Controlli Automatici - Prima parte
6 Settembre 2024 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = [t^3 - 4\sin(3t)]\, e^{-2\,t}, \qquad x_2(t) = 5\delta(t) + 2\, e^{-3t}\cos(5t)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{6}{(s+2)^4} - \frac{12}{(s+2)^2+3^2}, \qquad X_2(s) = 5 + \frac{2(s+3)}{(s+3)^2+5^2}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{8}{s^2(s+2)}, \qquad G_2(s) = 4\, e^{-5\,s} + \frac{3}{s^2+81}$$

Soluzione:

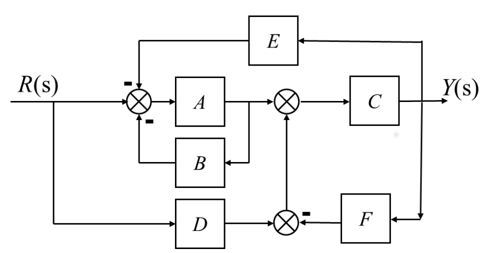
$$g_1(t) = -2 + 4t + 2e^{-2t}, \qquad g_2(t) = 4\,\delta(t-5) + \frac{1}{3}\sin(9\,t)$$

Infatti, per la funzione $G_1(s)$ si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}[G_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{8}{s^2(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{2}{s} + \frac{44}{s^2} + \frac{2}{(s+2)}\right] = -2 + 4t + 2e^{-2t}$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$:

$$G(s) = \frac{A\,C + D\,C\,(1 + A\,B)}{1 + A\,B + C\,F + A\,C\,E + A\,B\,C\,F}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;

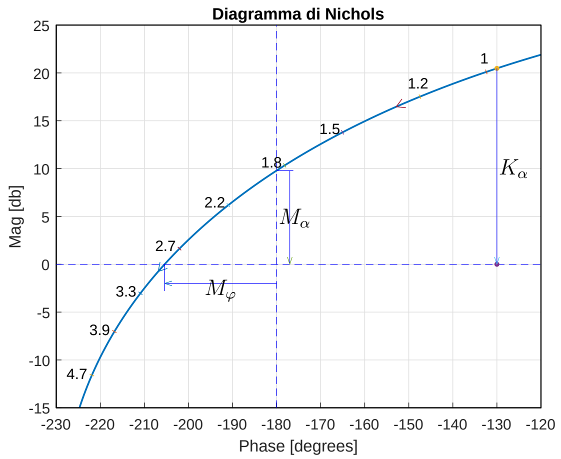
c.2) il margine di fase M_φ del sistema;

c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\, G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 50$;

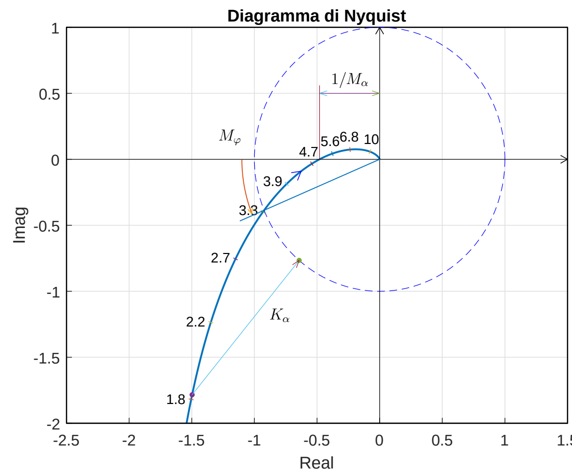
c.4) la risposta a regime $y_r(t)$ del sistema $G(s)$ ad un ingresso sinusoidale $x(t) = 3\sin(2.7t)$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$



$G_2(j\omega)$



c.1) $\quad M_a = -9.79 \text{ db } = 0.32$

c.2) $\quad M_\varphi = -25.4$

c.3) $\quad K_\varphi = -20.47 \text{ db } = 0.095$

c.4) $$y_r(t) = \begin{cases} 3 \cdot 1.21 \sin(2.7t - 202°) \\ 3.63 \sin(2.7t - 202°) \end{cases}$$

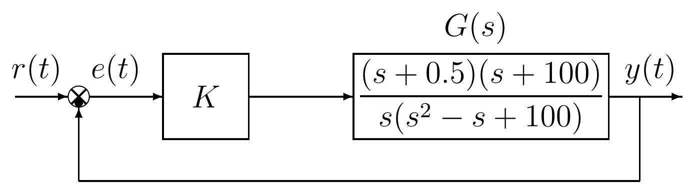
c.1) $\quad M_a = 2.08$

c.2) $\quad M_\varphi = 22.7$

c.3) $\quad K_\varphi = 0.429$

c.4) $$y_r(t) = \begin{cases} 3 \cdot 1.38 \sin(2.7t - 147°) \\ 4.14 \sin(2.7t + 213°) \end{cases}$$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K(s+100)(s+0.5)}{s(s^2 - s + 100)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + (K-1)s^2 + (100 + 100.5K)s + 50K = 0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 100 + 100.5K \\ 2 & K-1 & 50K \\ 1 & (K-1)(100+100.5K) - 50K & \\ 0 & 50K & \end{array}$$

Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 1, \qquad 100.5\,K^2 - 50.5\,K - 100 > 0, \qquad K > 0.$$

In base alla regola dei segni dei coefficienti di una equazione di secondo grado, è possibile affermare che le due soluzioni K_1 e K_2 dell'equazione di secondo grado della riga 1 sono reali e di segni opposti: $K_1 < 0$ e $K_2 > 0$. Inoltre, la corrispondente disequazione è positiva all'esterno di tali valori. Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > K_2 = \frac{50.5 + \sqrt{42750.25}}{201} = 1.28 = K^*.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{100 + 100.5K^*}. = 15.12.$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1. Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

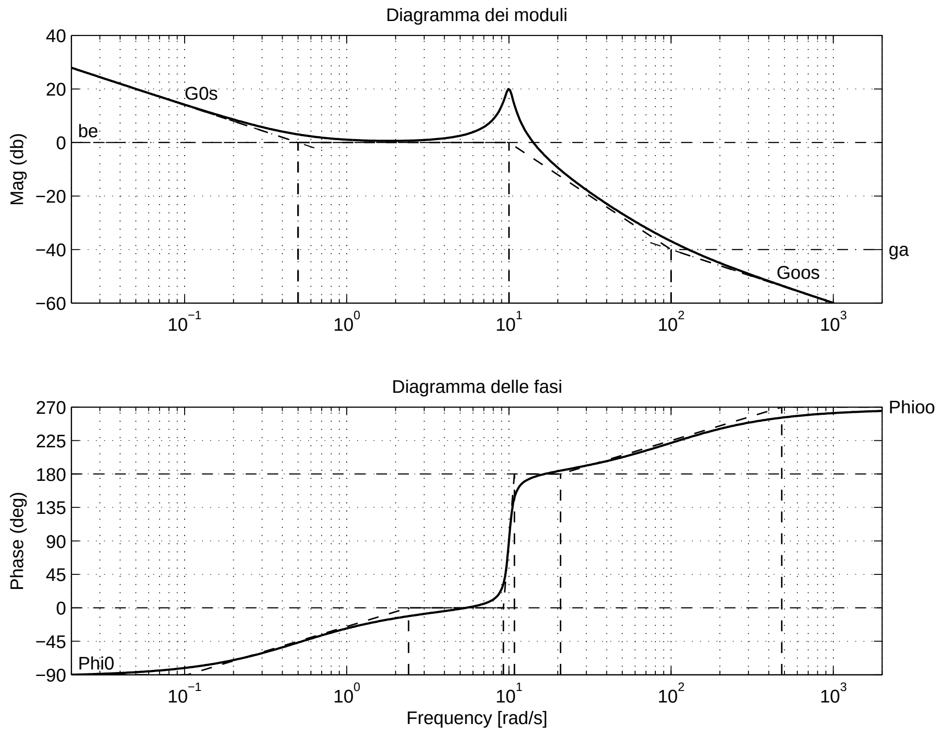


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

$$G_0(s) = \frac{0.5}{s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{1}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2} \equiv \frac{3\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze, il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.5$ e il guadagno γ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 100$ sono:

$$\beta = 1 = 0 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = \frac{1}{100} = -40 \text{ db}.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli instabili è $\delta = 0.05$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 2. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = 2 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = 2.02 > 0.$$

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale:

$$\sigma_a = K\Delta_\tau = 0.5 \cdot 2.02 = 1.01.$$

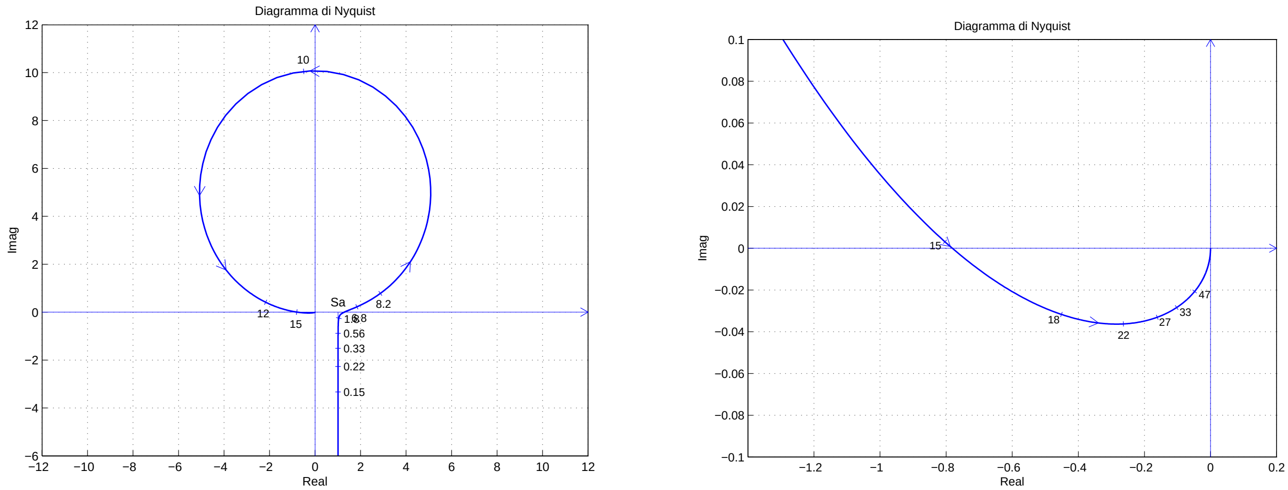


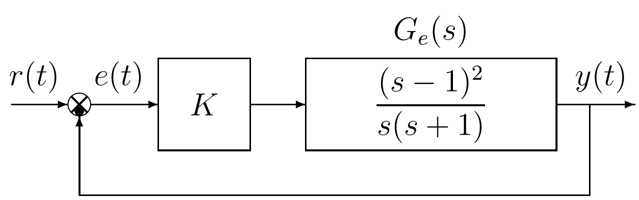
Figura 2: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$: andamento generale e zoom.

La variazione di fase $\Delta\varphi = 2\pi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0,\ \infty[$ indica che il vettore $G(j\omega)$ ruota di 2π in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = \frac{3\pi}{2}$. Esistono due intersezione con l'asse reale. L'intersezione con l'asse reale negativo avviene nel punto:

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{K^*} = -0.781.$$

in corrispondente della pulsazione $\omega_1^* = 15.12$.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K(s-1)^2}{s(s+1)} = 0 \quad \rightarrow \quad (1+K)s^2 + (1-2K)s + K = 0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & (1+K) & K \\ 1 & (1-2K) & \\ 0 & K & \end{array}$$

Il sistema retroazionato è stabile quando tutti i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh hanno lo stesso segno: a) segno positivo:

$$\begin{cases} (1+K) > 0 \\ (1-2K) > 0 \\ K > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0 < K < \frac{1}{2} = 0.5$$

b) segno negativo:

$$\begin{cases} (1+K) < 0 \\ (1-2K) < 0 \\ K < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \nexists K$$

Il sistema retroazionato è quindi stabile per:

$$0 < K < 0.5 = K^*$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è :

$$\omega_1^* = \sqrt{\frac{K^*}{1+K^*}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0.5774$$

e.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$.
Soluzione. I diagrammi asintotici di Bode sono mostrati in Fig. 3. I diagrammi di Bode delle

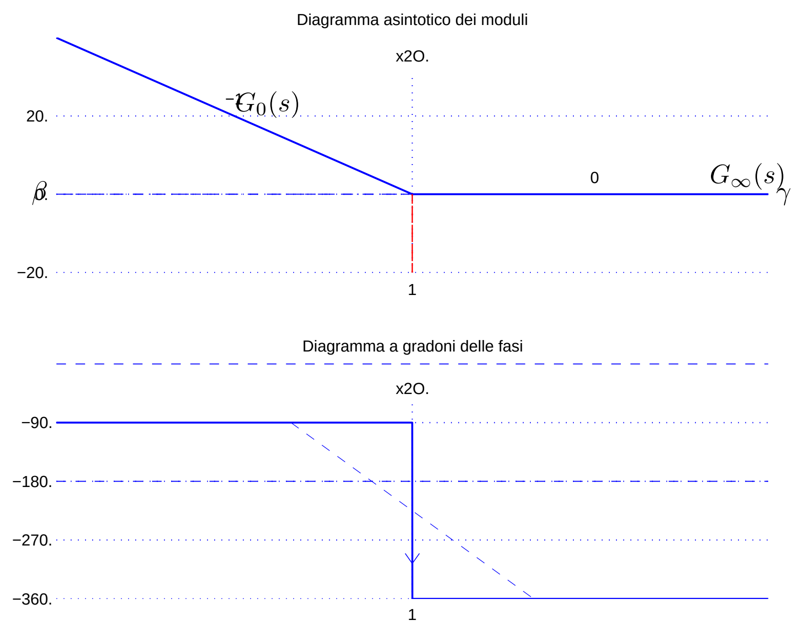


Figura 3: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_e(s)$.

ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

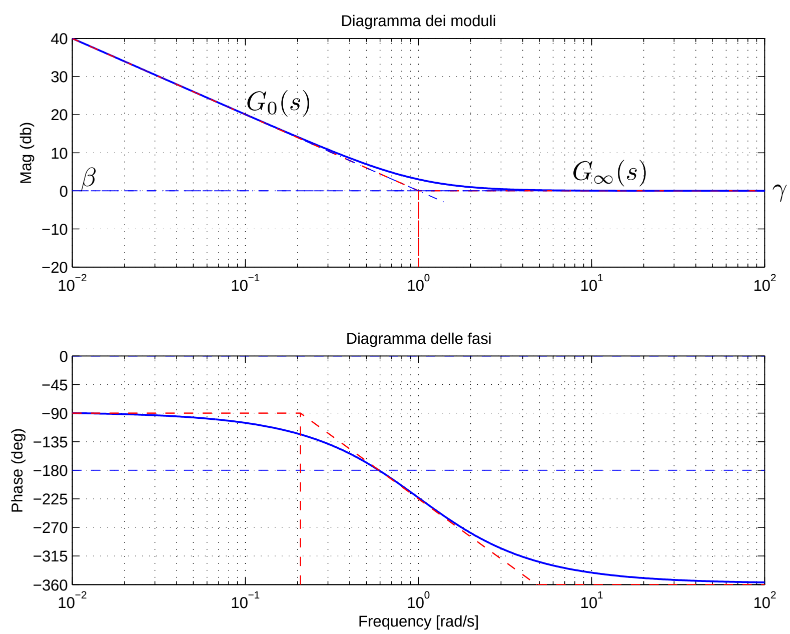


Figura 4: Diagrammi di Bode della funzione $G_e(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{1}{s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = 1$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \qquad\qquad \varphi_\infty = 0 \equiv 2\pi.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze i guadagni β e γ alla pulsazione $\omega = 1$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=1} = \gamma = |G_\infty(s)|_{s=1} = 1 = 0 \text{ db}.$$

e.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G_e(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'eventuale asintoto verticale e le eventuali intersezioni σ_i^* con il semiasse reale negativo.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ è mostrato in Fig. 5. La fase iniziale

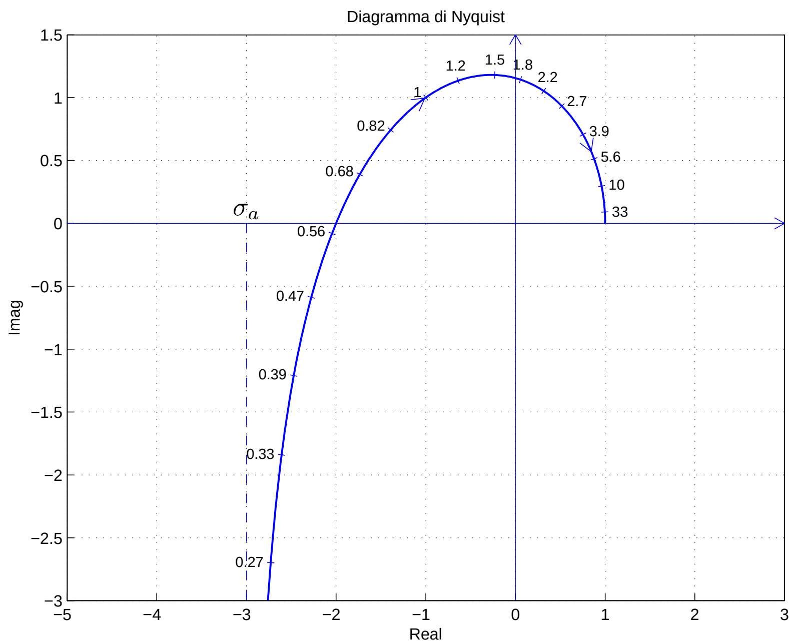


Figura 5: Diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

del sistema è $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto alla fase iniziale:

$$\Delta_\tau = -2 - 1 = -3 < 0.$$

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale:

$$\sigma_a = \Delta_\tau K = -3$$

La variazione di fase

$$\Delta\varphi = -\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{3}{2}\pi$$

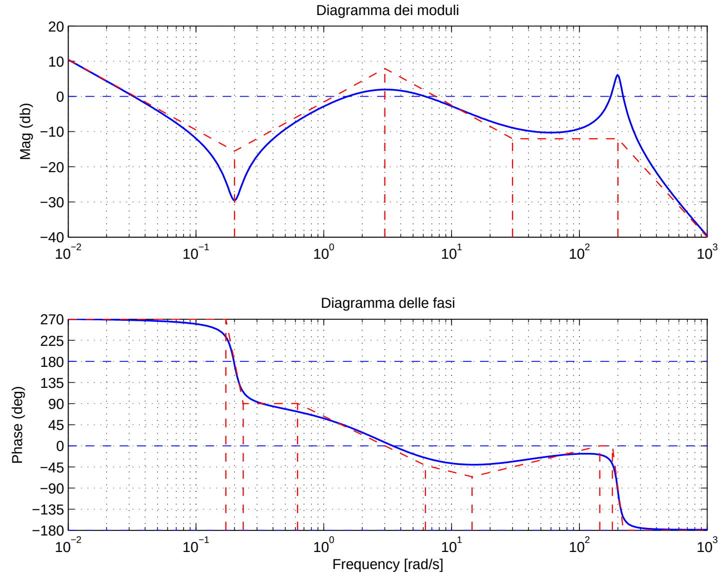
indica che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $-\frac{3}{2}\pi$ in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = 0$. Esiste una intersezione σ^* con il semiasse reale negativo:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K_1^*} = -2.$$

Tale intersezione avviene alla pulsazione $\omega_1^* = 0.5774$.

f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.



$$G(s) = \frac{10000(s^2 - 0.04s + 0.2^2)(s+30)}{s(s+3)^2(s^2+25s+200^2)}.$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.

f.1) La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{10000(s^2 - 0.04s + 0.2^2)(s+30)}{s(s+3)^2(s^2+25s+200^2)}.$$

Il valore $K = 10000$ si determina, per esempio, calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 200$:

$$|G_\infty(s)|_{s=200\,j} = \left|\frac{K}{s^2}\right|_{200\,j} = \frac{K}{200^2} = \gamma \simeq -12 \text{ db} \simeq 0.25 \qquad \rightarrow \qquad K \simeq 10000.$$

Il coefficiente di smorzamento δ_1 della coppia di zeri complessi coniugati instabili è il seguente:

$$\delta_1 = \frac{1}{2M_{\omega_n}} = \frac{1}{10} = 0.1.$$

La distanza $M_{\omega_n} \simeq 14$ db $= 4$ si legge dal diagramma dei moduli in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.2$.

Il coefficiente di smorzamento δ_2 della coppia di poli complessi coniugati stabili è il seguente:

$$\delta_2 = \frac{1}{2M_{\omega_n}} = \frac{1}{16} = 0.0625.$$

La distanza $M_{\omega_n} \simeq 18$ db $= 8$ si legge dal diagramma dei moduli in corrispondenza della pulsazione $\omega = 200$.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Controlli Automatici - Prima parte

6 Settembre 2024 - Domande

Si risponda alle seguenti domande.

1. Scrivere, in funzione dei segnali $x(t)$ e $y(t)$, l'equazione differenziale corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

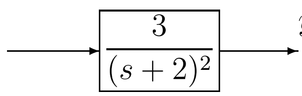
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(s+2)^2}{s^3 + 3\,s^2 + 5\,s + 2} \qquad \rightarrow \qquad \dddot{y} + 3\,\ddot{y} + 5\,\dot{y} + 2\,y = \ddot{x} + 4\dot{x} + 4\,x$$

2. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace del segnate $f(t)$. Fornire l'enunciato del "Teorema della traslazione in s":

$$\mathcal{L}[e^{-a\,t} f(t)] = F(s+a)$$

3. Calcolare il segnale sinusoidale in ingresso $x(t)$ del seguente sistema quando in uscita, a regime, è presente il segnale sinusoidale $y(t)$:

$x(t) = 16\sin(2t)$



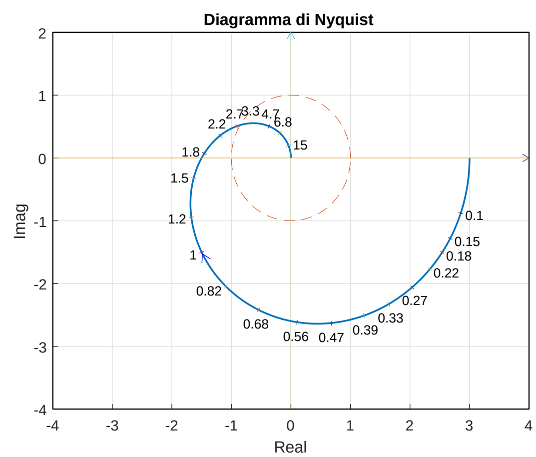
$y(t) \simeq 6\,\sin(2t - 90°)$

4. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $\frac{3(1-s)}{(s+1)^2}$. Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

- ◯ $K_1^* < K < K_2^* < 0$;
- ⊗ $K_1^* < K < K_2^*$;
- ◯ $0 < K_1^* < K < K_2^*$;
- ◯ $(K < K_1^*) \cup (K > K_2^*)$;

Indicare i valori dei parametri K_1^* e K_2^*:

$$K_1^* = -\frac{1}{3}, \qquad K_2^* = \frac{2}{3}$$

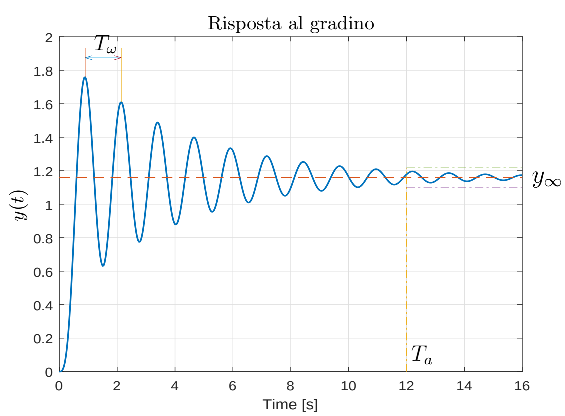


5. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{100(15+0.7s)(s^2+12s+400)}{(5s+23)(0.3s+4)(s^2+18s+225)(\mathbf{s^2+0.5s+25})}$$

Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

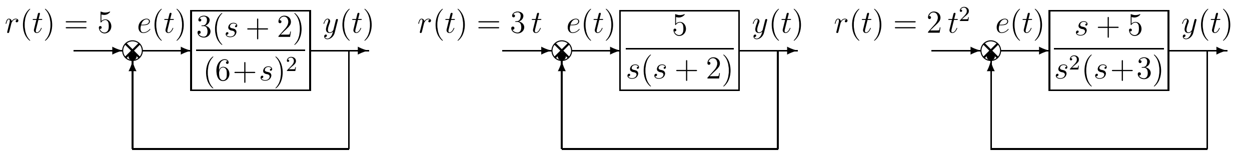
$$y_\infty = 1.1594, \qquad T_a \simeq \frac{3}{0.25} = 12\,\text{s}, \qquad T_\omega \simeq \frac{2\pi}{5} = 1.256.$$



6. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+} y(t)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{5\,(s-3)(2s+1)}{s(s^2+4s+6)} \qquad \to \qquad y_0 = 10, \qquad\qquad y_\infty = -\frac{5}{2} = -2.5$$

7. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



$$e(\infty) = \frac{5}{1+\frac{1}{6}} = \frac{30}{7} = 4.2857 \qquad e(\infty) = \frac{6}{5} = 1.2 \qquad\qquad e(\infty) = \frac{12}{5} = 2.4$$

8. In figura sono mostrati i diagrammi di Bode di un sistema lineare $G(s)$. Nei limiti della precisione del grafico, calcolare:

   a) la posizione dei poli dominanti $p_{1,2}$ del sistema $G(s)$:

$$p_{1,2} \simeq -0.2$$

   b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino del sistema $G(s)$:

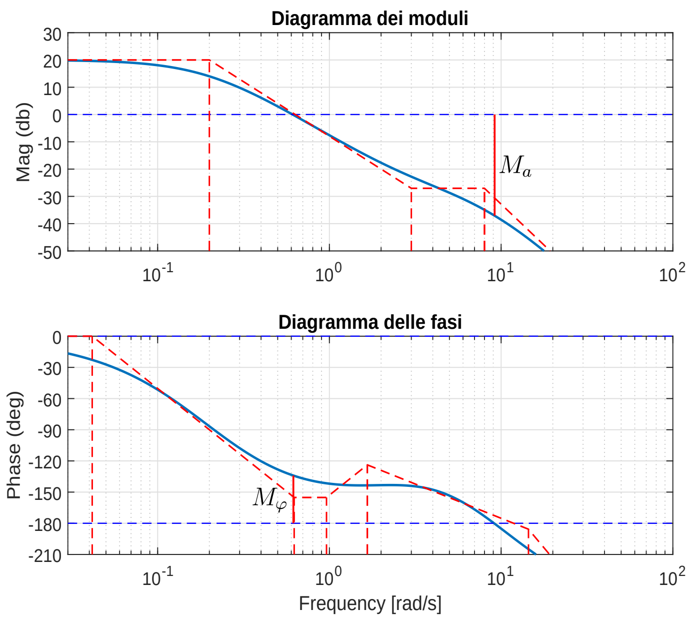
$$T_a \simeq \frac{3}{0.2}\ \text{s} = 15\ \text{s}.$$

   c) i margini di stabilità del sistema $G(s)$:

$$M_\varphi \simeq 45.93°, \qquad M_a \simeq 37\ \text{db} = 71.51.$$

   d) l'errore a regime e_p del sistema retroazionato per ingresso a gradino unitario:

$$e_p = \frac{1}{1+10} = 0.091$$



9. Il picco di risonanza M_R di un sistema del 2° ordine è:

○ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-\delta^2}}$ ⊗ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$ ○ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-2\delta^2}}$ ○ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-2\delta^2}}$

10. La formula di Bode per il calcolo della fase di un sistema a partire dal diagramma delle ampiezze

○ è una formula approssimata ○ è valida per i sistemi lineari stabili
⊗ è una formula esatta ⊗ è valida per i sistemi a fase minima

11. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $5\dot{y}(t) + 3\,y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = 2$.

$$5\,(s\,Y(s) - 2) + 3\,Y(s) = 0 \quad \to \quad Y(s) = \frac{2}{s+0.6} \quad \to \quad y(t) = 2\,e^{-0.6\,t}.$$

12. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(s-3)(2\,s+5)}{s(s+4)}\,e^{-3\,s} \quad \to \quad \begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2+9}\sqrt{4\omega^2+25}}{\omega\sqrt{\omega^2+16}} \\ \varphi(\omega) = \pi - \arctan\frac{\omega}{3} + \arctan\frac{2\omega}{5} - \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\omega}{4} - 3\,\omega \end{cases}$$