G_2(j\omega)$



c.1) $M_a = 6.69$ db $= 2.16$

c.2) $M_\varphi = 30.79$

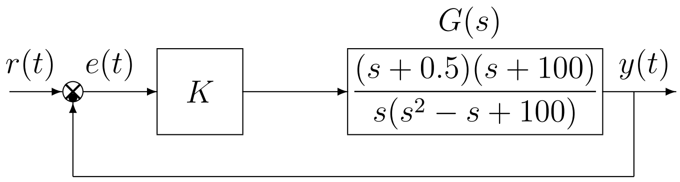
c.3) $K_\varphi = -2.34$ db $= 0.76$

c.1) $M_a = 0.44$

c.2) $M_\varphi = -32.6$

c.3) $K_\varphi = 0.148$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K(s+100)(s+0.5)}{s(s^2-s+100)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + (K-1)s^2 + (100+100.5K)s + 50K = 0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 100+100.5K \\ 2 & K-1 & 50K \\ 1 & (K-1)(100+100.5K) - 50K & \\ 0 & 50K & \end{array}$$

Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 1, \qquad 100.5\,K^2 - 50.5\,K - 100 > 0, \qquad K > 0.$$

In base alla regola dei segni dei coefficienti di una equazione di secondo grado, è possibile affermare che le due soluzioni K_1 e K_2 dell'equazione di secondo grado della riga 1 sono reali e di segni opposti: $K_1 < 0$ e $K_2 > 0$. Inoltre, la corrispondente disequazione è positiva all'esterno di tali valori. Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > K_2 = \frac{50.5 + \sqrt{42750.25}}{201} = 1.28 = K^*.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{100 + 100.5K^*}. = 15.12.$$

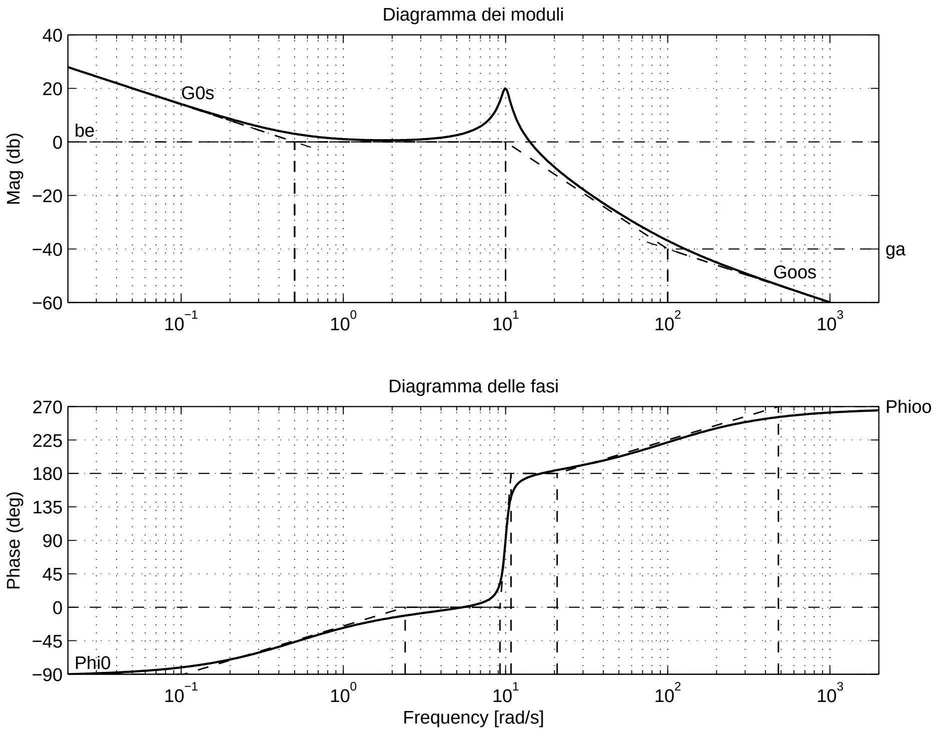


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

<u>Soluzione</u>. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1. Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{0.5}{s}, \qquad G_\infty(s) = \frac{1}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2} \equiv \frac{3\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze, il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.5$ e il guadagno γ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 100$ sono:

$$\beta = 1 = 0 \text{ db}, \qquad \gamma = \frac{1}{100} = -40 \text{ db}.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli instabili è $\delta = 0.05$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

<u>Soluzione</u>. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 2. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = 2 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = 2.02 > 0.$$

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale:

$$\sigma_a = K\Delta_\tau = 0.5 \cdot 2.02 = 1.01.$$

La variazione di fase $\Delta\varphi = 2\pi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ indica che il vettore $G(j\omega)$ ruota di 2π in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = \frac{3\pi}{2}$. Esistono due intersezione con l'asse reale. L'intersezione con l'asse reale negativo avviene nel punto:

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{K^*} = -0.781.$$

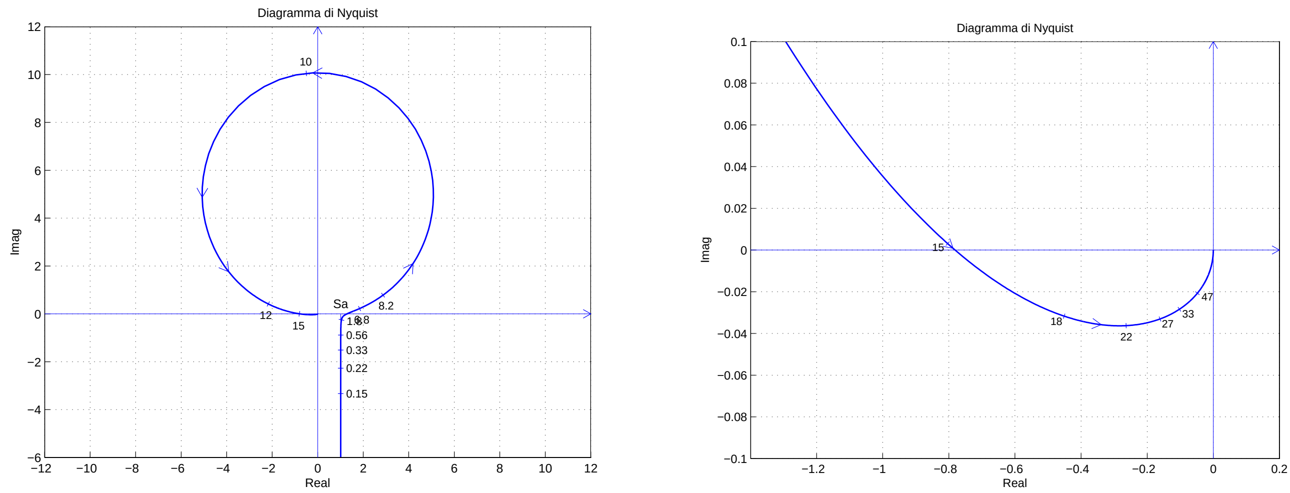


Figura 2: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$: andamento generale e zoom.

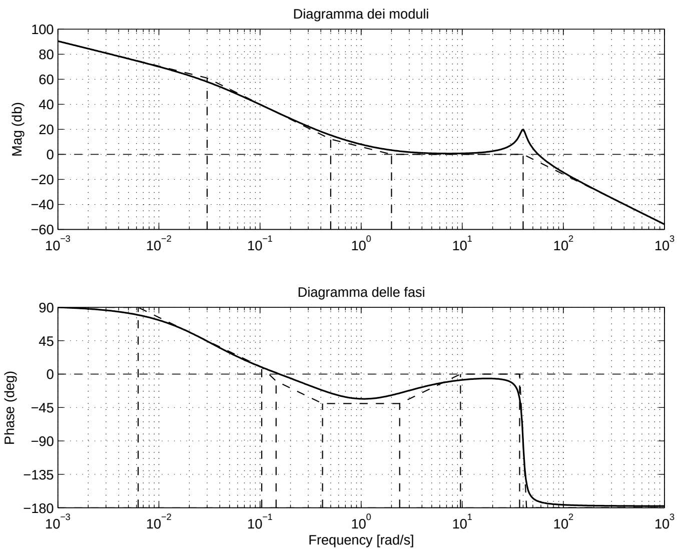
in corrispondente della pulsazione $\omega_1^* = 15.12$.

e) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

e.1) Calcolare la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$x(t) = 3\,\sin(0.3\,t + \tfrac{\pi}{4}).$$

e.2) Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$. Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.



Soluzione:

e.1) La risposta a regime del sistema $G(s)$ al segnale dato è la seguente:

$$\begin{aligned} y_\infty(t) &= 3\,|G(0.3\,j)|\,\sin(0.3\,t + \tfrac{\pi}{4} + \arg G(0.3\,j)) \\ &= 39.11\,\sin(0.3\,t + \tfrac{\pi}{4} - 16.76^\circ). \end{aligned}$$

Infatti si ha che $G(0.3j) = 13.04\,e^{-16.76^\circ j}$.

e.2) La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{1600\,(s-0.5)(s+2)}{s(s+0.03)(s^2+4\,s+40^2)}.$$

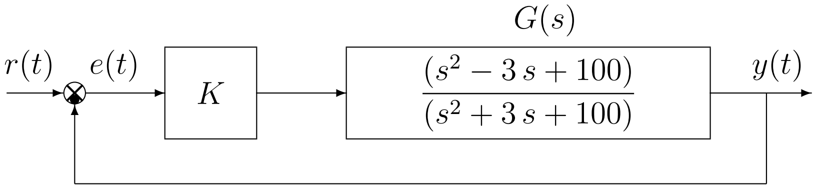
Il valore $K = 1600$ si determina calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 40$:

$$|G_\infty(s)|_{s=j40} = \left|\frac{-K}{s^2}\right|_{s=j40} = \frac{K}{(40^2)} = \gamma = 1 \qquad \to \qquad K = 1600.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati stabili è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} = \frac{1}{20} = 0.05.$$

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



f.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K(s^2 - 3\,s + 100)}{(s^2 + 3\,s + 100)} = 0 \quad \rightarrow \quad (1+K)s^2 + 3(1-K)\,s + 100(1+K) = 0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & (1+K) & 100(1+K) \\ 1 & 3(1-K) & \\ 0 & 100(1+K) & \end{array}$$

Il sistema retroazionato è stabile se:

$$(1+K) > 0, \qquad (1-K) > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad -1 < K < 1.$$

f.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 3. Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

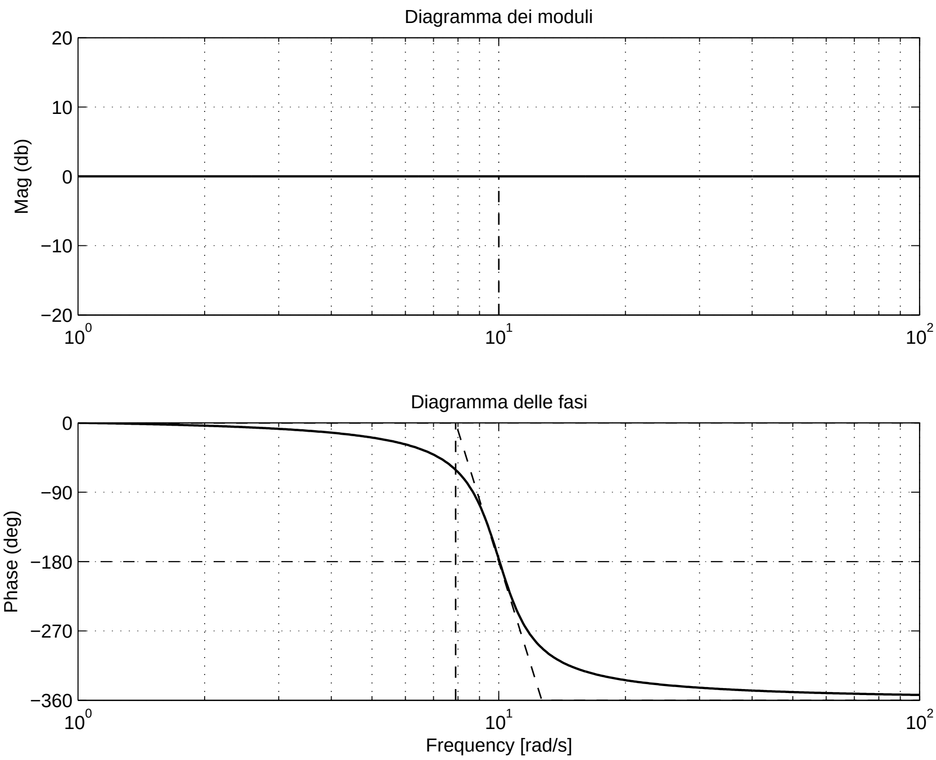


Figura 3: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

$$G_0(s) = 1, \qquad G_\infty(s) = 1$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = 0, \qquad \varphi_\infty = 0 \equiv -2\,\pi.$$

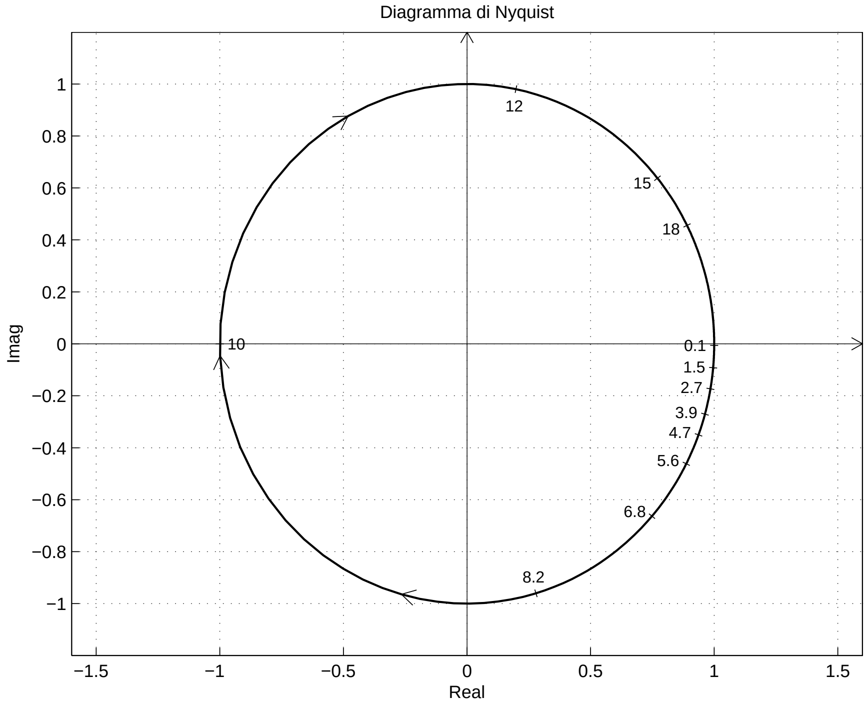


Figura 4: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

f.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 4. Il sistema é di tipo 0 per cui non esiste nessun asintoto. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = 0$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto alla fase iniziale:

$$\Delta\tau = -\frac{3}{100} - \frac{3}{100} < 0.$$

La variazione di fase $\Delta\varphi = -2\pi$ indica che il vettore $G(j\omega)$ ruota di -2π in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -2\pi$.

Controlli Automatici A

13 Aprile 2012 - Domande

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

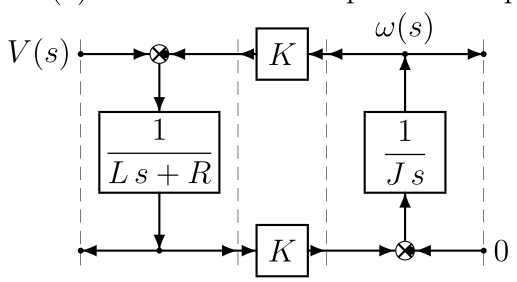
1. Sia $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ la trasformata di Laplace del segnate $f(t)$. Il teorema della traslazione in s afferma che:

$$\mathcal{L}[e^{-a\,t} f(t)] = F(s+a).$$

2. L'equazione differenziale $\ddot{y} = -2\,y^3 + 2\,x$, dove x è l'ingresso e y è l'uscita, è:

⊗ stazionaria ○ lineare
○ non stazionaria ⊗ non lineare

3. Dato il seguente schema a blocchi, calcolare la funzione $G(s)$ che lega l'ingresso $V(s)$ all'uscita $\omega(s)$ e scrivere la corrispondente equazione differenziale che lega i segnali $V(t)$ e $\omega(t)$:



$$G(s) = \frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{K}{JL\,s^2 + RJ\,s + K^2}$$

$$JL\,\ddot{\omega}(t) + RJ\,\dot{\omega}(t) + K^2\,\omega(t) = K\,V(t)$$

4. In figura è mostrato il diagramma di Bode dei moduli di un sistema lineare $G(s)$ a fase minima.

a) Calcolare il guadagno statico del sistema:

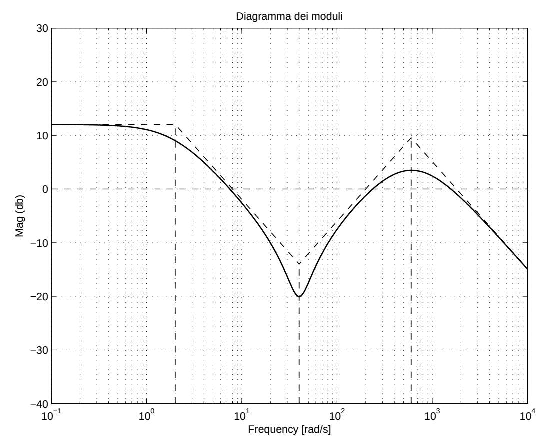
$$G(0) = 12 \text{ db} = 4;$$

b) Calcolare la posizione del polo dominante:

$$p_1 \simeq -2$$

c) Calcolare il tempo di assestamento del sistema:

$$T_a = \frac{3}{|p_1|} \simeq 1.5 \text{ s};$$



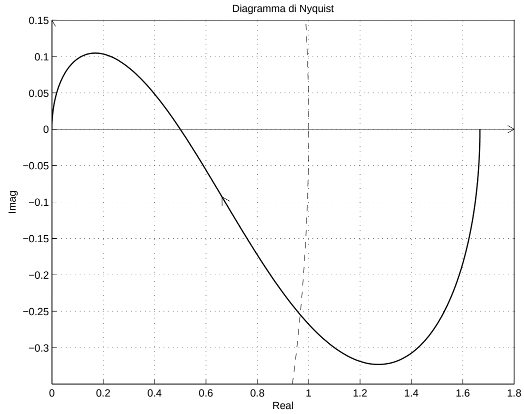
5. Sia dato il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \dfrac{-(s+5)}{(s+1)(s-3)}$.

In base al criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

○ $(K > 0,\ |K| << 1)$;
○ $(K > 0,\ |K| >> 1)$;
⊗ $(K < 0,\ |K| >> 1)$;
○ $(K < 0,\ |K| << 1)$;

Calcolare inoltre il valore limite K^*:

$$K^* = -2$$



6. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+} y(t)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{(2\,s+1)(s+4)^2}{s(s+1)(3\,s+1)(s+5)} \qquad \rightarrow \qquad y_0 = \frac{2}{3}, \qquad y_\infty = \frac{16}{5}$$

7. Nella scomposizione in fratti semplici, quali sono i *modi* $g_1(t)$, $g_2(t)$ e $g_3(t)$ corrispondenti ad un polo reale in $p_1 = -2$ con grado di molteplicità $\nu = 3$:

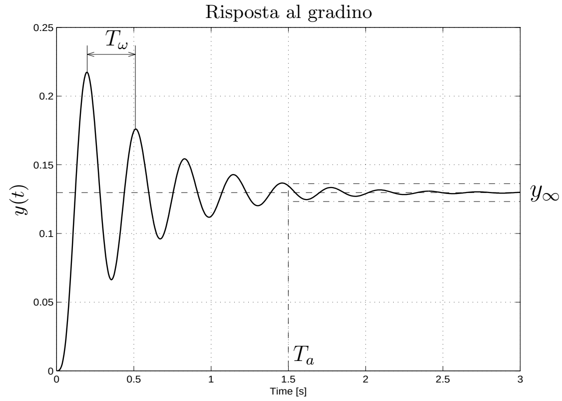
$$g_1(t) = K_1\, e^{-2\,t}, \qquad g_2(t) = K_2\, t\, e^{-2\,t}, \qquad g_3(t) = K_3\, t^2\, e^{-2\,t}.$$

8. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{300\,(2+0.1\,s)(s^2+200s+40000)}{(0.5\,s+25)(0.1\,s+20)(s^2+4s+400)(s^2+60s+925)}$$

Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t\to\infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$y_\infty = 0.129, \qquad T_a \simeq 1.5\,\text{s}, \qquad T_\omega \simeq 0.31\,\text{s}.$



9. Completare la seguente formulazione del criterio di Nyquist (quella valida anche per sistemi instabili ad anello aperto).

Criterio di Nyquist. Nell'ipotesi che la funzione $F(s)$ *non presenti poli immaginari, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio*"

condizione ○ *solo necessaria* ○ *solo sufficiente* ⊗ *necessaria e sufficiente*

affinché "*il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile*"
è che "*il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ circondi il punto critico $-1+j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $F(s)$ con parte reale positiva.*

10. In un sistema del 2^o ordine la distanza del poli dall'origine (a parità di direzione) influisce sui seguenti parametri della risposta al gradino

⊗ tempo di salita ⊗ tempo di ritardo
○ coefficiente di smorzamento ⊗ tempo di assestamento

11. Per un sistema del 2^o ordine privo di zeri e caratterizzato da una coppia di poli complessi coniugati, scrivere l'espressione della funzione $S(\delta)$ che lega la massima sovraelongazione $S\%$ al coefficiente di smorzamento δ:

$$S(\delta) = 100\, e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

12. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$ supponendo $t_0 > 0$:

$$G(s) = \frac{(s+3)(s-3)}{s(2-5\,s)}\, e^{-3\,t_0 s} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} M(\omega) = \dfrac{\omega^2+9}{\omega\sqrt{4+25\omega^2}} \\[2ex] \varphi(\omega) = -\pi - 3\,t_0\,\omega - \dfrac{\pi}{2} - \arctan\dfrac{5\omega}{2} \end{cases}$$