Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Controlli Automatici - Prima parte
7 Novembre 2024 - Esercizi

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = t^4 + 2\,e^{-7\,t}\sin(2\,t), \qquad\qquad x_2(t) = 5\,t\,e^{2t} + 3\,\cos(4\,t)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{24}{s^5} + \frac{4}{(s+7)^2+2^2}, \qquad\qquad X_2(s) = \frac{5}{(s-2)^2} + \frac{3\,s}{s^2+16}$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G(s)$:

$$G_1(s) = \frac{2}{s(s+1)(1+2s)}, \qquad\qquad G_2(s) = \frac{4\,e^{-2\,s}}{s^2+16}$$

Soluzione:

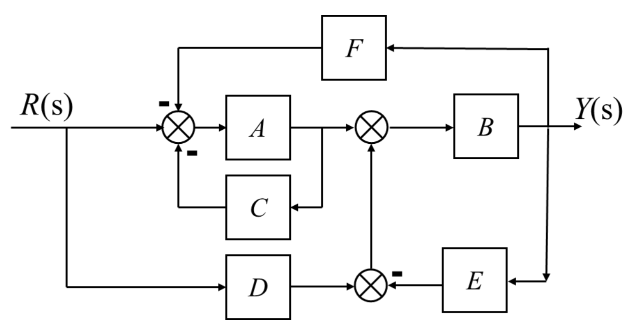
$$g_1(t) = 2 + 2\,e^{-t} - 4\,e^{-0.5\,t}, \qquad\qquad g_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ \sin(4(t-2)) & t \geq 2 \end{cases}$$

Infatti, per la seconda parte della funzione $G_1(s)$ si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G_1(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)(s+0.5)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} + \frac{2}{(s+1)} - \frac{4}{(s+0.5)}\right] = 2 + 2\,e^{-t} - 4\,e^{-0.5\,t}.$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$:

$$G(s) = \frac{A\,B + D\,B\,(1+A\,C)}{1 + A\,C + B\,E + A\,B\,F + A\,C\,B\,E}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;

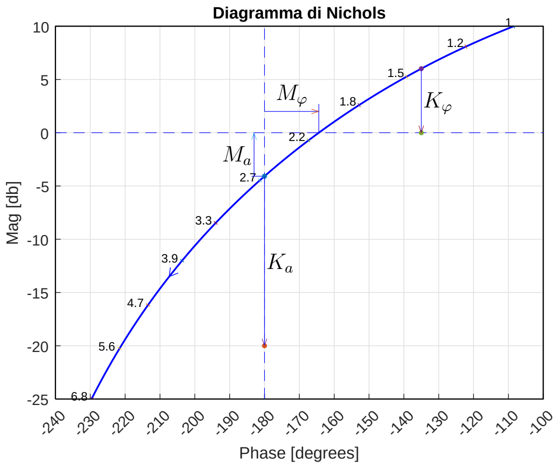
c.2) il margine di fase M_φ del sistema;

c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\,G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 45$;

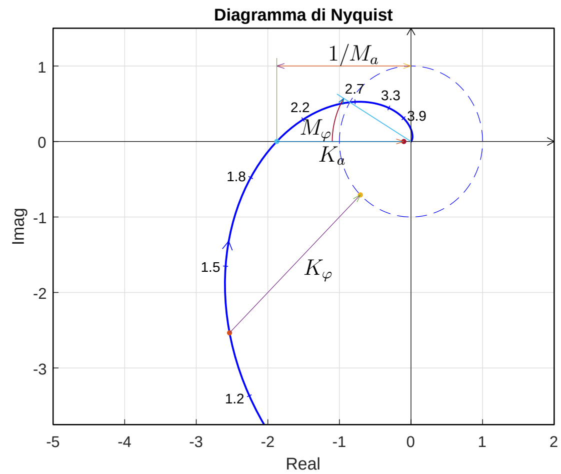
c.4) il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha\,G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 10$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$



$G_2(j\omega)$



	$G_1(j\omega)$	$G_2(j\omega)$
c.1)	$M_a = 4.08$ db $= 1.6$	$M_a = 0.533$
c.2)	$M_\varphi = 15.6$	$M_\varphi = -31.3$
c.3)	$K_\varphi = -6.01$ db $= 0.5$	$K_\varphi = 0.279$
c.4)	$K_a = -15.9$ db $= 0.16$	$K_a = 0.0533$

d) Sia dato il seguente sistema ad anello aperto:

$$r(t) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{20\,(s+0.3)\,(s-2)}{s\,(s^2+8\,s+400)}} \longrightarrow y(t)$$

d.1) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{-0.03}{s} = \frac{K}{s}, \qquad G_\infty(s) = \frac{20}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{3\,\pi}{2}, \qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.3$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 20$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.3} = 0.1 = -20 \text{ db}, \qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=20} = 1 = 0 \text{ db}.$$

Coefficienti di smorzamento dei poli complessi coniugati: $\delta_1 = 0.2$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

d.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 3. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = \frac{10}{3} + \frac{1}{-2} - \frac{8}{400} = 2.813 > 0.$$

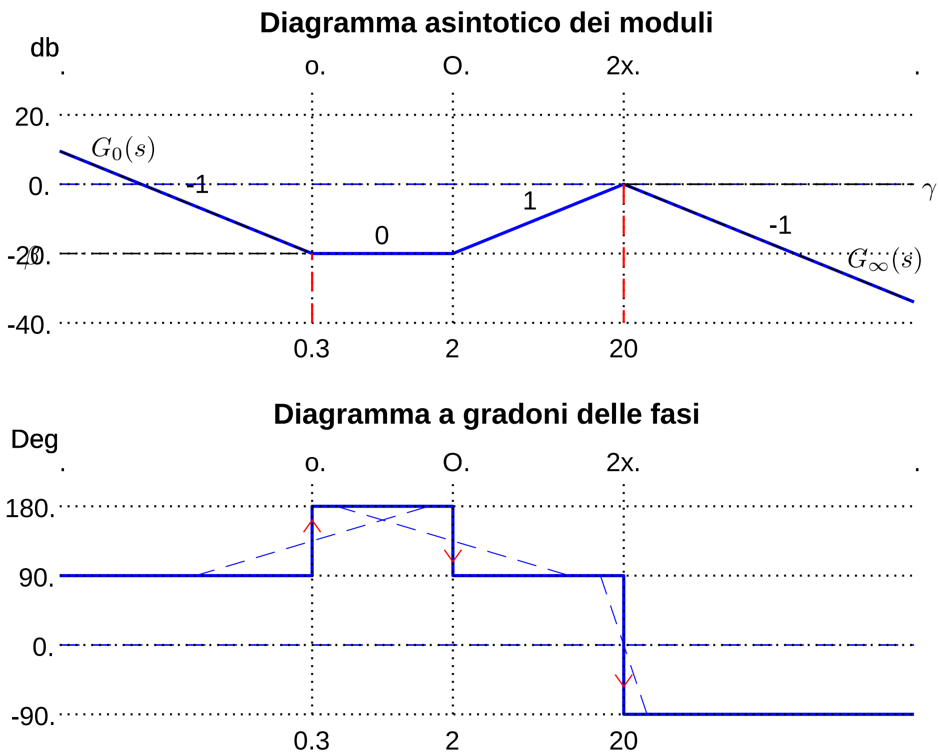


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

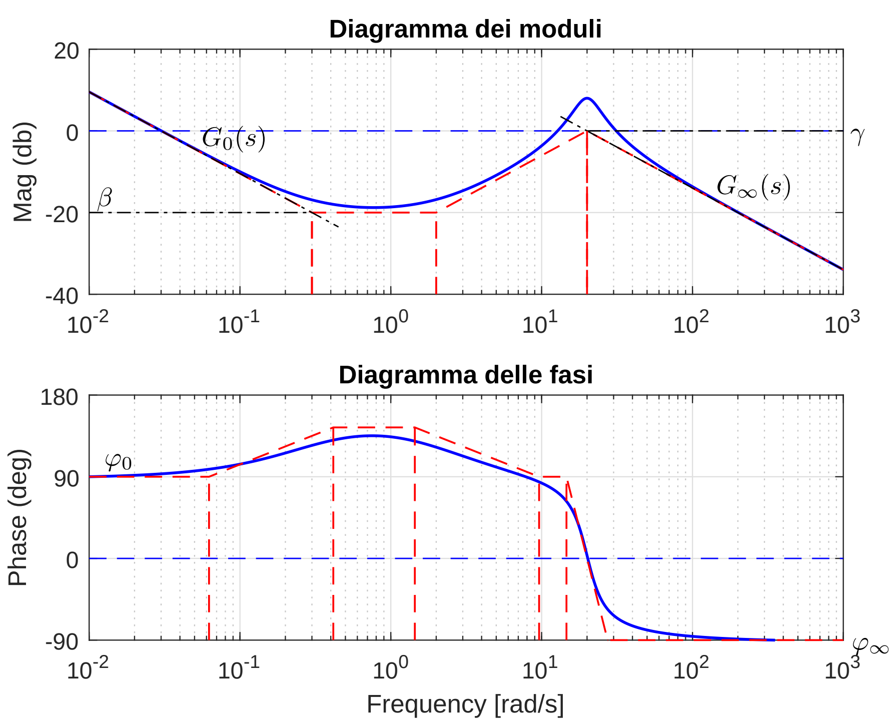


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

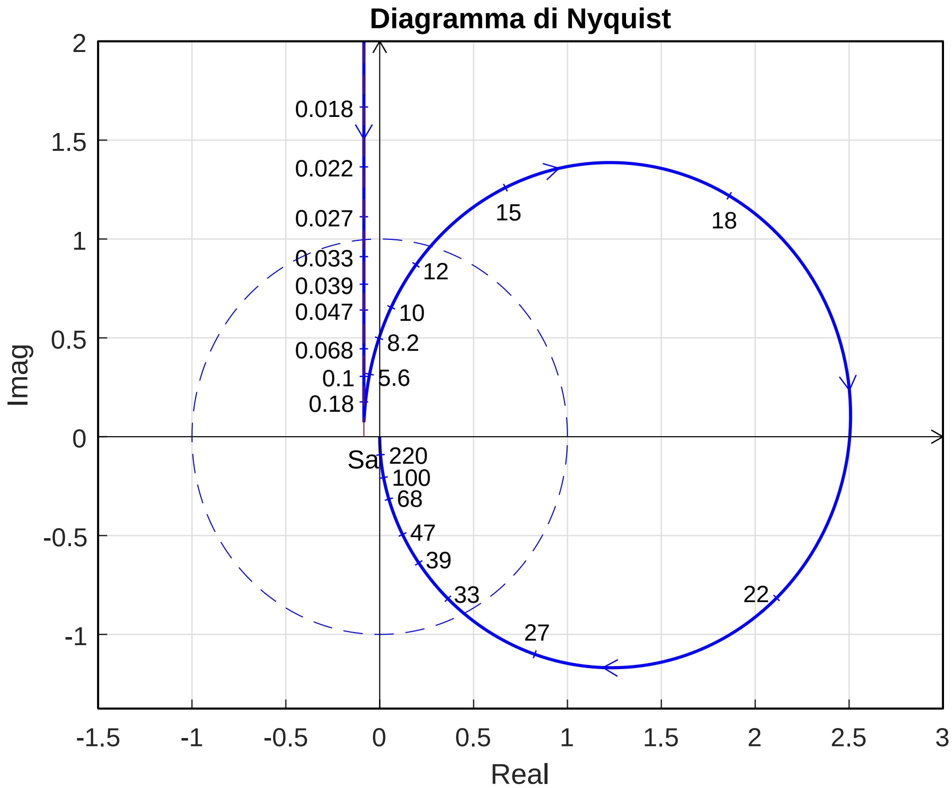


Figura 3: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto. La posizione dell'asintoto è la seguente:

$$\sigma_a = K\Delta_\tau = -0.03 \cdot (2.8133) = -0.0844.$$

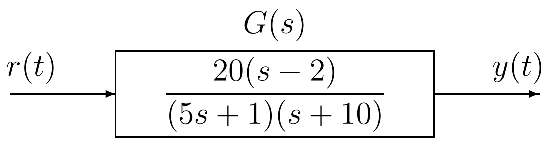
Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \pi = -\pi.$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $-\pi$ in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p del sistema è positiva:

$$\Delta_p = -0.3 + 2 + 8 = 9.7 > 0.$$

e) Sia dato il seguente sistema ad anello aperto:



e.1) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = -4, \qquad G_\infty(s) = \frac{4}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\pi, \qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

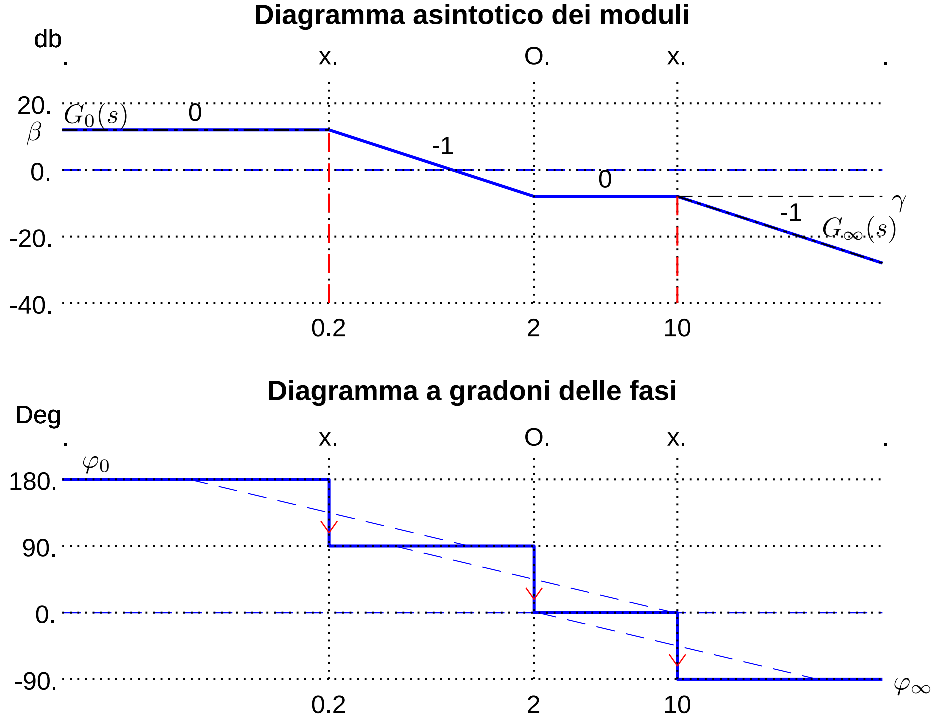


Figura 4: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.2$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.2} = 4 = 12.04 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = 0.4 = -7.959 \text{ db}.$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

e.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 6. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\pi$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è negativa:

$$\Delta\tau = \frac{1}{-2} - 5 - \frac{1}{10} = -5.6 < 0.$$

Il sistema è di tipo 0 per cui nel diagramma di Nyquist non è presente nessun asintoto. Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = -\pi$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\,\pi}{2}.$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $-\frac{3\pi}{2}$ in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p del sistema è positiva:

$$\Delta_p = 2 + 0.2 + 10 = 12.2 > 0.$$

e.3) Disegnare l'andamento qualitativo $y(t)$ della risposta al gradino unitario del sistema $G(s)$.

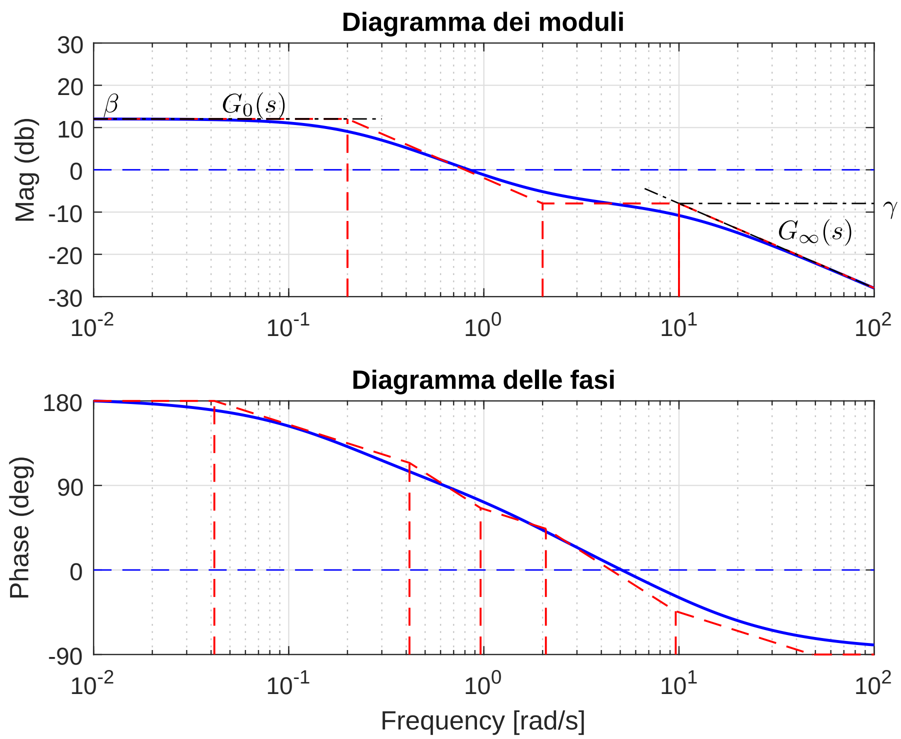


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

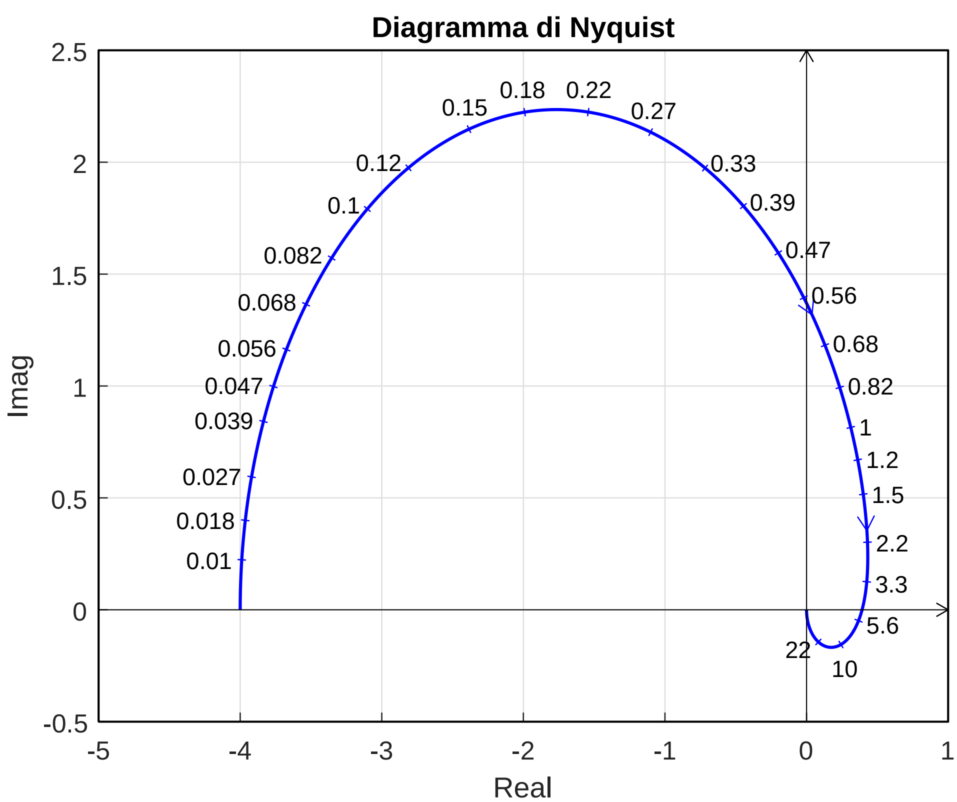


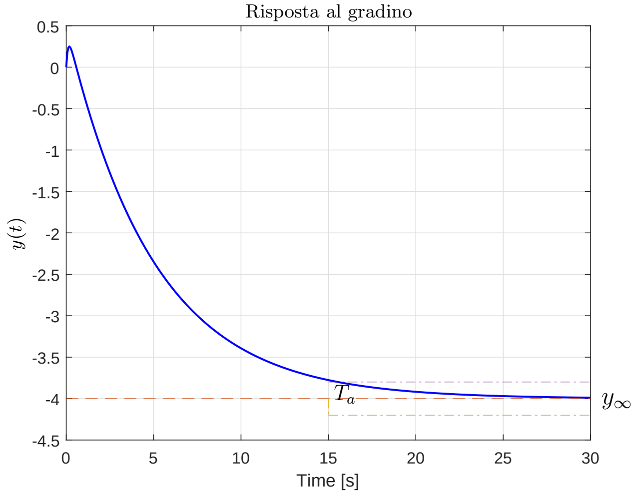
Figura 6: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

Valore a regime y_∞ per $t \to \infty$:

$$y_\infty = -4,$$

Tempo di assestamento T_a:

$$T_a \simeq 15\,\mathrm{s},$$

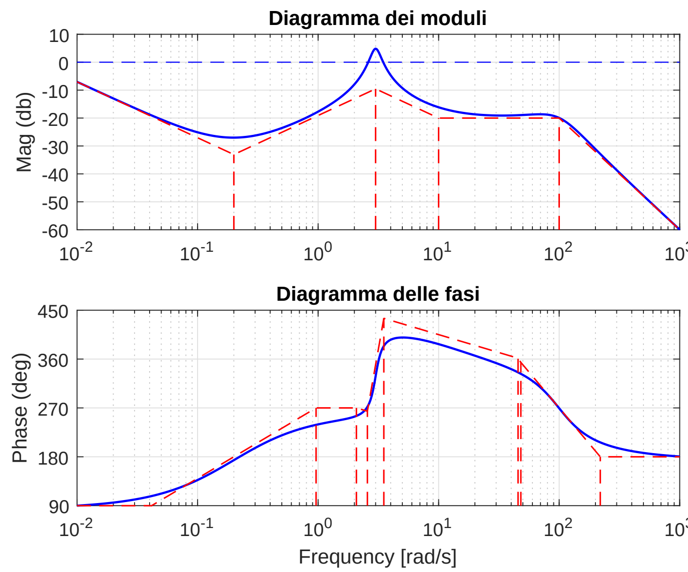


f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{1000\,(s-10)\,(s+0.2)^2}{s\,(s^2-0.6\,s+9)\,(s^2+100\,s+10000)}$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.



Soluzione. La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{1000\,(s-10)\,(s+0.2)^2}{s\,(s^2-0.6\,s+9)\,(s^2+100\,s+10000)}$$

Il valore $K = 1000$ puó essere calcolato in due modi diversi:

1) calcolando il modulo β dell'approssimante $G_0(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.2$:

$$|G_0(s)|_{s=0.2\,j} = \left|\frac{-4.444\cdot 10^{-6}\,K}{s}\right|_{s=0.2\,j} = \frac{4.444\cdot 10^{-6}\,K}{0.2} = \beta \simeq -33.1 \text{ db} \simeq 0.0222 \quad\Rightarrow\quad K \simeq 1000.$$

2) calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 100$:

$$|G_\infty(s)|_{s=100\,j} = \left|\frac{K}{s^2}\right|_{s=100\,j} = \frac{K}{100^2} = \gamma \simeq -20 \text{ db} \simeq 0.1 \qquad\to\qquad K \simeq 1000.$$

I coefficienti di smorzamento δ delle coppie di poli o zeri complessi coniugati presenti all'interno della funzione G(s) sono i seguenti:

$$\begin{array}{lclcl}
(s^2-0.6\,s+3^2) & \to & M_{\omega_n} \simeq 14 \text{ db} = 5 & \to & \delta = \frac{1}{2\,M_{\omega_n}} \simeq 0.1\\
(s^2+100\,s+100^2) & \to & M_{\omega_n} \simeq 0 \text{ db} = 1 & \to & \delta = \frac{1}{2\,M_{\omega_n}} \simeq 0.5\\
(s^2+0.4\,s+0.2^2) & \to & M_{\omega_n} \simeq -6.02 \text{ db} = 0.5 & \to & \delta = \frac{1}{2\,M_{\omega_n}} \simeq 1
\end{array}$$

I valori M_{ω_n} si leggono sul diagramma di Bode dei moduli come distanza tra il diagramma asintotico e il diagramma reale alla pulsazione ω_n.

Controlli Automatici - Prima parte

7 Novembre 2024 - Domande

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

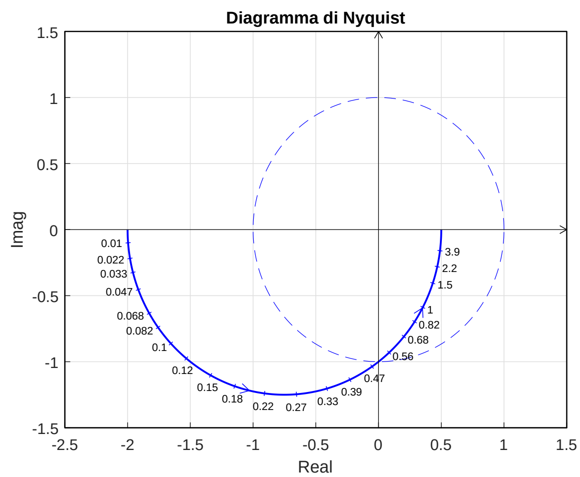
1. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente l'equazione differenziale:

$$\ddddot{y}+2\,\dddot{y}+3\,\ddot{y}+5\,\dot{y}+4\,y=3\,\ddot{x}+2\,\dot{x}+5\,x \qquad \rightarrow \qquad G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{3\,s^2+2\,s+5}{s^4+2\,s^3+3\,s^2+5\,s+4}$$

2. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $G(s)=\frac{2(s+1)}{(4s-1)}$.

Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

- ◯ $-\frac{1}{2}<K<2$;
- ◯ $-2<K<\frac{1}{2}$;
- ◯ $(K<-\frac{1}{2})\cup(K>2)$;
- ⊗ $(K<-2)\cup(K>\frac{1}{2})$;



3. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale $x(t)$:

$$x(t)=8+10\sin(4\,t) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{18}{(s+3)^2}} \longrightarrow y(t)\simeq 16+7.2\sin(4\,t-2\arctan\tfrac{4}{3})$$

4. Completare la seguente formulazione del criterio di Nyquist (quella valida anche per sistemi instabili ad anello aperto).

<u>Criterio di Nyquist.</u> Nell'ipotesi che la funzione $F(s)$ *non presenti poli immaginari, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio*"

condizione ◯ *solo necessaria* ◯ *solo sufficiente* ⊗ *necessaria e sufficiente*

affinché "*il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile*"
è che "*il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ circondi il punto critico $-1+j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $F(s)$ con parte reale positiva.*

5. In un sistema del 2^o ordine privo di zeri, la distanza del poli dall'origine (a parità di direzione) influisce sui seguenti parametri della risposta al gradino

- ⊗ pulsazione naturale ω_n
- ◯ massima sovaelongazione $S\%$
- ◯ coefficiente di smorzamento δ
- ⊗ tempo di assestamento T_a

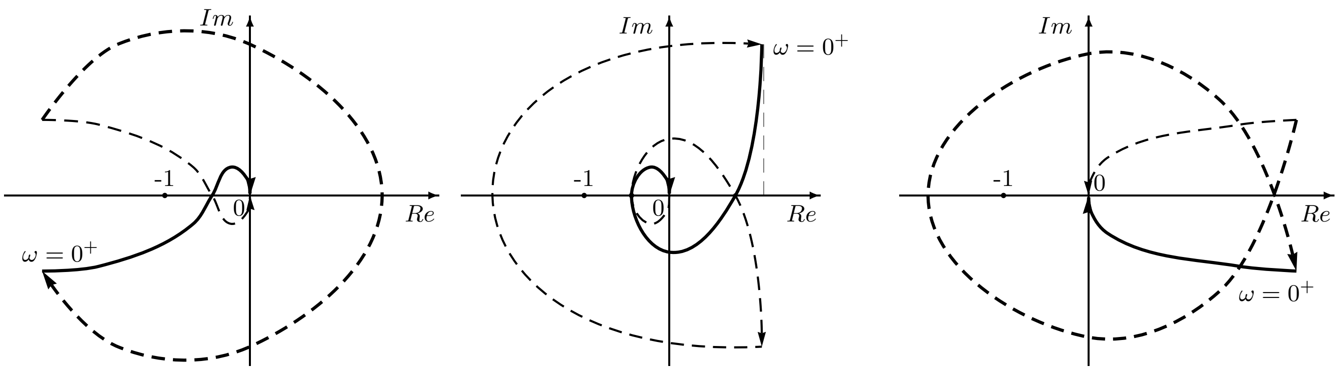
6. Calcolare i parametri a e b della funzione di trasferimento $G(s)=\frac{a}{s+b}$ caratterizzata da un guadagno statico $G(0)=6$ e da un tempo di assestamento $T_a=0.3$ s alla risposta al gradino:

$$G(s)=\frac{a}{s+b} \qquad \rightarrow \qquad a=60, \qquad\qquad b=10.$$

7. La pulsazione di risonanza ω_R di un sistema del 2° ordine privo di zeri è:

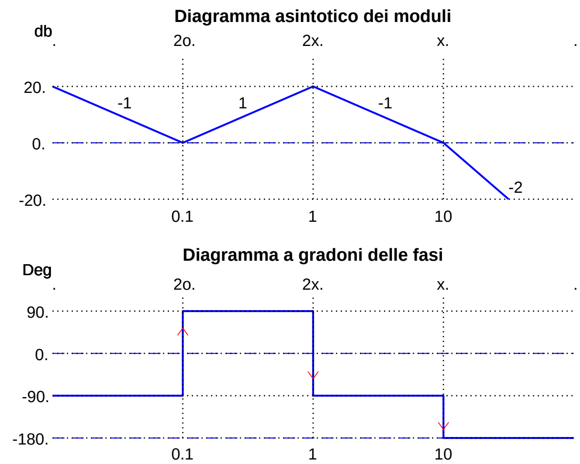
○ $\omega_R = \omega_n \delta \sqrt{1-\delta^2}$ ○ $\omega_R = \omega_n \delta \sqrt{1-2\delta^2}$ ○ $\omega_R = \omega_n \sqrt{1-\delta^2}$ ⊗ $\omega_R = \omega_n \sqrt{1-2\delta^2}$

8. Chiudere all'infinito i seguenti diagrammi di Nyquist. Nota: i diagrammi di Nyquist fanno riferimento a sistemi con tutti i poli a parte reale negativa eccezion fatta per un polo semplice o doppio nell'origine.



9. Si faccia riferimento al diagramma asintotico di Bode dei moduli riportato a fianco, relativo ad un sistema $G(s)$ a fase minima.

Utilizzando in modo qualitativo la formula di Bode, calcolare in modo approssimato l'andamento a gradoni del diagramma di Bode delle fasi del sistema $G(s)$.

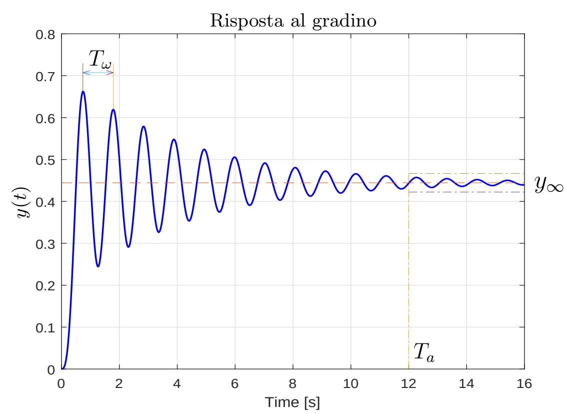


10. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{100(10+0.5s)(s^2+12s+400)}{(5s+25)(0.2s+5)(s^2+20s+200)(\mathbf{s^2+0.5s+36})}$$

Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$$y_\infty = 0.44, \qquad T_a \simeq \frac{3}{0.25} = 12\,\mathrm{s}, \qquad T_\omega \simeq \frac{2\pi}{6} = 1.05.$$



11. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(s-4)(5\,s+2)}{s(s+3)}\, e^{-2\,s} \quad \to \quad \begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2+16}\sqrt{25\omega^2+4}}{\omega\sqrt{\omega^2+9}} \\ \varphi(\omega) = \pi - \arctan\frac{\omega}{4} + \arctan\frac{5\omega}{2} - \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\omega}{3} - 2\,\omega \end{cases}$$