Controlli Automatici - Prima parte
6 Novembre 2025 - Esercizi - INFO

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = (3 + 2\,e^{-5t})\sin(6t), \qquad x_2(t) = (6 + 2\,t^3)\,e^{-2\,t}$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{18}{s^2+6^2} + \frac{12}{(s+5)^2+6^2}, \qquad X_2(s) = \frac{6}{(s+2)} + \frac{12}{(s+2)^4}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

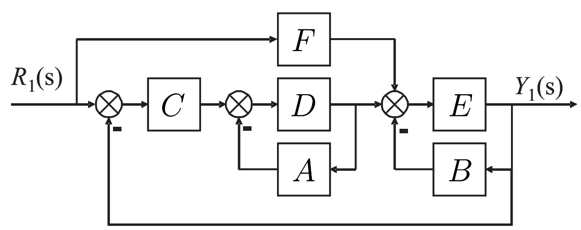
$$G_1(s) = \frac{30}{s(s+2)(s+5)} \qquad G_2(s) = 2 + \frac{6}{(s+5)^3}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = 3 - 5\,e^{-2\,t} + 2\,e^{-5\,t}, \qquad g_2(t) = 2\,\delta(t) + 3\,t^2 e^{-5\,t}$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y_1(s)}{R_1(s)}$:

$$G(s) = \frac{C\,D\,E + F\,E\,(1{+}D\,A)}{1 + D\,A + E\,B + C\,D\,E + D\,A\,E\,B}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;

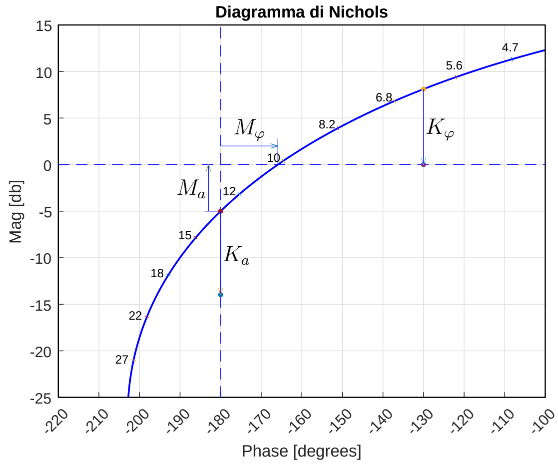
c.2) il margine di fase M_φ del sistema;

c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\,G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 50$;

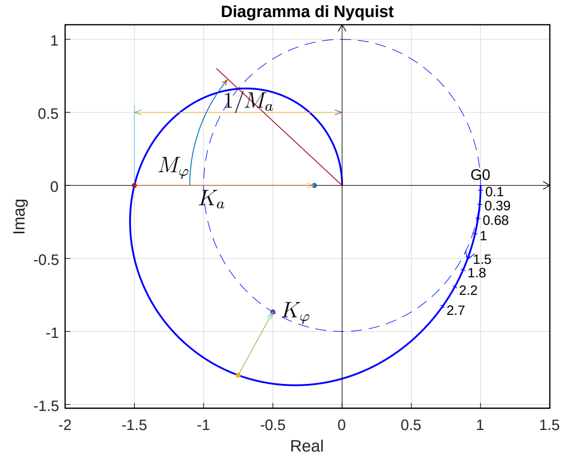
c.4) il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha\,G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 5$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$



$G_2(j\omega)$



c.1) $M_a = 5$ db $= 1.78$

c.2) $M_\varphi = 14.1$

c.3) $K_\varphi = -8.11$ db $= 0.393$

c.4) $K_a = -8.98$ db $= 0.356$

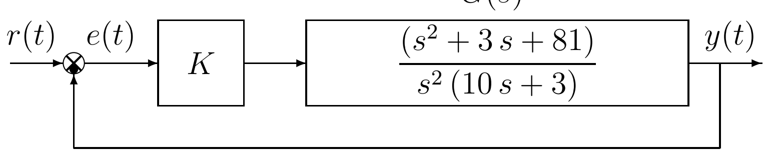
c.1) $M_a = 0.667$

c.2) $M_\varphi = -41.4$

c.3) $K_\varphi = 0.667$

c.4) $K_a = 0.133$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione. I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{27}{s^2}, \qquad G_\infty(s) = \frac{0.1}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\pi, \qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.3$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 9$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.3} = 300 = 49.54 \text{ db}, \qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=9} = 0.01111 = -39.08 \text{ db}.$$

Coefficienti di smorzamento degli zeri complessi coniugati: $\delta_1 = 0.16667$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

d.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale.

Soluzione.

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 3. La fase iniziale del sistema

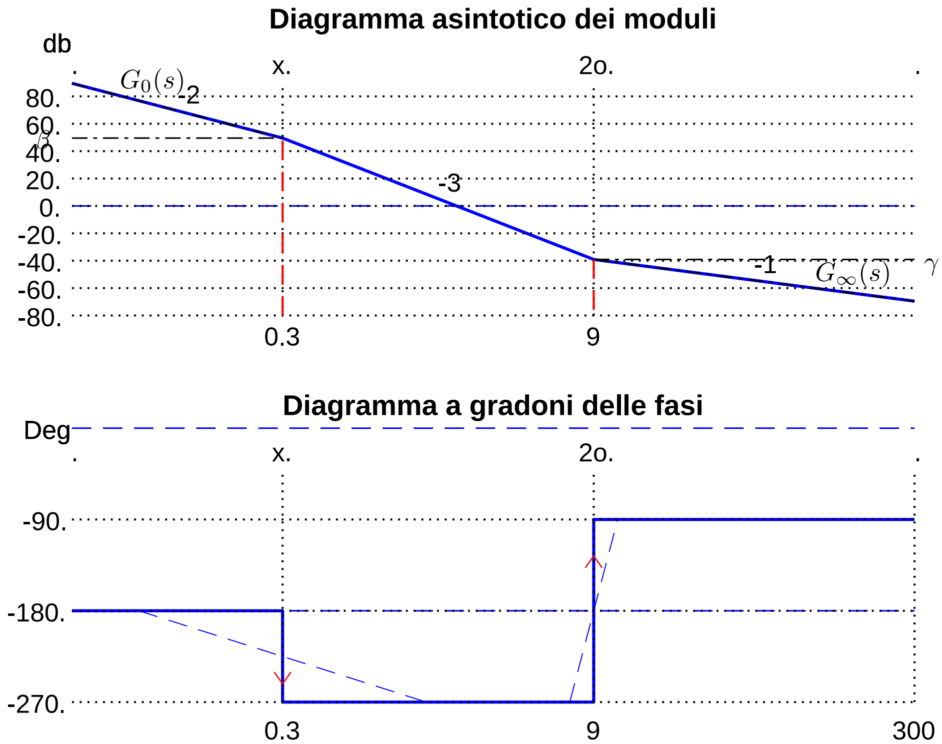


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

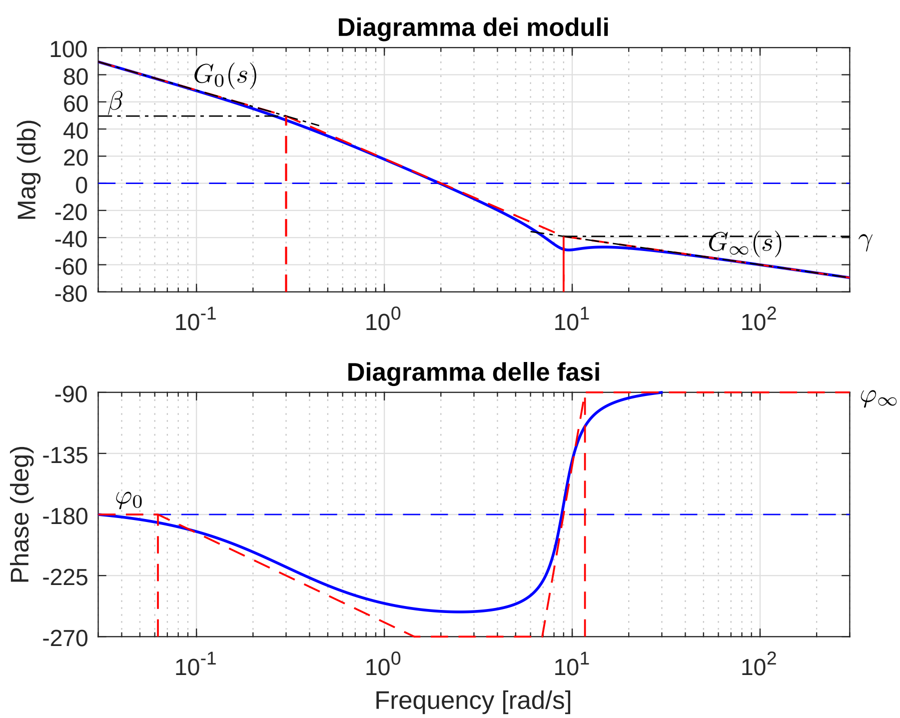


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

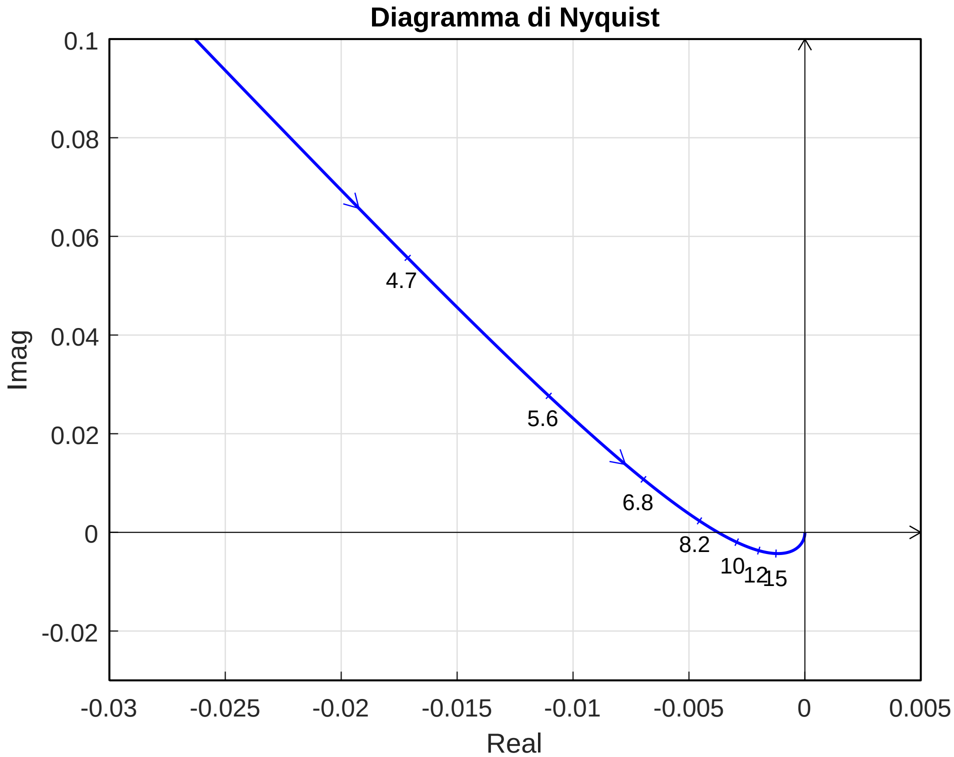


Figura 3: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

è $\varphi_0 = -\pi$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è negativa:

$$\Delta\tau = \frac{3}{81} - \frac{10}{3} = -3.296 < 0.$$

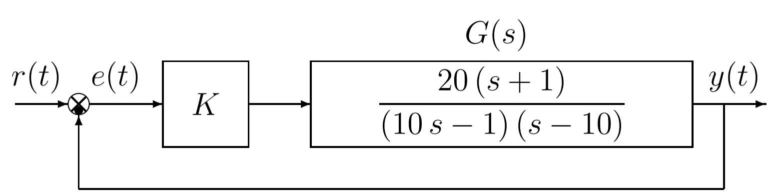
Il sistema è di tipo 2 per cui nel diagramma di Nyquist non è presente nessun asintoto. Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = -\pi$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0,\ \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p del sistema è negativa:

$$\Delta_p = -3 + 0.3 = -2.7 < 0.$$

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = 2, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{2}{s}.$$

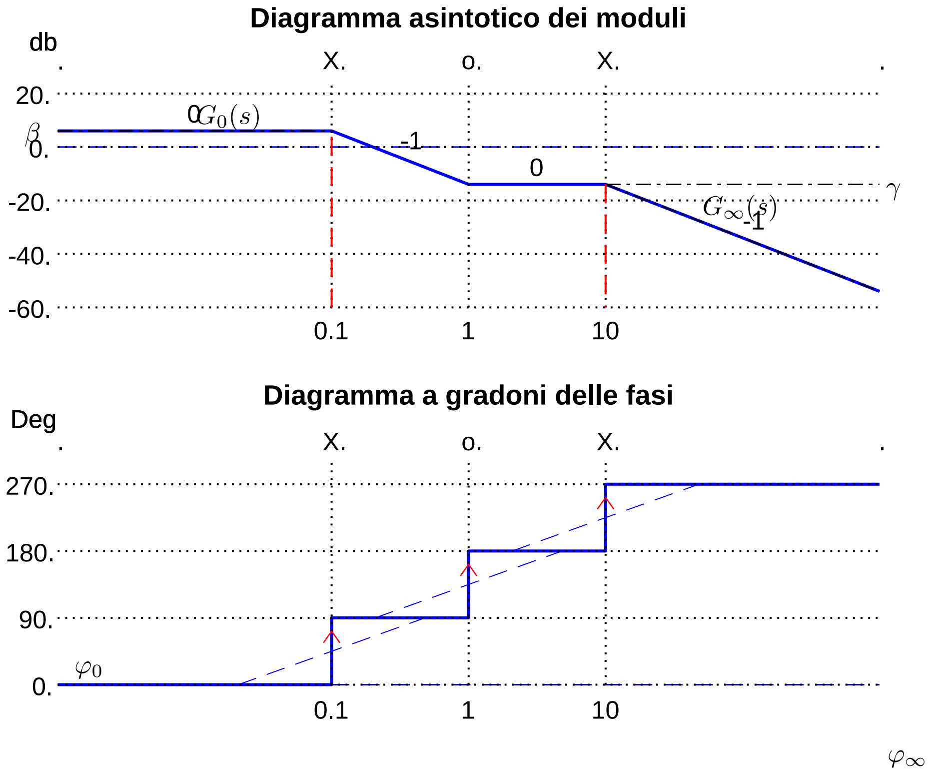


Figura 4: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = 0, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.1} = 2 = 6.021 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = 0.2 = -13.98 \text{ db}.$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

e.2) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 6. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = 0$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = 1 - \frac{10}{-1} - \frac{1}{-10} = 11.1 > 0.$$

Il sistema è di tipo 0 per cui nel diagramma di Nyquist non è presente nessun asintoto. Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = 0$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\,\pi}{2}.$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $\frac{3\pi}{2}$ in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p del sistema è negativa:

$$\Delta_p = -1 - 0.1 - 10 = -11.1 < 0.$$

f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrata in figura.

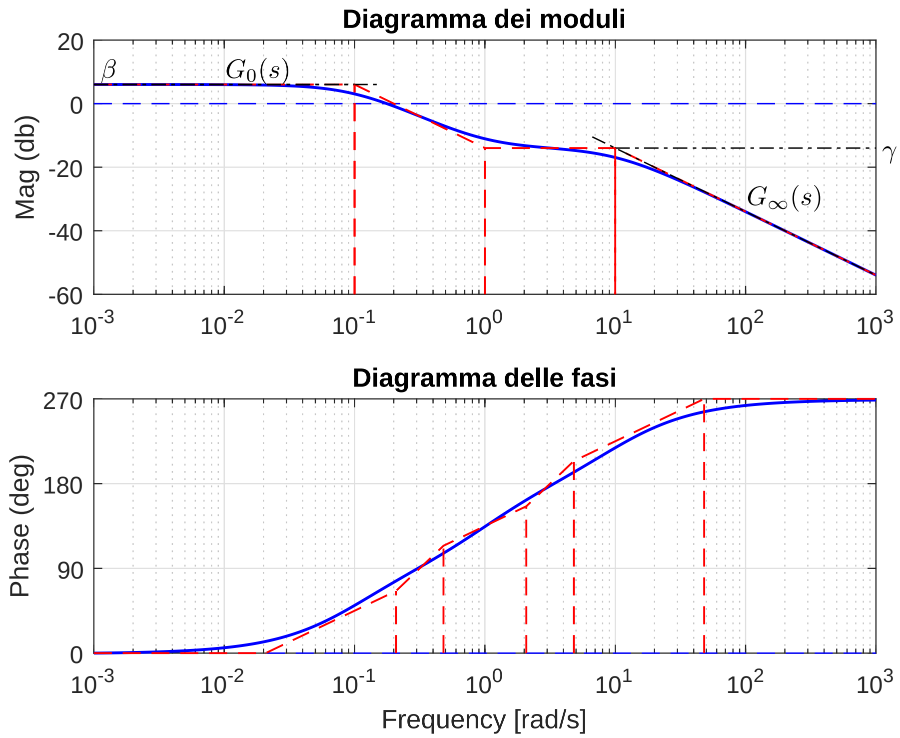


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

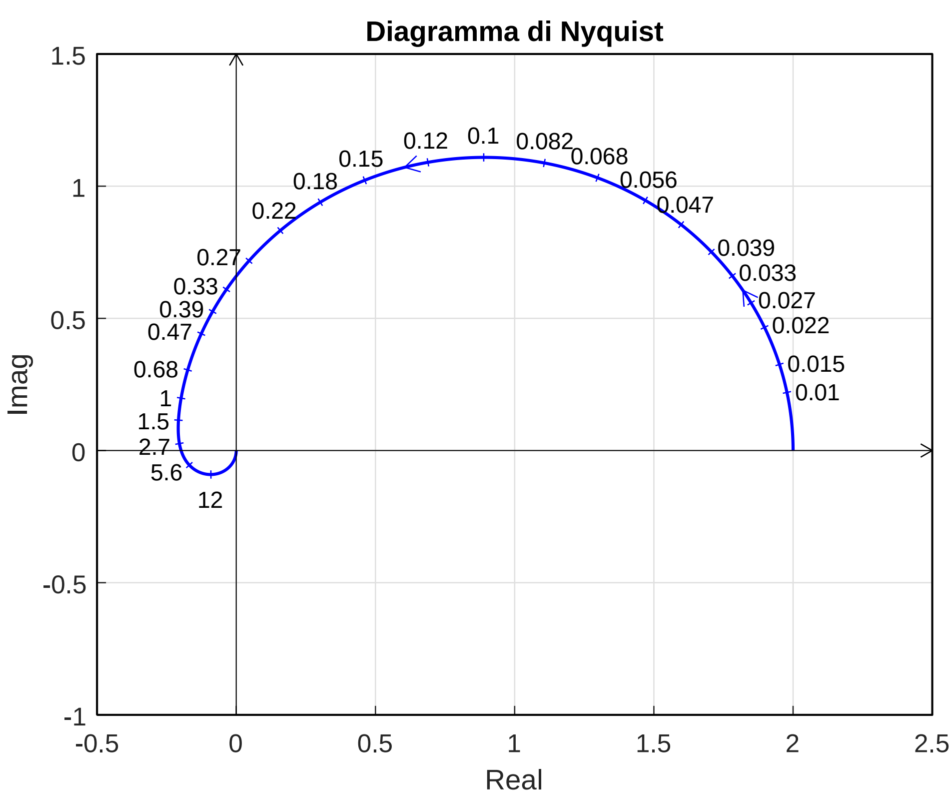
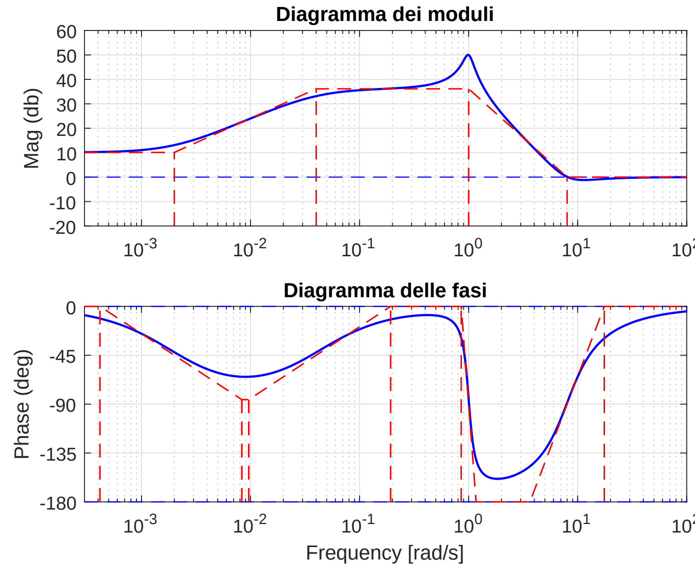


Figura 6: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.



$$G(s) = \frac{(s - 0.002)\,(s^2 + 8\,s + 64)}{(s - 0.04)\,(s^2 + 0.2\,s + 1)}$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.

Soluzione. La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{(s - 0.002)\,(s^2 + 8\,s + 64)}{(s - 0.04)\,(s^2 + 0.2\,s + 1)}$$

Il valore $K = 1$ puó essere calcolato in due modi diversi:

1) calcolando il modulo β dell'approssimante $G_0(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.002$:

$$|G_0(s)|_{s=0.002\,j} = |3.2\,K|_{s=0.002\,j} = 3.2\,K = \beta \simeq 10.1 \text{ db} \simeq 3.2 \qquad \Rightarrow \qquad K \simeq 1.$$

2) calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 8$:

$$|G_\infty(s)|_{s=8\,j} = |K|_{s=8\,j} = K = \gamma \simeq 0 \text{ db} \simeq 1 \qquad \rightarrow \qquad K \simeq 1.$$

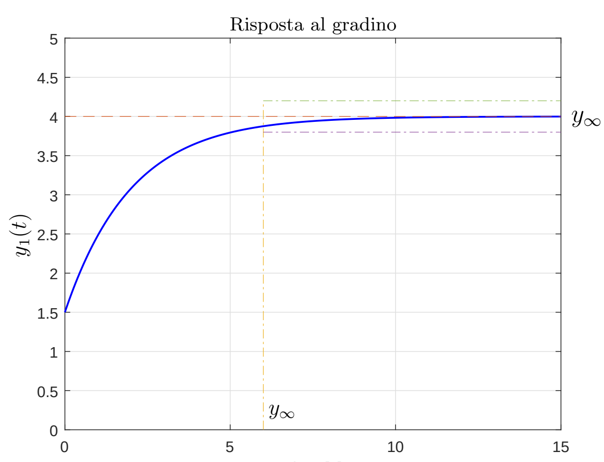
I coefficienti di smorzamento δ delle coppie di poli o zeri complessi coniugati presenti all'interno della funzione G(s) sono i seguenti:

$$\begin{array}{lclclcl}
(s^2 + 0.2\,s + 1^2) & \rightarrow & M_{\omega_n} \simeq 14 \text{ db} = 5 & \rightarrow & \delta = \frac{1}{2\,M_{\omega_n}} \simeq 0.1 \\
(s^2 + 8\,s + 8^2) & \rightarrow & M_{\omega_n} \simeq 0 \text{ db} = 1 & \rightarrow & \delta = \frac{1}{2\,M_{\omega_n}} \simeq 0.5
\end{array}$$

I valori M_{ω_n} si leggono sul diagramma di Bode dei moduli come distanza tra il diagramma asintotico e il diagramma reale alla pulsazione ω_n.

g) Utilizzando i teoremi del valore iniziale e del valore finale, disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{3\,s + 4}{2\,s + 1}$$



Calcolare il valore iniziale y_0, il valore finale y_∞ e il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$:

$$y_0 = 1.5, \qquad y_\infty \simeq 4\,\text{s}, \qquad T_a \simeq 6\,\text{s}.$$

Controlli Automatici - Prima parte

6 Novembre 2025 - Domande - INFO

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Scrivere, in funzione dei segnali $x(t)$ e $y(t)$, l'equazione differenziale corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

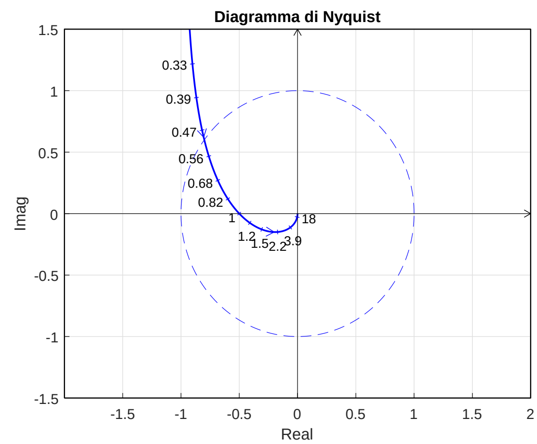
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + 2\,s + 3}{s^4 + 3\,s^3 + 6\,s^2 + \;s + 4} \qquad \rightarrow \qquad \ddddot{y} + 3\,\dddot{y} + 6\,\ddot{y} + \,\dot{y} + 4\,y = \ddot{x} + 2\,\dot{x} + 3\,x$$

2. Sia dato il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \dfrac{0.5(s+1)}{s(s-1)}$.

In base al criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

$$K > K^* = -\frac{1}{-0.5} = 2$$

Calcolare dal grafico, in modo approssimato, i valori limite dell'intervallo di ammissibilità del parametro K.



3. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale $x(t)$:

$$x(t) = 12 + 4\cos(8t) \;\longrightarrow\; \boxed{G(s) = \frac{5}{s+6}} \;\longrightarrow\; y(t) \simeq 10 + 2\cos(8t - \arctan\tfrac{4}{3})$$

4. Enunciare il criterio di Nyquist nella formulazione valida anche per sistemi instabili ad anello aperto. Fornire sia l'ipotesi che la tesi del criterio.

<u>Criterio di Nyquist</u>. Nell'ipotesi che il sistema ad anello aperto non presenti poli immaginari, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ circondi il punto critico $-1+j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $F(s)$ con parte reale positiva.

5. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema del secondo ordine caratterizzato da un guadagno statico $G(0) = 3$, da una pulsazione naturale $\omega_n = 4$ e da un tempo di assestamento $T_a = 2$ s alla risposta al gradino:

$$G(s) = \frac{48}{s^2 + 3\,s + 16}.$$

6. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $3\dot{y}(t) + 2\,y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = 4$. Applicando la trasformata di Laplace si ha:

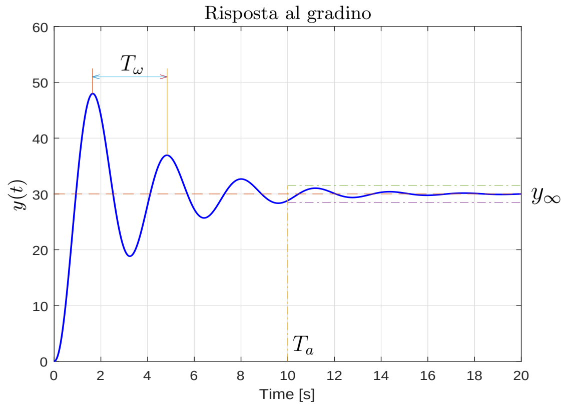
$$3\,(s\,Y(s) - 4) + 2\,Y(s) = 0 \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{4}{s + 0.666} \quad \rightarrow \quad y(t) = 4\,e^{-0.666\,t}.$$

7. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{20(12+s)(3s+30)}{(2s+12)(0.4s+5)(\mathbf{s^2+0.6s+4})}$$

Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$$y_\infty = 30, \qquad T_a \simeq 10\,\mathrm{s}, \qquad T_\omega \simeq \frac{2\pi}{2} \simeq 3.14\,\mathrm{s}.$$



8. In un sistema del 2^o ordine la distanza del poli dall'origine (a parità di direzione) influisce sui seguenti parametri della risposta al gradino

⊗ tempo di ritardo
⊗ tempo di salita
○ coefficiente di smorzamento
⊗ tempo di assestamento

9. Un sistema caratterizzato da funzione di trasferimento $G(s)$ è asintoticamente stabile se:

○ tutti i modi temporali di $G(s)$ rimangono limitati per $t \to \infty$
○ almeno un modo temporale di $G(s)$ tende a zero per $t \to \infty$
⊗ tutti i modi temporali di $G(s)$ tendono a zero per $t \to \infty$
○ la $G(s)$ non presenta modi temporali

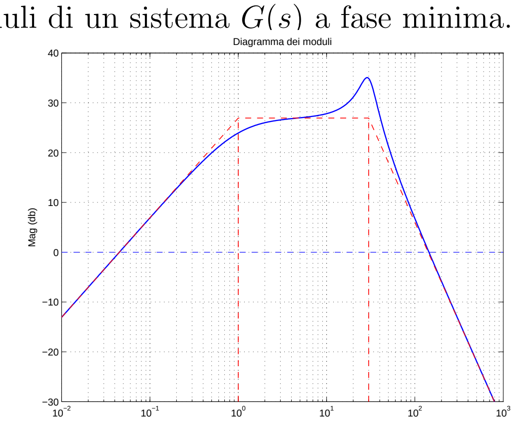
10. Dato uno schema a blocchi caratterizzato da un ingresso X e da un'uscita Y, scrivere la formula di Mason per calcolare la funzione di trasferimento $G = \frac{Y}{X}$:

$$G = \frac{Y}{X} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i \in \mathcal{P}} P_i\, \Delta_i$$

11. Si faccia riferimento al diagramma di Bode dei moduli di un sistema $G(s)$ a fase minima.

Utilizzando la formula di Bode, calcolare in modo approssimato la fase φ del sistema $G(s)$ in corrispondenza delle seguenti pulsazioni ω:

$$\omega_1 = 0.04 \quad \to \quad \varphi_1 \simeq \tfrac{\pi}{2}$$
$$\omega_2 = 1 \quad \to \quad \varphi_2 \simeq \tfrac{\pi}{4}$$
$$\omega_3 = 30 \quad \to \quad \varphi_3 \simeq -\tfrac{\pi}{2}$$
$$\omega_4 = 400 \quad \to \quad \varphi_4 \simeq -\pi$$



12. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(s+3)(3\,s+1)}{s(2\,s-1)}\, e^{-3s} \quad \to \quad \begin{cases} M(\omega) = \dfrac{\sqrt{\omega^2+9}\sqrt{9\,\omega^2+1}}{\omega\sqrt{4\,\omega^2+1}} \\ \varphi(\omega) = \arctan\dfrac{\omega}{3} + \arctan 3\omega - 3\,\omega - \dfrac{\pi}{2} - (\pi - \arctan 2\omega) \end{cases}$$