Controlli Automatici - Prima parte
6 Novembre 2025 - Esercizi - ELE

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = (3 + 2\, e^{-5t}) \sin(6t), \qquad\qquad x_2(t) = (6 + 2\, t^3)\, e^{-2\, t}$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{18}{s^2 + 6^2} + \frac{12}{(s+5)^2 + 6^2}, \qquad\qquad X_2(s) = \frac{6}{(s+2)} + \frac{12}{(s+2)^4}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

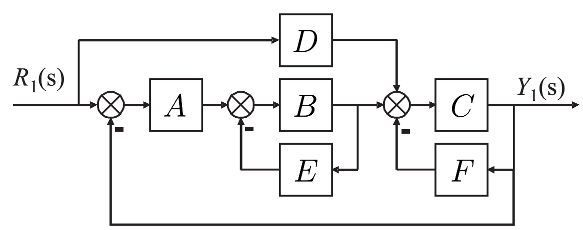
$$G_1(s) = \frac{30}{s(s+2)(s+5)} \qquad\qquad G_2(s) = 2 + \frac{6}{(s+5)^3}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = 3 - 5\, e^{-2\, t} + 2\, e^{-5\, t}, \qquad\qquad g_2(t) = 2\, \delta(t) + 3\, t^2 e^{-5\, t}$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y_1(s)}{R_1(s)}$:

$$G(s) = \frac{A\, B\, C + D\, C\, (1 + B\, E)}{1 + B\, E + C\, F + A\, B\, C + B\, E\, C\, F}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;

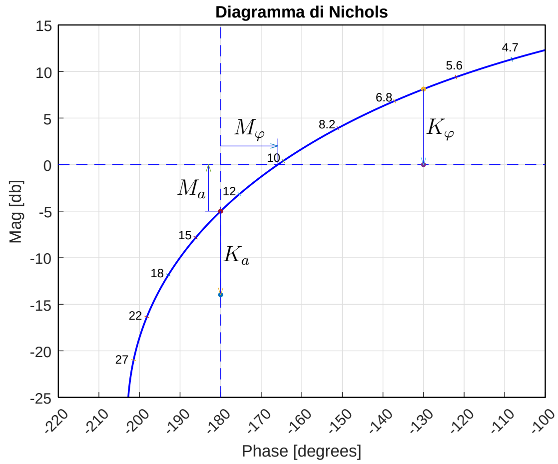
c.2) il margine di fase M_φ del sistema;

c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\, G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 50$;

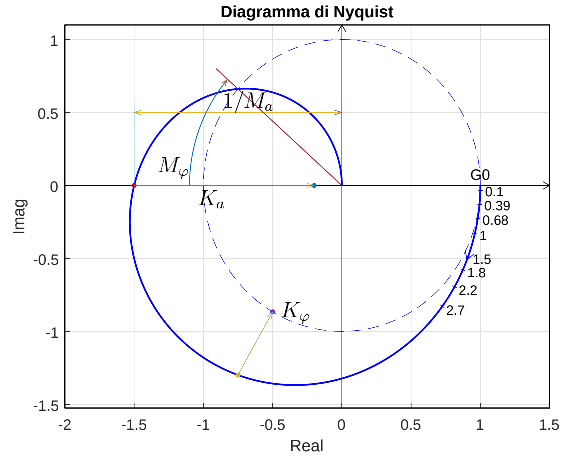
c.4) il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha\, G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 5$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$



$G_2(j\omega)$



c.1) $M_a = 5$ db $= 1.78$

c.2) $M_\varphi = 14.1$

c.3) $K_\varphi = -8.11$ db $= 0.393$

c.4) $K_a = -8.98$ db $= 0.356$

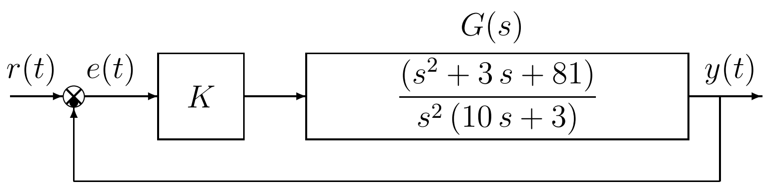
c.1) $M_a = 0.667$

c.2) $M_\varphi = -41.4$

c.3) $K_\varphi = 0.667$

c.4) $K_a = 0.133$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K\,\frac{(s^2+3\,s+81)}{s^2\,(10\,s+3)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad 10s^3 + (K+3)s^2 + 3K s + 81K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 10 & 3K \\ 2 & K+3 & 81K \\ 1 & 3K^2 - 801K & \\ 0 & 81K & \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano positivi si ricavano i seguenti vincoli:

$$K+3>0, \qquad 3K^2 - 801K > 0, \qquad 81K > 0,$$

dai quali si ricava:

$$K > -3, \qquad (K<0) \cup (K > 267), \qquad K > 0.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 267 = K_1.$$

La pulsazione ω_1 corrispondente al valore limite K_1 è:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{81K_1}{K_1+3}} = 8.9499.$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

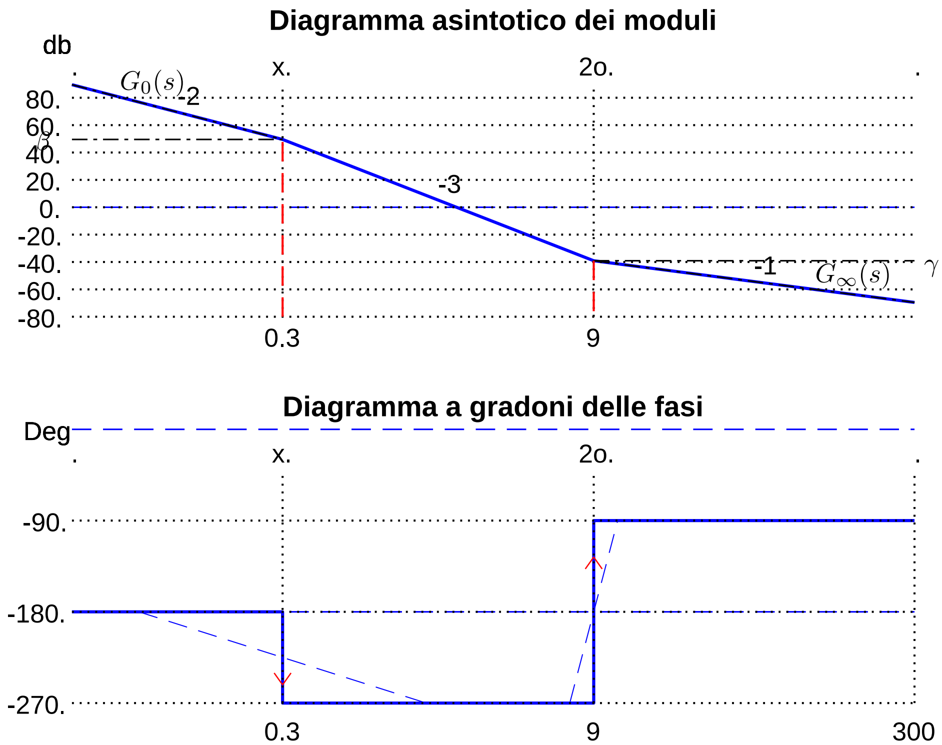


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{27}{s^2}, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{0.1}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\pi, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.3$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 9$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.3} = 300 = 49.54 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=9} = 0.01111 = -39.08 \text{ db}.$$

Coefficienti di smorzamento degli zeri complessi coniugati: $\delta_1 = 0.16667$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 3. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\pi$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è negativa:

$$\Delta\tau = \frac{3}{81} - \frac{10}{3} = -3.296 < 0.$$

Il sistema è di tipo 2 per cui nel diagramma di Nyquist non è presente nessun asintoto. Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = -\pi$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

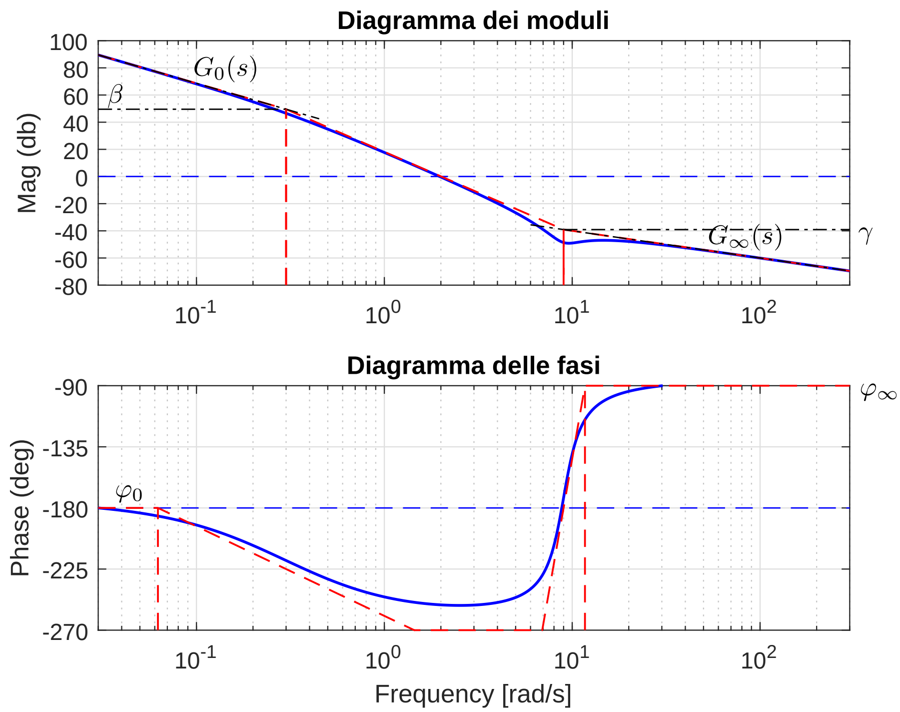


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

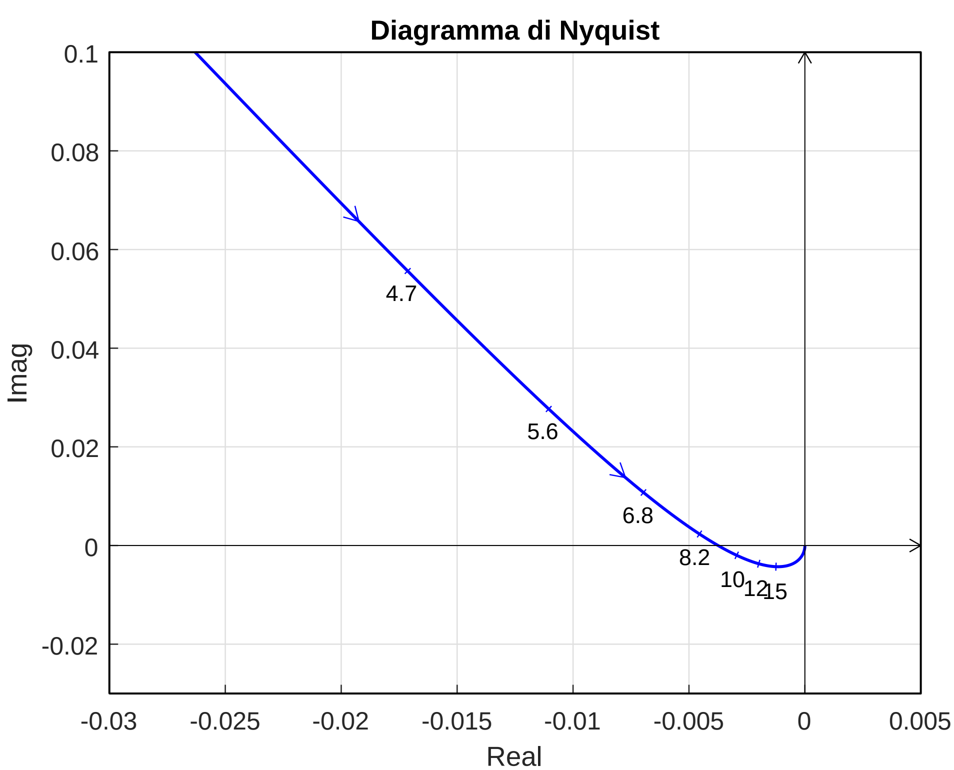
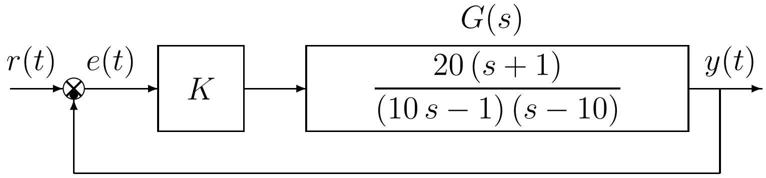


Figura 3: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p del sistema è negativa:

$$\Delta_p = -3 + 0.3 = -2.7 < 0.$$

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K\,\frac{20\,(s+1)}{(10\,s-1)\,(s-10)} = 0 \qquad \to \qquad 10s^2 + (20K-101)s + (20K+10) = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 10 & 20K+10 \\ 1 & 20K-101 & \\ 0 & 20K+10 & \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano positivi si ricavano i seguenti vincoli:

$$20K - 101 > 0, \qquad\qquad 20K + 10 > 0,$$

dai quali si ricava:

$$K > 5.05, \qquad\qquad K > -0.5.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 5.05 = K_1.$$

La pulsazione ω_1 corrispondente al valore limite K_1 è:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{20K_1 + 10}{10}} = 3.3317.$$

e.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

<u>Soluzione</u>.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = 2, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{2}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = 0, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.1} = 2 = 6.021 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = 0.2 = -13.98 \text{ db}.$$

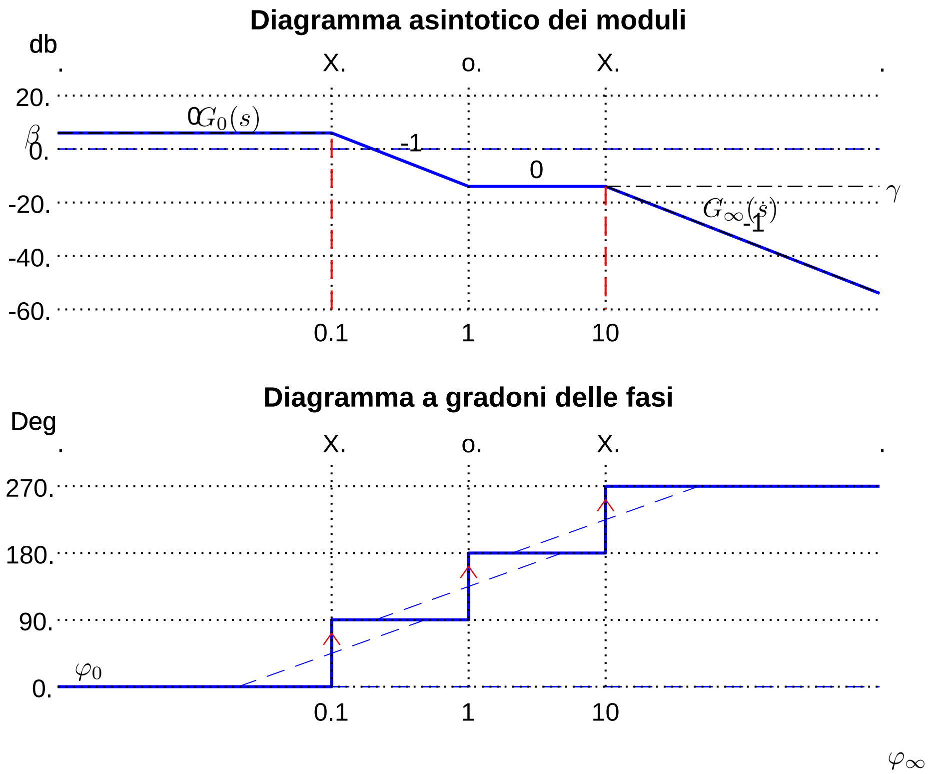


Figura 4: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

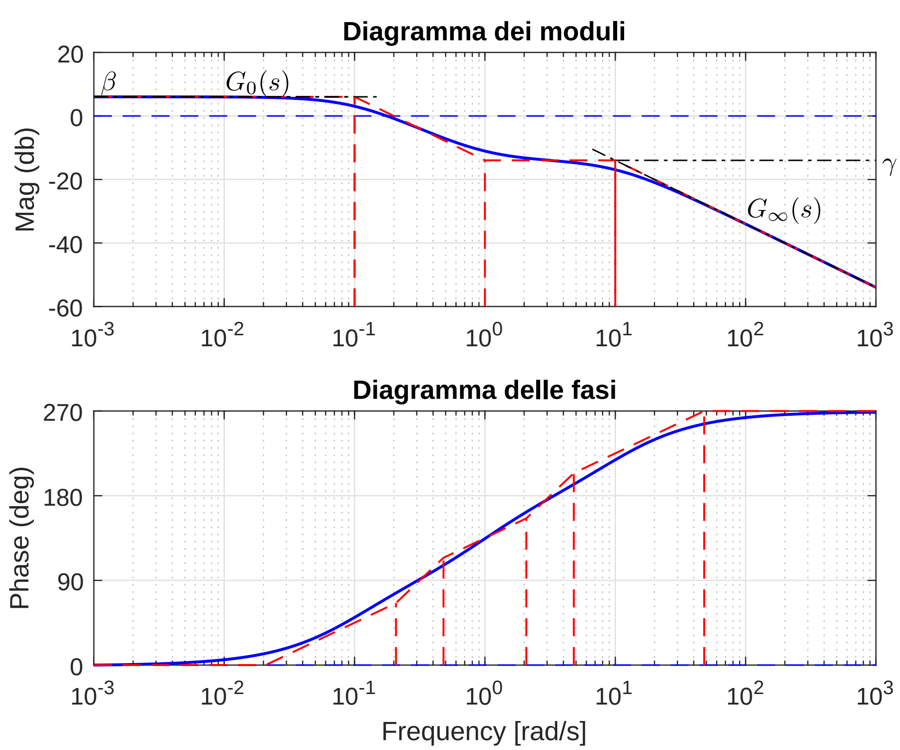


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

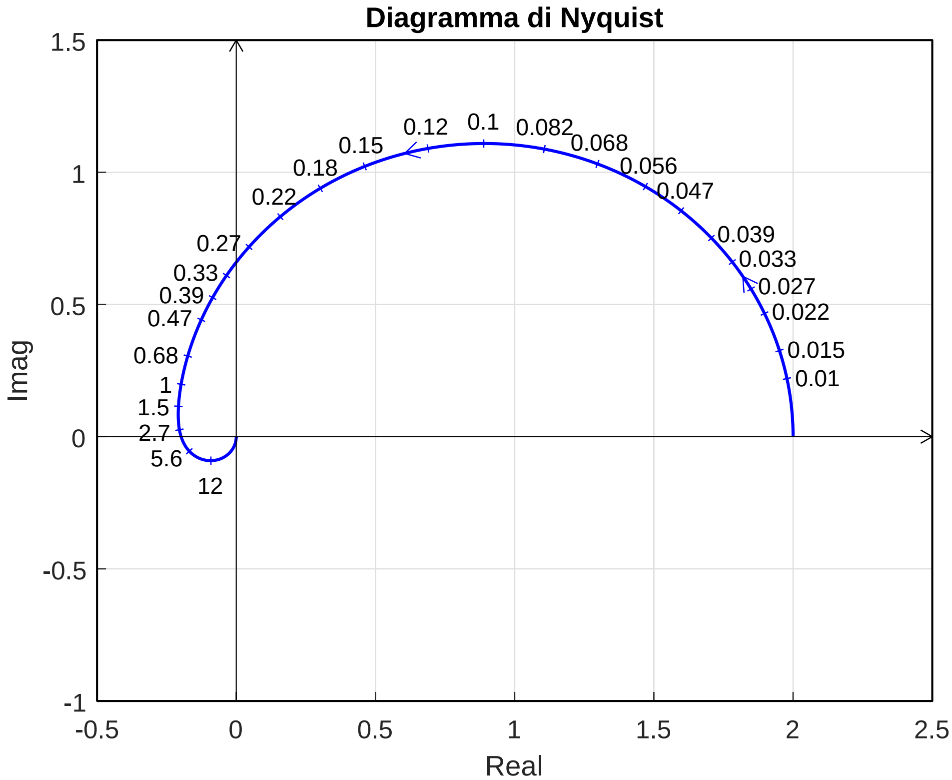


Figura 6: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

e.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 6. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = 0$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = 1 - \frac{10}{-1} - \frac{1}{-10} = 11.1 > 0.$$

Il sistema è di tipo 0 per cui nel diagramma di Nyquist non è presente nessun asintoto. Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = 0$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\,\pi}{2}.$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $\frac{3\pi}{2}$ in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p del sistema è negativa:

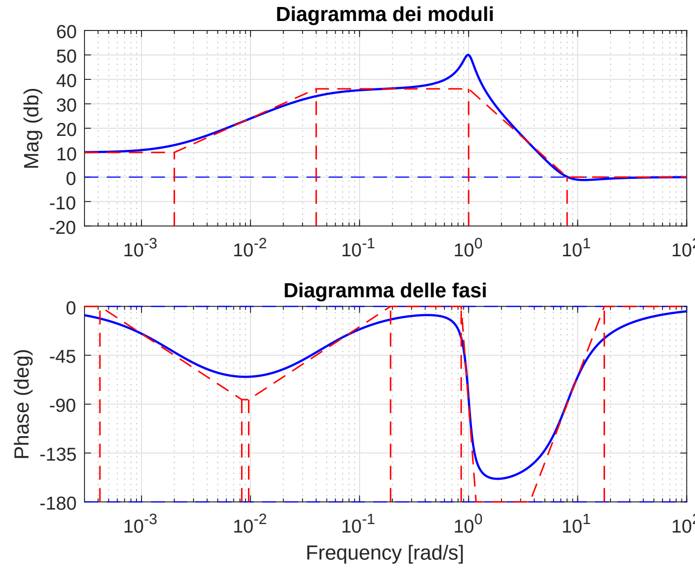
$$\Delta_p = -1 - 0.1 - 10 = -11.1 < 0.$$

f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrata in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{(s-0.002)\,(s^2+8\,s+64)}{(s-0.04)\,(s^2+0.2\,s+1)}$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.



Soluzione. La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{(s-0.002)\,(s^2+8\,s+64)}{(s-0.04)\,(s^2+0.2\,s+1)}$$

Il valore $K=1$ puó essere calcolato in due modi diversi:

1) calcolando il modulo β dell'approssimante $G_0(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.002$:

$$|G_0(s)|_{s=0.002\,j} = |3.2\,K|_{s=0.002\,j} = 3.2\,K = \beta \simeq 10.1 \text{ db} \simeq 3.2 \quad \Rightarrow \quad K \simeq 1.$$

2) calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 8$:

$$|G_\infty(s)|_{s=8\,j} = |K|_{s=8\,j} = K = \gamma \simeq 0 \text{ db} \simeq 1 \qquad \rightarrow \qquad K \simeq 1.$$

I coefficienti di smorzamento δ delle coppie di poli o zeri complessi coniugati presenti all'interno della funzione G(s) sono i seguenti:

$$\begin{array}{lclcl}
(s^2+0.2\,s+1^2) & \rightarrow & M_{\omega_n} \simeq 14 \text{ db} = 5 & \rightarrow & \delta = \frac{1}{2\,M_{\omega_n}} \simeq 0.1 \\
(s^2+8\,s+8^2) & \rightarrow & M_{\omega_n} \simeq 0 \text{ db} = 1 & \rightarrow & \delta = \frac{1}{2\,M_{\omega_n}} \simeq 0.5
\end{array}$$

I valori M_{ω_n} si leggono sul diagramma di Bode dei moduli come distanza tra il diagramma asintotico e il diagramma reale alla pulsazione ω_n.

Controlli Automatici - Prima parte

6 Novembre 2025 - Domande - ELE

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Scrivere, in funzione dei segnali $x(t)$ e $y(t)$, l'equazione differenziale corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

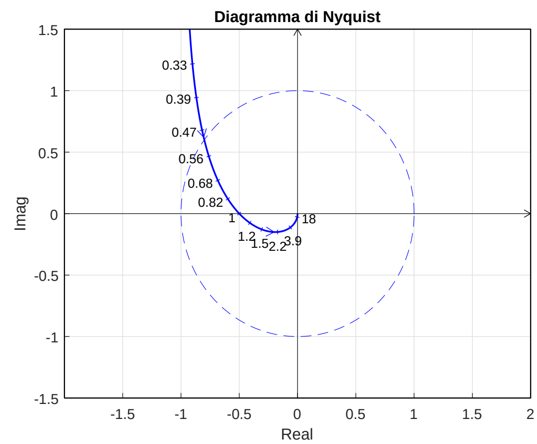
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + 2\,s + 3}{s^4 + 3\,s^3 + 5\,s^2 + 2\,s + 4} \qquad \rightarrow \qquad \ddddot{y} + 3\,\dddot{y} + 5\,\ddot{y} + 2\,\dot{y} + 4\,y = \ddot{x} + 2\,\dot{x} + 3\,x$$

2. Sia dato il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \dfrac{0.5(s+1)}{s(s-1)}$.

In base al criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

$$K > K^* = -\frac{1}{-0.5} = 2$$

Calcolare dal grafico, in modo approssimato, i valori limite dell'intervallo di ammissibilità del parametro K.



3. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale $x(t)$:

$$x(t) = 12 + 4\cos(8t) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{5}{s+6}} \longrightarrow y(t) \simeq 10 + 2\cos(8t - \arctan\tfrac{4}{3})$$

4. Enunciare il criterio di Nyquist nella formulazione valida anche per sistemi instabili ad anello aperto. Fornire sia l'ipotesi che la tesi del criterio.

Criterio di Nyquist. Nell'ipotesi che il sistema ad anello aperto non presenti poli immaginari, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ circondi il punto critico $-1+j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $F(s)$ con parte reale positiva.

5. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema del secondo ordine caratterizzato da un guadagno statico $G(0) = 3$, da una pulsazione naturale $\omega_n = 4$ e da un tempo di assestamento $T_a = 2$ s alla risposta al gradino:

$$G(s) = \frac{48}{s^2 + 3\,s + 16}.$$

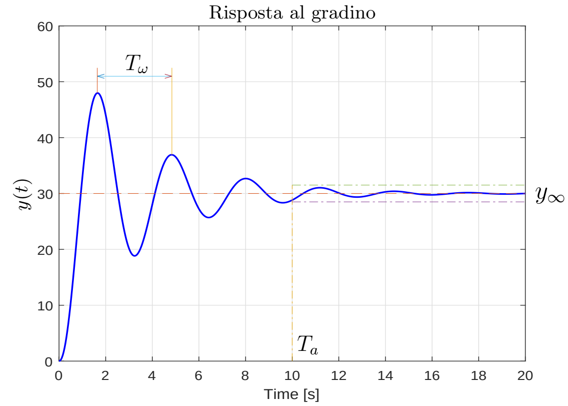
6. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $3\dot{y}(t) + 2\,y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = 4$. Applicando la trasformata di Laplace si ha:

$$3\,(s\,Y(s) - 4) + 2\,Y(s) = 0 \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{4}{s + 0.666} \quad \rightarrow \quad y(t) = 4\,e^{-0.666\,t}.$$

7. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

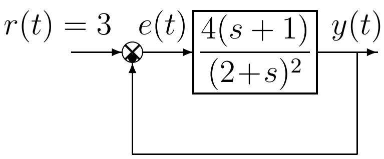
$$G(s) = \frac{20(12+s)(3s+30)}{(2s+12)(0.4s+5)(\mathbf{s^2+0.6s+4})}$$

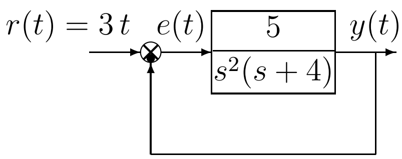
Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

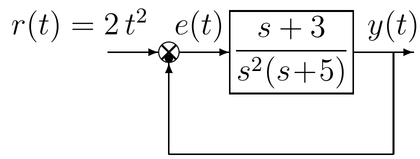


$$y_\infty = 30, \qquad T_a \simeq 10\,\text{s}, \qquad T_\omega \simeq \frac{2\pi}{2} \simeq 3.14\,\text{s}.$$

8. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:







$$e(\infty) = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2} = 1.5 \qquad e(\infty) = 0 \qquad e(\infty) = \frac{4}{\frac{3}{5}} = \frac{20}{3} = 6.66$$

9. Un sistema caratterizzato da funzione di trasferimento $G(s)$ è asintoticamente stabile se:

- ◯ tutti i modi temporali di $G(s)$ rimangono limitati per $t \to \infty$
- ◯ almeno un modo temporale di $G(s)$ tende a zero per $t \to \infty$
- ⊗ tutti i modi temporali di $G(s)$ tendono a zero per $t \to \infty$
- ◯ la $G(s)$ non presenta modi temporali

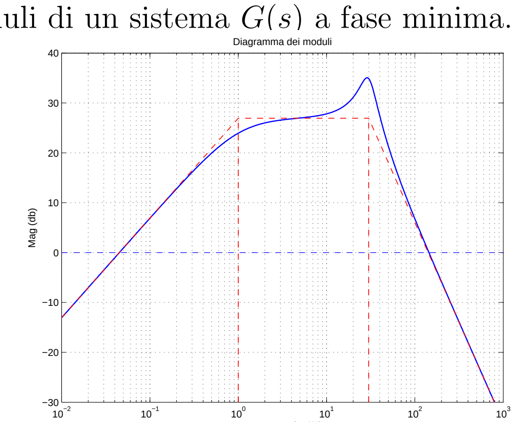
10. Dato uno schema a blocchi caratterizzato da un ingresso X e da un'uscita Y, scrivere la formula di Mason per calcolare la funzione di trasferimento $G = \frac{Y}{X}$:

$$G = \frac{Y}{X} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i \in \mathcal{P}} P_i\, \Delta_i$$

11. Si faccia riferimento al diagramma di Bode dei moduli di un sistema $G(s)$ a fase minima.

Utilizzando la formula di Bode, calcolare in modo approssimato la fase φ del sistema $G(s)$ in corrispondenza delle seguenti pulsazioni ω:

$$\omega_1 = 0.04 \quad \to \quad \varphi_1 \simeq \tfrac{\pi}{2}$$
$$\omega_2 = 1 \quad \to \quad \varphi_2 \simeq \tfrac{\pi}{4}$$
$$\omega_3 = 30 \quad \to \quad \varphi_3 \simeq -\tfrac{\pi}{2}$$
$$\omega_4 = 400 \quad \to \quad \varphi_4 \simeq -\pi$$



12. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(s+3)(3\,s+1)}{s(2\,s-1)}\, e^{-3s} \quad \to \quad \begin{cases} M(\omega) = \dfrac{\sqrt{\omega^2+9}\sqrt{9\,\omega^2+1}}{\omega\sqrt{4\,\omega^2+1}} \\[2ex] \varphi(\omega) = \arctan\dfrac{\omega}{3} + \arctan 3\omega - 3\,\omega - \dfrac{\pi}{2} - (\pi - \arctan 2\omega) \end{cases}$$