

Controlli Automatici - Prima parte
4 Settembre 2025 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. Elet. Telec. Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = [4 - 3 \cos(5t)] e^{-2t}, \quad x_2(t) = t^2 e^{-3t}$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{4}{s+2} - \frac{3(s+2)}{(s+2)^2 + 25}, \quad X_2(s) = \frac{2}{(s+3)^3}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{2}{s(s+1)(1+2s)}, \quad G_2(s) = 2 + \frac{5}{(s+3)^2 + 25}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = 2 + 2e^{-t} - 4e^{-0.5t}, \quad g_2(t) = 2\delta(t) + e^{-3t} \sin(5t)$$

Per la funzione $G_1(s)$ si ha:

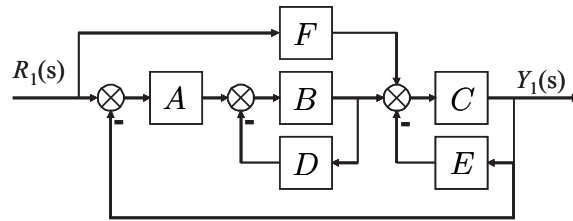
$$\mathcal{L}^{-1}[G_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)(s+0.5)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} + \frac{2}{s+1} - \frac{4}{s+0.5}\right] = 2 + 2e^{-t} - 4e^{-0.5t}$$

Per la funzione $G_2(s)$ si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}[G_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[2 + \frac{5}{(s+3)^2 + 25}\right] = 2\delta(t) + e^{-3t} \sin(5t)$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y_1(s)}{R_1(s)}$:

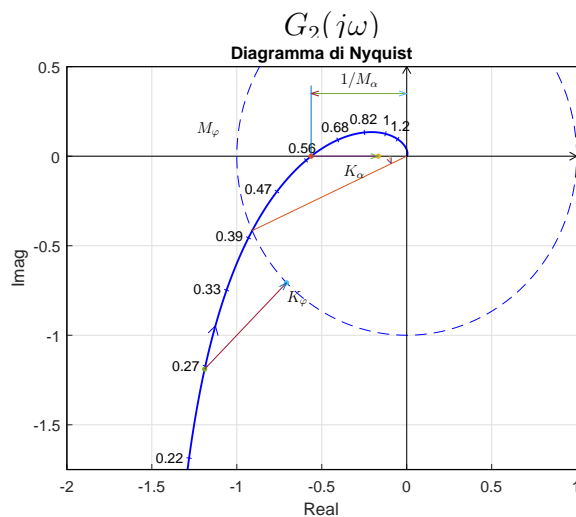
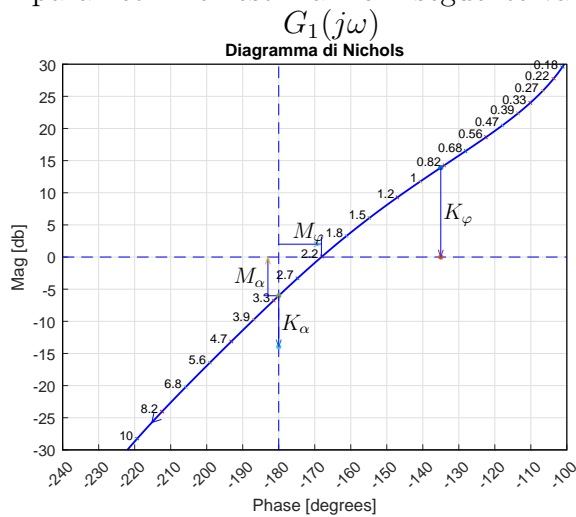
$$G(s) = \frac{ABC + FC(1+BD)}{1 + BD + CE + ABC + BDCE}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$. Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

- c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;
- c.2) il margine di fase M_φ del sistema;
- c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 45$;
- c.4) il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 5$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:



c.1) $M_a = 6 \text{ db} = 2$

c.2) $M_\varphi = 11.85^\circ$

c.3) $K_\varphi = -13.91 \text{ db} = 0.20162$

c.4) $K_\alpha = -7.96 \text{ db} = 0.40004$

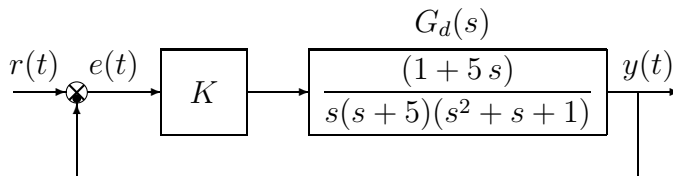
c.1) $M_a = 1.77$

c.2) $M_\varphi = 24.57^\circ$

c.3) $K_\varphi = 0.595$

c.4) $K_\alpha = 0.296$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(1 + 5s)}{s(s + 5)(s^2 + s + 1)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 + 6s^3 + 6s^2 + 5(K + 1)s + K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 6 & K \\ 3 & 6 & 5(K + 1) & \\ 2 & 31 - 5K & 6K & \\ 1 & 155 + 94K - 25K^2 & & \\ 0 & 6K & & \end{array}$$

Dalla riga 2 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K < \frac{31}{5}, \quad K > 0$$

Dalla riga 1 si ottiene la disequazione seguente:

$$155 + 94K - 25K^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{31}{25} < K < 5$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$0 < K < 5 = K^*$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{5(K^* + 1)}{6}} = \sqrt{5} = 2.236$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_d(s)$.

Soluzione.

I diagrammi “asintotici” di Bode della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. ???. I diagrammi di

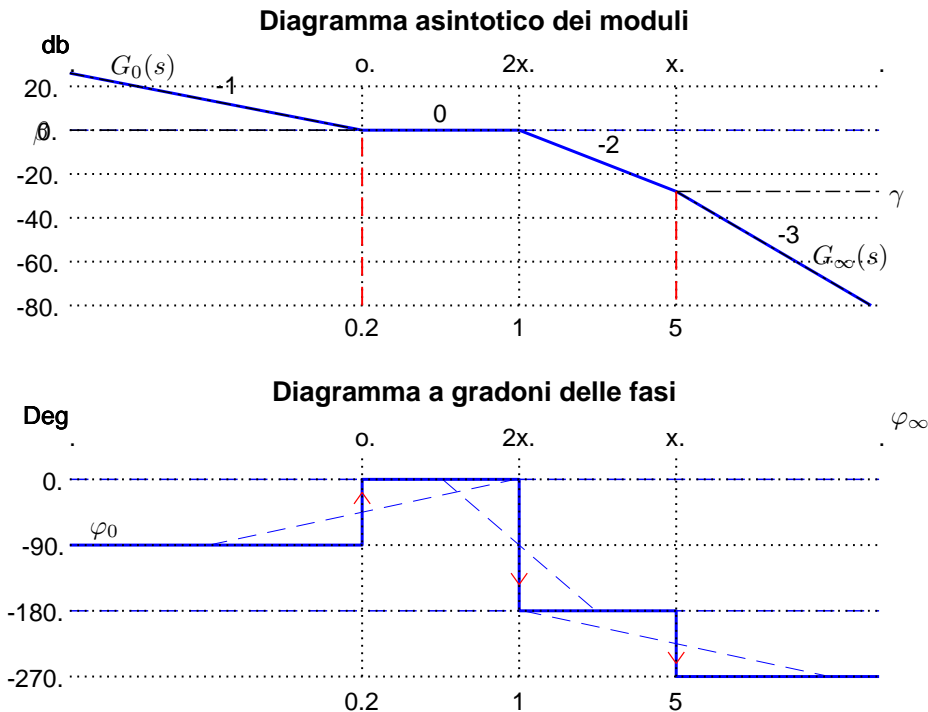


Figura 1: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_d(s)$.

Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \rightarrow 0$ ed $\omega \rightarrow \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{1}{5s}, \quad G_\infty(s) = \frac{5}{s^3}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi_\infty = -\frac{3\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.2$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 5$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.2} = 1 = 0 \text{ db}, \quad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=5} = \frac{5}{125} = 0.04 = -27.96 \text{ db}.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri stabili è $\delta = 1/(2\omega_n) = 0.5$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” della funzione $G_d(s)$.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G_d(s)$ è mostrato in Fig. 3.

La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \rightarrow 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a φ_0 in quanto $\Delta\tau$ è positiva:

$$\Delta\tau = 5 - \frac{1}{5} - 1 = 3.8 > 0.$$

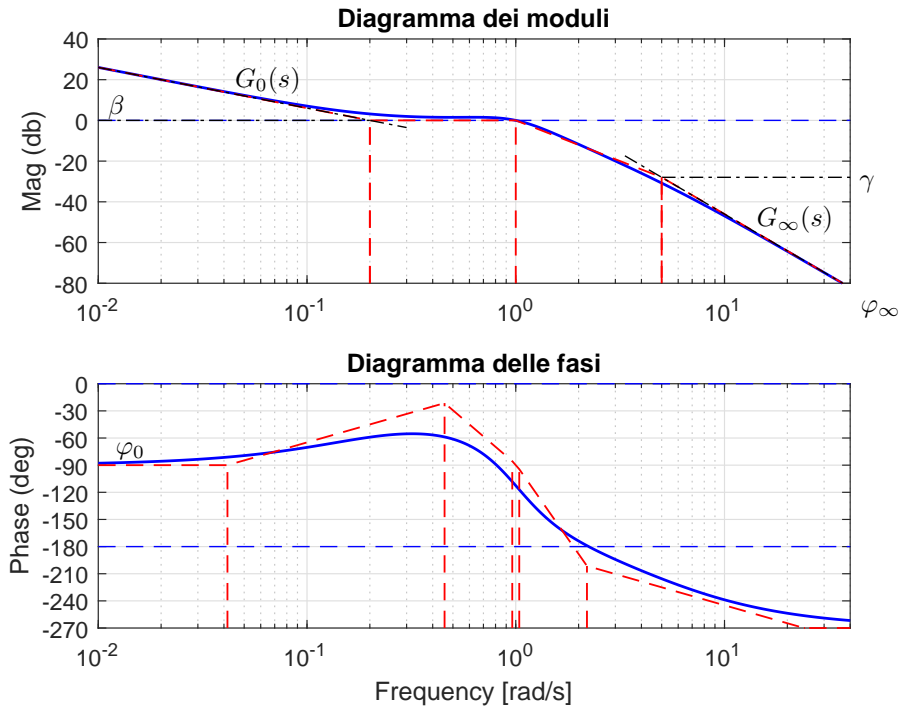


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G_d(s)$.

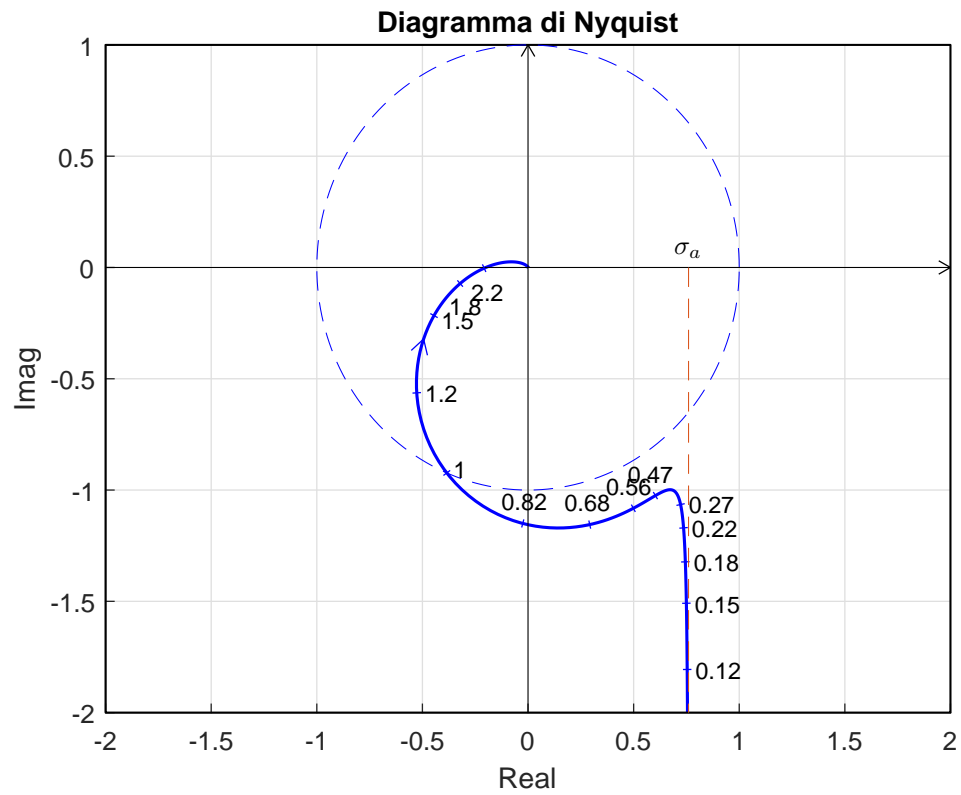


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G_d(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale:

$$\sigma_a = \frac{1}{5} \left(5 - \frac{1}{5} - 1 \right) = 0.76$$

La variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \pi = -\pi$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di π in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{3\pi}{2}$. Per $\omega \rightarrow \infty$ il diagramma arriva in anticipo rispetto a φ_∞ in quanto Δ_p è positiva:

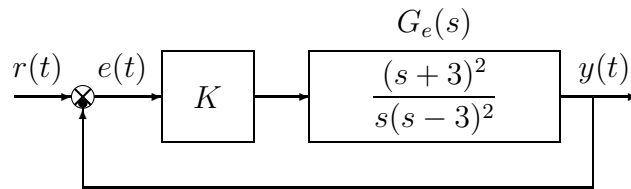
$$\Delta_p = -\frac{1}{5} + 5 + 1 = 5.8 > 0.$$

Esiste una sola intersezione con il semiasse reale negativo. L'intersezione avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{5} = -0.2$$

in corrispondente della pulsazione $\omega^* \simeq 2.234$.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K(s+3)^2}{s(s-3)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + (K-6)s^2 + (9+6K)s + 9K = 0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & & 1 & (9+6K) \\ 2 & & (K-6) & 9K \\ 1 & & (K-6)(9+6K) - 9K & \\ 0 & & 9K & \end{array}$$

Dalla riga 1 si ricava la seguente equazione del secondo ordine:

$$K^2 - 6K - 9 > 0 \quad \rightarrow \quad (K < 3 - \sqrt{18}) \cup ((K > 3 + \sqrt{18}))$$

Il sistema retroazionato è stabile per

$$K > 3 + \sqrt{18} = 7.2426 = K^*$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è :

$$\omega_1^* = \sqrt{9 + 6K^*} \simeq 7.2426$$

e.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$.

Soluzione. I diagrammi asintotici di Bode sono mostrati in Fig. 4. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

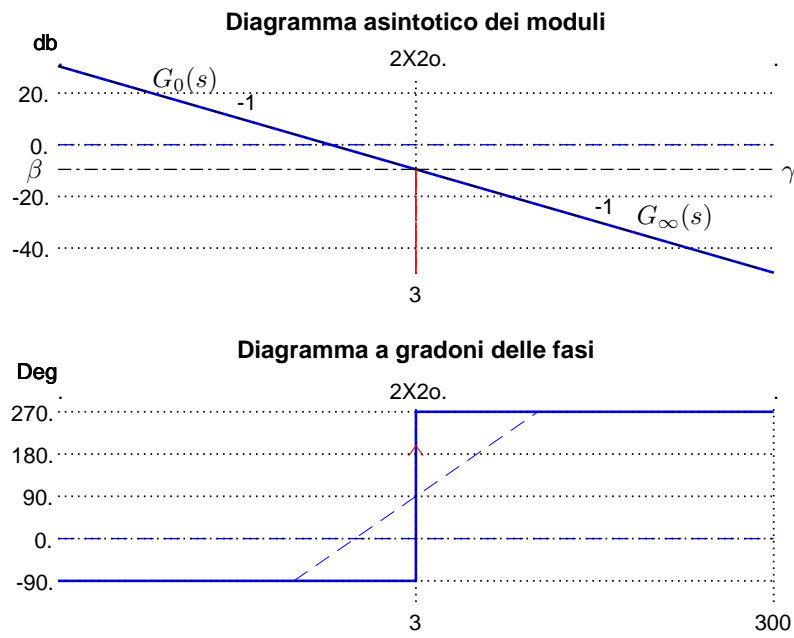


Figura 4: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_e(s)$.

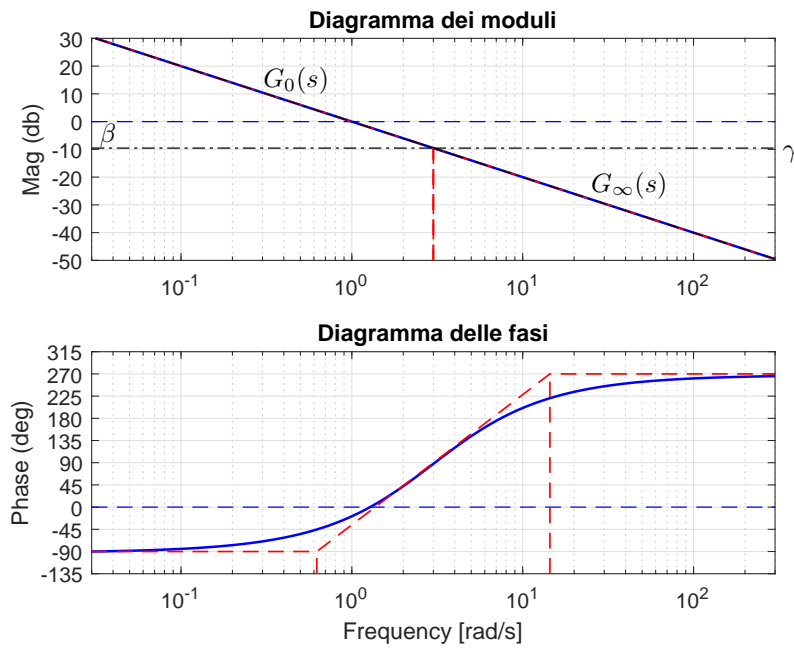


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G_e(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \rightarrow 0$ ed $\omega \rightarrow \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{1}{s}, \quad G_\infty(s) = \frac{1}{s}$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze i guadagni β e γ alla pulsazione $\omega = 3$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=3} = \gamma = |G_\infty(s)|_{s=3} = \frac{1}{3} = -9.54 \text{ db.}$$

e.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” della funzione $G_e(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell’asintoto verticale. Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ è mostrato in Fig. 6. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \rightarrow 0^+$

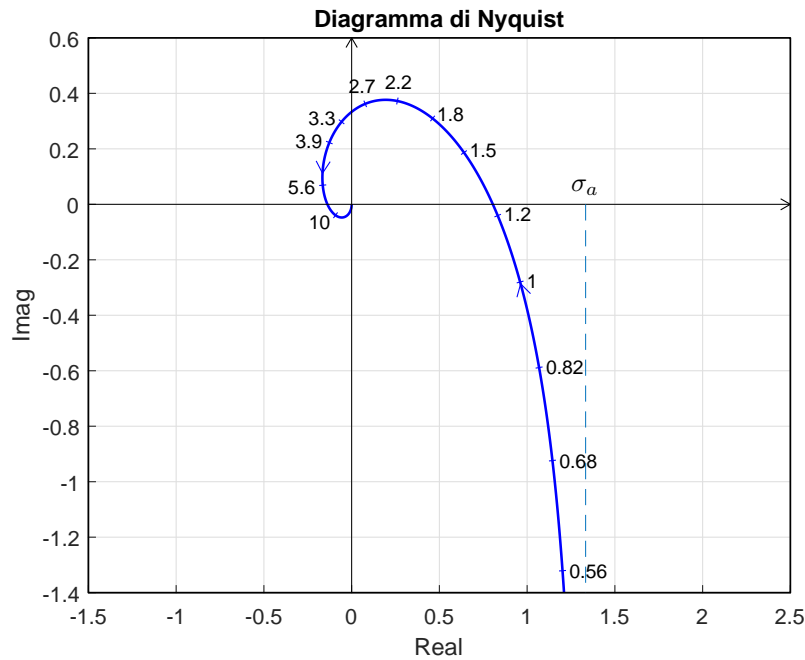


Figura 6: Diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

il diagramma parte in anticipo rispetto alla fase iniziale:

$$\Delta\tau = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} > 0.$$

Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto:

$$\sigma_a = \Delta\tau K = \frac{4}{3} = 1.333$$

La variazione di fase

$$\Delta\varphi = \pi + \pi = 2\pi$$

indica che il vettore $G(j\omega)$ ruota di 2π in senso antiorario per raggiungere la fase finale φ_∞ .

Esiste una intersezione σ^* con il semiasse reale negativo:

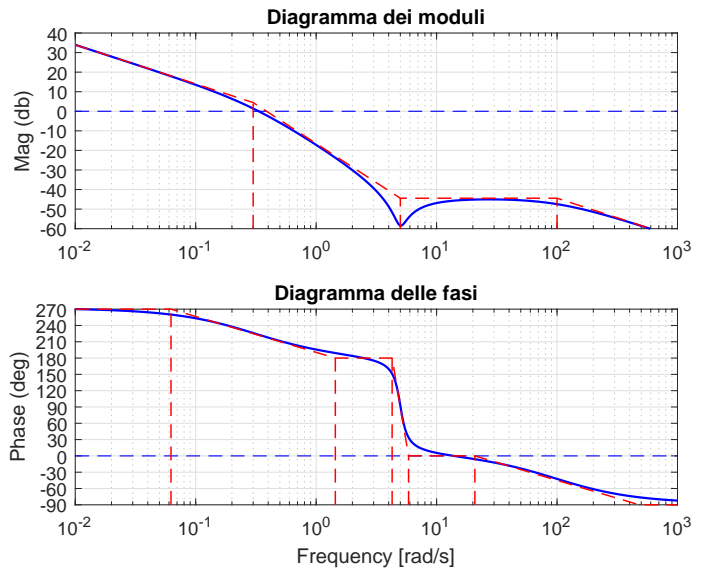
$$\sigma^* = -\frac{1}{K_1^*} = -0.1381$$

f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{0.6(s^2 - s + 25)}{s(s + 100)(s + 0.3)}.$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ .



Soluzione:

f.1) La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{0.6(s^2 - s + 25)}{s(s + 100)(s + 0.3)}.$$

Il valore $K = 0.6$ si determina, per esempio, calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s) = \frac{K}{s}$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 100$:

$$|G_\infty(s)|_{s=100j} = \left| \frac{K}{s} \right|_{s=100j} = \frac{|K|}{100} = \gamma \simeq -44.437 \text{ db} \simeq 0.006 \quad \rightarrow \quad |K| \simeq 0.6.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati stabili è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq \frac{1}{10} = 0.1.$$

La distanza $M_{\omega_n} \simeq 14 \text{ db} \simeq 5$ si legge dal diagramma di Bode dei moduli.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. Elet. Telec. Altro.

Si risponde alle seguenti domande.

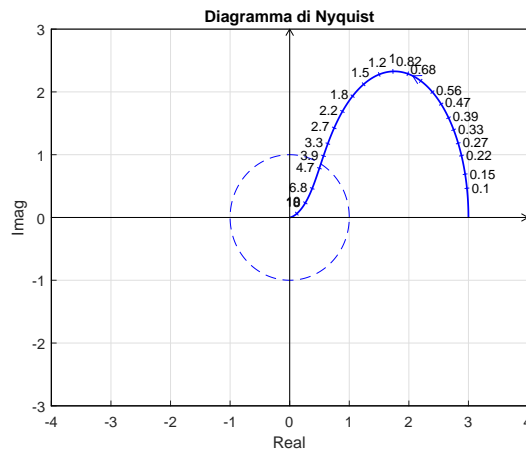
1. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente l'equazione differenziale:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + \alpha y = \ddot{x} + 5\dot{x} + 3x \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + 5s + 3}{s^3 + 2s^2 + \alpha s + 4}$$

2. Un sistema $G(s)$ retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se :

- il margine di fase $M_\varphi > 0$; il margine di ampiezza $M_a > 0$;
 il margine di fase $M_\varphi > 1$; il margine di ampiezza $M_a > 1$;

3. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $G(s) = \frac{50(s+0.6)}{(1-s)(s+1)(s+10)}$. Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K :

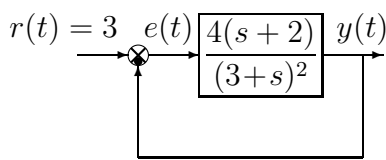


- ($K^* < K < 0$);
 ($0 < K < K^*$);
 ($K < K^*$, $K^* < 0$);
 ($K > K^*$, $K^* > 0$);

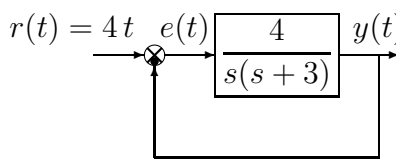
Calcolare il valore limite K^* :

$$K < K^* = -\frac{1}{3} = -0.333$$

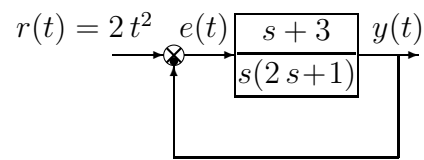
4. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



$$e(\infty) = \frac{3}{1 + \frac{8}{9}} = \frac{27}{17} = 1.58$$

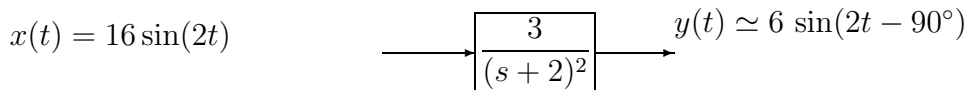


$$e(\infty) = \frac{4}{\frac{4}{3}} = 3$$



$$e(\infty) = \frac{4}{K_a} = \frac{4}{0} = \infty$$

5. Calcolare il segnale sinusoidale in ingresso $x(t)$ del seguente sistema quando in uscita, a regime, è presente il segnale sinusoidale $y(t)$:



Infatti:

$$G(j2) = \frac{3}{(j2 + 2)^2} \quad \rightarrow \quad |G(j2)| = \frac{3}{4 + 4} = \frac{3}{8}, \quad \arg(G(j2)) = -2 \arctan\left(\frac{2}{2}\right) = -\pi$$

13. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(s-3)(2s+5)}{s(s+4)} e^{-3s} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2+9}\sqrt{4\omega^2+25}}{\omega\sqrt{\omega^2+16}} \\ \varphi(\omega) = \pi - \arctan \frac{\omega}{3} + \arctan \frac{2\omega}{5} - \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega}{4} - 3\omega \end{cases}$$