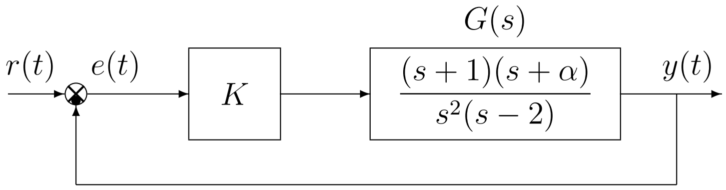
Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Controlli Automatici B
30 Giugno 2015 - Esercizi

a.1) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



Posto $\alpha = 3$, tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K^*. Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Sol. Posto $\alpha = 3$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1 G_1(s) = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + K\frac{(s+1)(s+3)}{s^2(s-2)} = 0$$

dove $K_1 = K$. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ per $K = K_1 > 0$ é mostrato in Fig. 1.

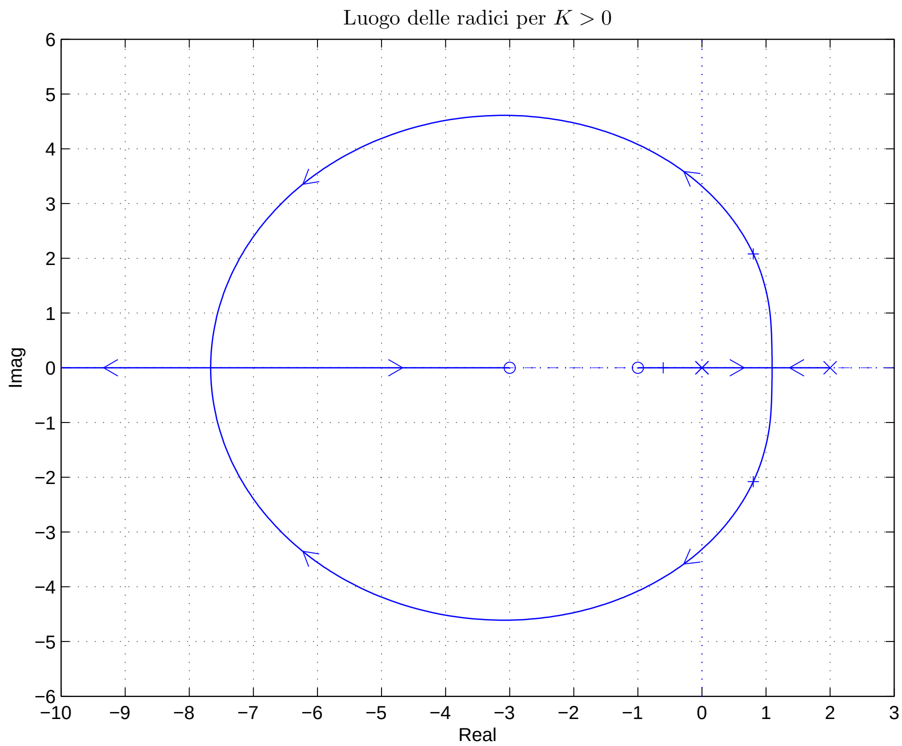


Figura 1: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ per $K = K_1 > 0$

Il luogo delle radici ha un solo asintoto che coincide con il semiasse reale negativo. L'intersezione con l'asse immaginario si calcola applicando il criterio di Routh alla seguente equazione caratteristica:

$$1 + K\frac{(s+1)(s+3)}{s^2(s-2)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + (K-2)s^2 + 4\,K\,s + 3\,K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 4K \\ 2 & K-2 & 3K \\ 1 & 4K(K-2) - 3K & \\ 0 & 3K & \end{array}$$

Il sistema retroazionato é stabile se

$$K > 2, \qquad (4K - 11)K > 0, \qquad K > 0.$$

Il sistema retroazionato é stabile se

$$K > \frac{11}{4} = 2.75 = K^*$$

L'intersezione con l'asse immaginario si ha in corrispondenza della pulsazione:

$$\omega^* = \sqrt{4K^*} = \sqrt{11} = 3.317.$$

a.2) Posto $K = 5$, tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\alpha > 0$. Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo". Calcolare esattamente il centro e la posizione degli asintoti.

Sol. Posto $K = 5$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente

$$1 + \frac{5(s+1)(s+\alpha)}{s^2(s-2)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^2(s-2) + 5(s+1)(s+\alpha) = 0$$

da cui si ricava l'equazione caratteristica $1 + \alpha\, G_1(s) = 0$:

$$s^2(s-2) + 5(s+1)s + 5\alpha(s+1) = 0 \qquad \rightarrow \qquad 1 + \frac{\alpha\, 5(s+1)}{s(s^2+3s+5)} = 0$$

La funzione $G_1(s)$ può essere fattorizzata nel modo seguente:

$$1 + \frac{\alpha\, 5(s+1)}{s[(s+1.5)^2 + 1.66^2]} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\alpha > 0$ è mostrato in Fig. 2.

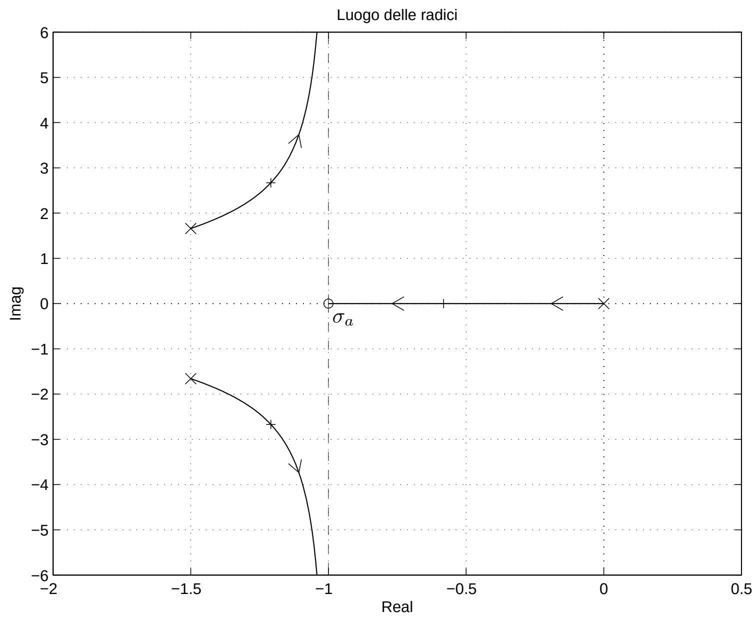
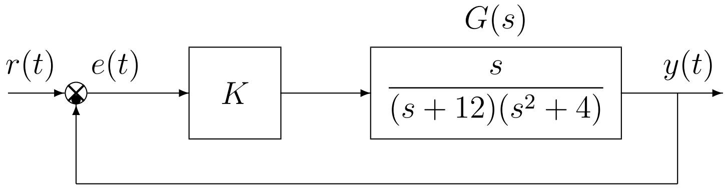


Figura 2: Contorno delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

Il contorno delle radici ha due asintoti verticali. La posizione σ_a del centro degli asintoti è:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-3 + 1) = -1.$$

a.3) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K^*. Tracciare il luogo delle radici tenendo conto che in $\sigma_1 \simeq -2.7$ e $\sigma_2 \simeq -5.1$ sono presenti due punti di diramazione.

Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K \frac{s}{(s+12)(s^2+4)} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 + K_1\, G(s) = 0$$

dove $K_1 = K$. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$ è mostrato in Fig. 3.

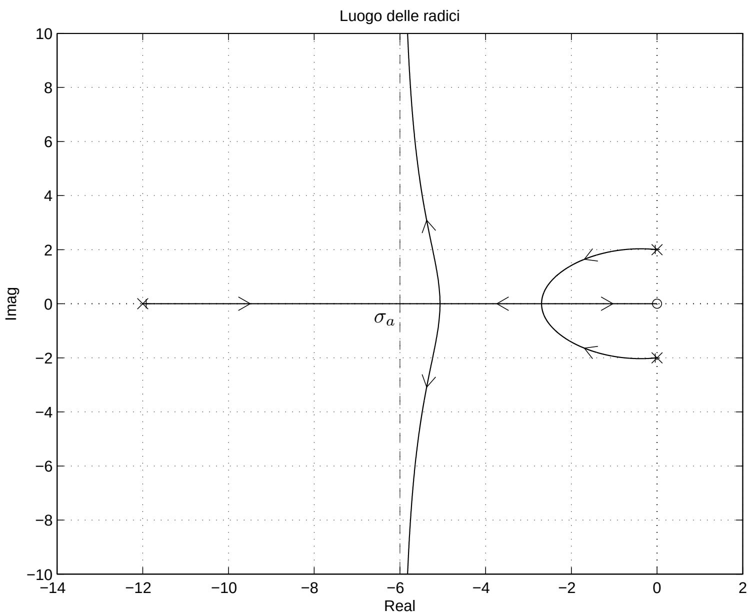


Figura 3: Luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$.

Dal luogo delle radici risulta chiaro che il sistema retroazionato è stabile per:

$$K > 0$$

e che le intersezioni con l'asse immaginario si hanno in corrispondenza della pulsazione:

$$\omega^* = 2$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto utilizzando il criterio di Routh:

$$1 + K\, G(s) = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 12\, s^2 + (K+4)s + 48 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & K+4 \\ 2 & 12 & 48 \\ 1 & 12(K+4) - 48 & \\ 0 & 48 & \end{array}$$

Dalla riga 1 si ottiene:

$$12(K+4) - 48 > 0 \qquad \rightarrow \qquad K > 0$$

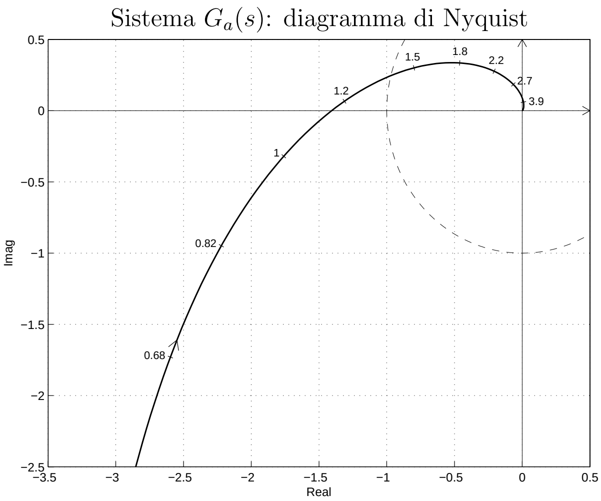
La pulsazione ω^* si calcola nel seguente modo:

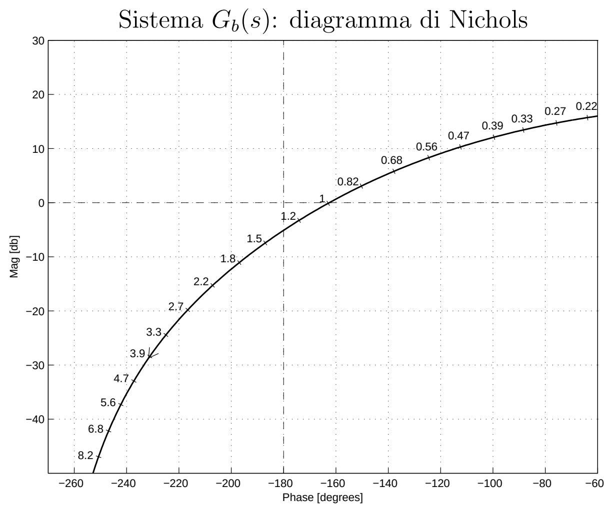
$$\omega^* = \sqrt{\frac{48}{12}} = \sqrt{4} = 2$$

Il luogo delle radici ha due asintoti verticali. La posizione σ_a del centro degli asintoti è:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-12) = -6.$$

b) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi $G_a(s)$ e $G_b(s)$:





b.1) Per il sistema $G_a(s)$, progettare una rete correttrice in grado da garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_a = 10$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. La specifica sul margine di ampiezza $M_a = 10$ definisce completamente la posizione del punto $B = M_B\, e^{j\varphi_B}$: $M_B = 0.1$ e $\varphi_B = 180°$. La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 4.

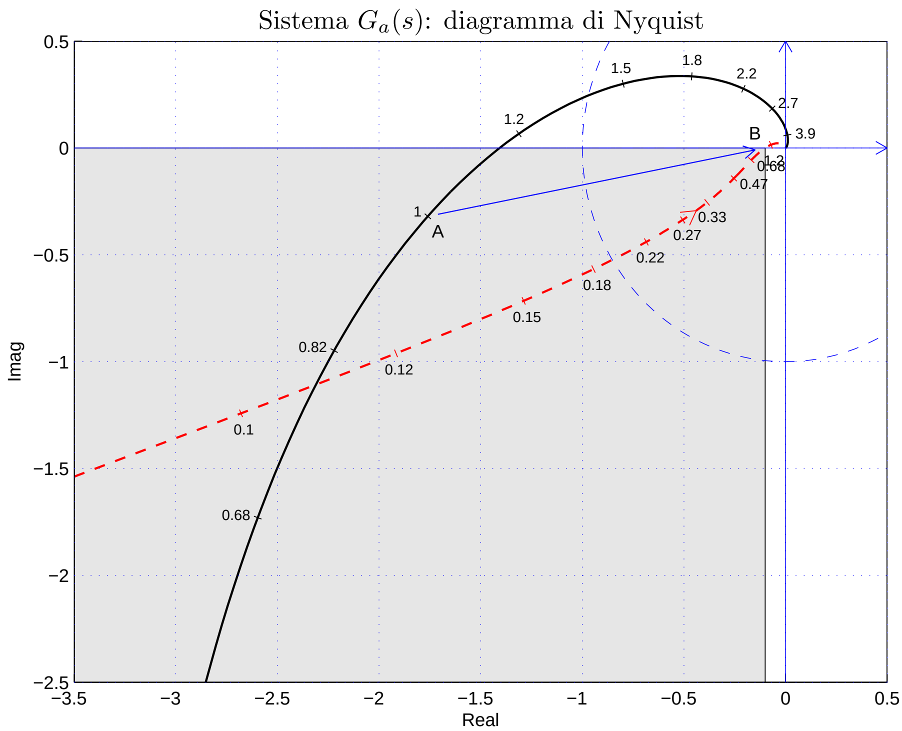


Figura 4: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)\, G_a(s)$.

Il punto $A = G_b(j\omega_A)$ scelto per la sintesi della rete correttrice è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 1$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 1.7889, \qquad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 190.3°.$$

Sostituendo i valori di M, φ e $\omega = \omega_A$ all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 5.187$ e $\tau_2 = 10.44$ della rete correttrice $C(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.0559, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -10.3° \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 5.187\, s)}{(1 + 94.5\, s)}.$$

Il diagramma di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 4.
Sintesi della rete correttrice $C_1(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A:

$$\begin{aligned}
\omega_A &= [\ 1 \quad 0.82 \quad 0.68\ ]\\
M_A &= [\ 1.789 \quad 2.415 \quad 3.12\ ]\\
\varphi_A &= [\ -169.7 \quad -156.9 \quad -146.3\ ]\\
M &= [\ 0.0559 \quad 0.0414 \quad 0.0320\ ]\\
\varphi &= [\ -10.3 \quad -23.12 \quad -33.67\ ]\\
\tau_1 &= [\ 5.187 \quad 2.728 \quad 2.123\ ]\\
\tau_2 &= [\ 94.5 \quad 72.15 \quad 80.56\ ]
\end{aligned}$$

b.2) Per il sistema $G_b(s)$, progettare una rete correttrice in modo da garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = 40^o$ e una larghezza di banda $\omega_{f0} = 1.8$ per il sistema retroazionato.

Sol. La posizione del punto B è completamente determinata dalla specifica di progetto $B = M_B\, e^{j\varphi_B}$: $M_B = 1$ e $\varphi_B = -140°$. La regione di ammissibilitá è mostrata in grigio in Fig. 5. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione

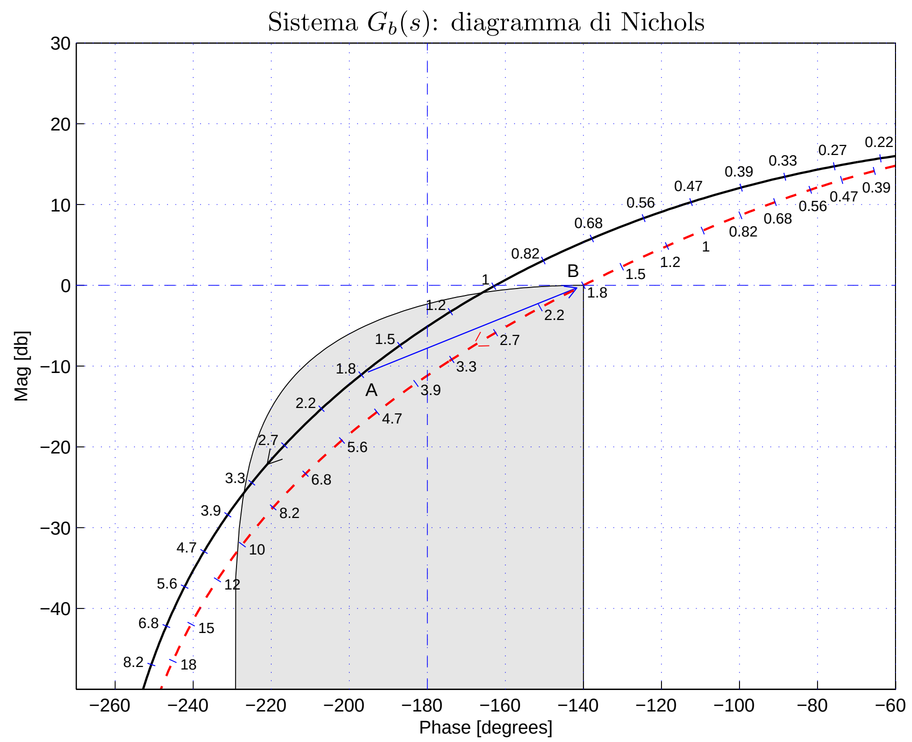


Figura 5: Diagrammi di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_2(s)\, G_a(s)$.

$\omega_A = 1.8$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.2798, \qquad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -196.9°.$$

Sostituendo i valori di M, φ e ω all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 2.007$ e $\tau_2 = 0.1762$ della rete correttrice $C_2(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 3.5736, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 56.9° \quad \rightarrow \quad C_2(s) = \frac{(1 + 2.007\, s)}{(1 + 0.1762\, s)}.$$

Il diagramma di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ $C_2(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

b.3) Sempre per il sistema $G_b(s)$, progettare una rete correttrice in modo da garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = 60^o$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.

Soluzione. La specifica di progetto definisce completamente la posizione del punto $B = M_B\, e^{j\varphi_B}$: $M_B = 1$ e $\varphi_B = -120°$. La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 6.

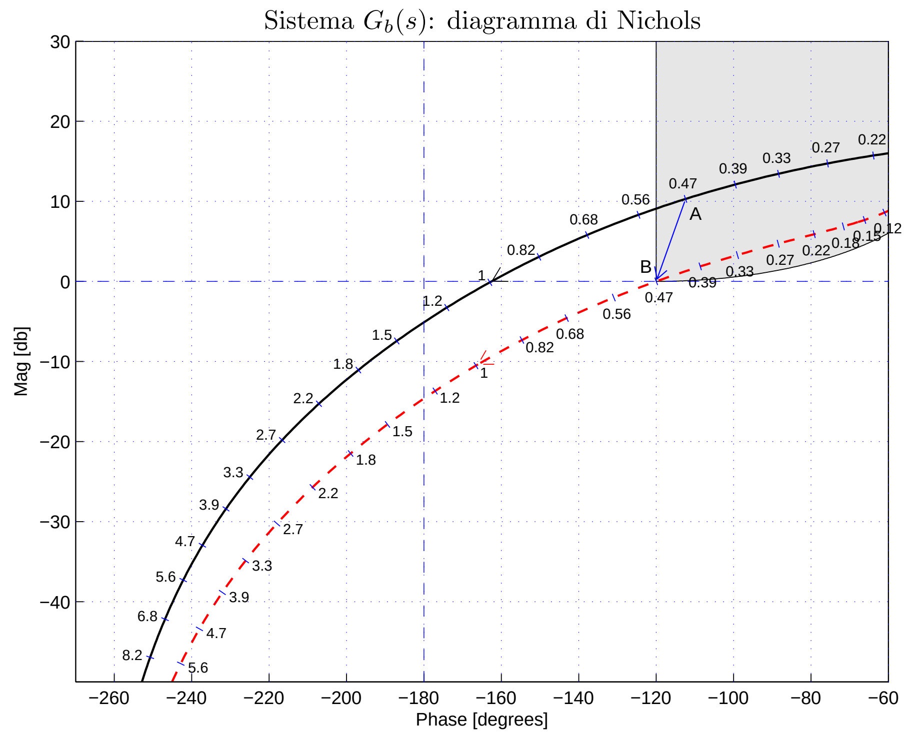


Figura 6: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_3(s)\,G_b(s)$.

Il punto $A = G(j\omega_A)$ scelto per essere portato in B è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 0.47$:

$$M_A = 3.2713, \qquad \varphi_A = -112.4°.$$

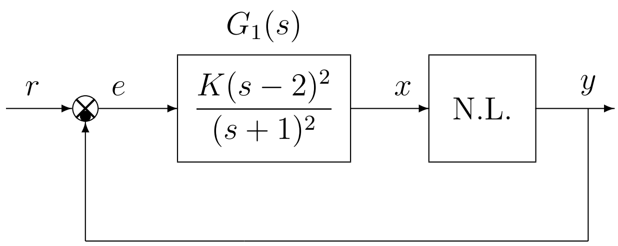
I valori di M e φ da usare nelle formule di inversione sono i seguenti:

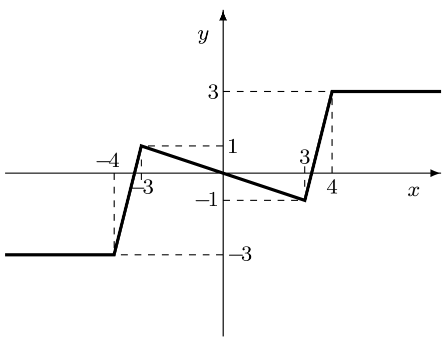
$$M = \frac{M_B}{M_{A'}} = 0.30568, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_{A'} = -7.575° \quad \rightarrow \quad C_3(s) = \frac{(1 + 11.07\,s)}{(1 + 36.8\,s)}.$$

I diagrammi di Nichols delle funzioni $G_b(s)$ e $C_3(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 6.
Sintesi della rete correttrice $C_3(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A:

$$\begin{array}{rl}
\omega_A = & [\;\; 0.47 \quad 0.39 \quad 0.33 \quad 0.27 \quad 0.22\,] \\
M_A = & [\;\; 3.271 \quad 4.025 \quad 4.697 \quad 5.447 \quad 6.105\,] \\
\varphi_A = & [-112.4 \quad -99.58 \quad -88.41 \quad -75.73 \quad -63.9\,] \\
M = & [\;\; 0.3057 \quad 0.2484 \quad 0.2129 \quad 0.1836 \quad 0.1638\,] \\
\varphi = & [-7.575 \quad -20.42 \quad -31.59 \quad -44.27 \quad -56.1\,] \\
\tau_1 = & [\;\; 11.07 \quad 5.063 \quad 3.697 \quad 2.825 \quad 2.157\,] \\
\tau_2 = & [\;\; 36.8 \quad 22.7 \quad 22.24 \quad 25.1 \quad 30.38\,]
\end{array}$$

c) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:





c.1) Posto $K = 1$, determinare per quale valore r^* del riferimento r il punto di lavoro del sistema retroazionato coincide con il punto $(x_0, y_0) = (4, 3)$.

Sol. La retta di carico del sistema retroazionato è:

$$x = K_1(r - y) \qquad \text{dove} \qquad K_1 = 4$$

Il valore r^* si ottiene ponendo $x = 4$ e $y = 3$ nella retta di carico:

$$4 = 4(r^* - 3) \qquad \rightarrow \qquad r^* = 4.$$

c.2) Posto $K = 1$, $r = r^*$ ed utilizzando il criterio del cerchio, dire se il sistema retroazionato è stabile nell'intorno del punto di lavoro $(x_0, y_0) = (4, 3)$.

Sol. Per $r = r^*$ il punto di lavoro coincide con il punto $(x_0, y_0) = (4, 3)$. Le pendenze delle 2 rette che passano nel punto di lavoro e che racchiudono a settore tutta la non linearità sono:

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 4.$$

In questo caso il cerchio critico degenera in un semipiano delimitato dalla retta verticale

$$x = -\frac{1}{\beta} = -\frac{1}{4}$$

Per $K = 1$, il guadagno d'anello del sistema è:

$$G(s) = \frac{(s-2)^2}{(s+1)^2}$$

Il margine di ampiezza K^* e la pulsazione ω^* della funzione $G(s)$:

$$K^* = \frac{1}{2} = 0.5, \qquad \omega^* = \sqrt{2} = 1.4142.$$

Allo stesso risultato si giunge applicando il criterio di Routh alla seguente equazione caratteristica:

$$1 + K\frac{(s-2)^2}{(s+1)^2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad (1+K)s^2 + (2-4K)s + 1 + 4K = 0$$

Il sistema retroazionato è stabile quando tutti e tre i coefficienti del polinomio0 sono positivi:

$$\begin{cases} 1 + K > 0 \\ 2 - 4K > 0 \\ 1 + 4K > 0 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} K > -1 \\ K < \frac{1}{2} \\ K > -\frac{1}{4} \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad -\frac{1}{4} < K < \frac{1}{2} = K^*$$

La pulsazione ω^* si ottiene nel seguente modo:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{1+4K^*}{1+K^*}} = \sqrt{\frac{1+2}{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}$$

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ interseca sicuramente il cerchio critico per cui non si può dire nulla sulla stabilità del punto $(x_0, y_0) = (4, 3)$ perchè il criterio del cerchio è un criterio solo sufficiente. In Fig. 7 è mostrato il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ sovrapposto al cerchio critico.

c.3) Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità N.L. assegnata, prendendo l'origine come punto di lavoro. Utilizzare delle variabili (per esempio: m_1, m_2, ...) per rappresentare gli eventuali valori non noti minimi e massimi della funzione $F(X)$.

Sol. L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ quando è mostrato in Fig. 8. Indichiamo: a) con $m_0 = -0.333$ il valore iniziale della funzione $F(X)$ per $X < 3$; b) con $m_1 \simeq 0.49$ il valore massimo della funzione $F(X)$ per $X \simeq 6$; c) con $m_2 = 0$ il valore finale della funzione $F(X)$ per $X \to \infty$.

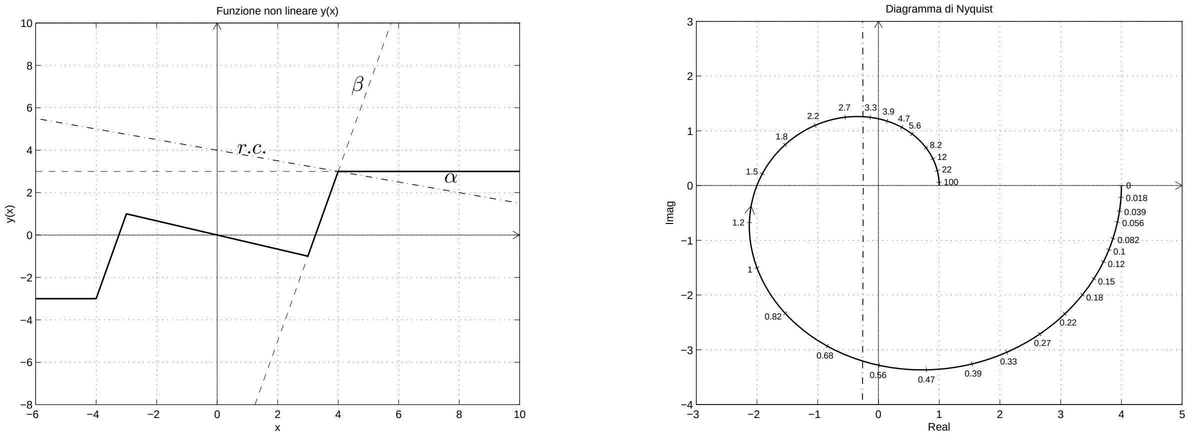


Figura 7: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ e cerchio critico.

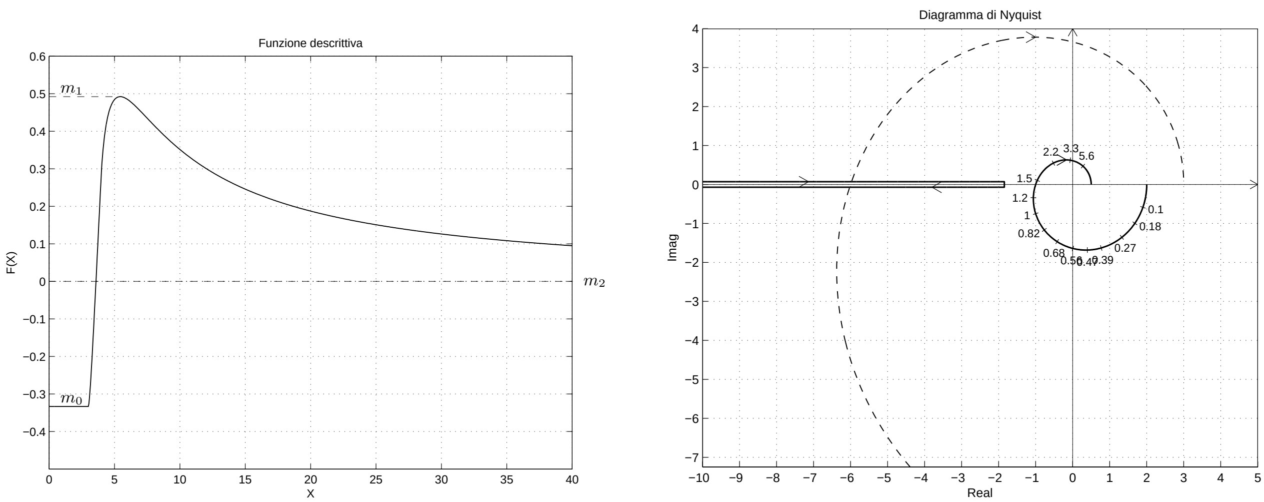


Figura 8: Andamento della funzione descrittiva $F(X)$.

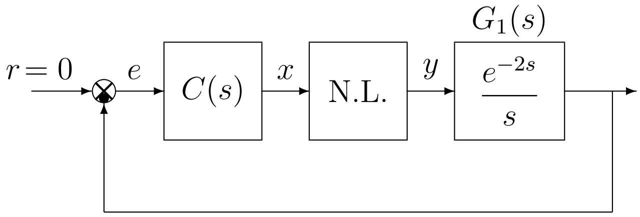
c.4) Discutere "qualitativamente" (in funzione anche dei parametri m_1 ed m_2) l'esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno $K > 0$.

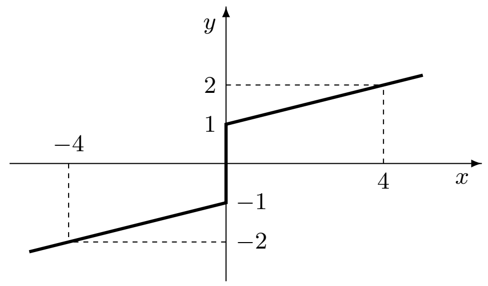
Sol. Per $K = 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema G(s) è $K^* = 0.5$. Al variare di K si hanno quindi queste 2 possibili condizioni operative:

1) $-\dfrac{1}{m_1} < -\dfrac{K}{K^*} < 0$: la funzione $-1/F(X)$ è tutta esterna al diagramma completo della funzione $G(s)$ per cui non vi sono cicli limite e l'origine è un punto di lavoro globalmente asintoticamente stabile.

2) $-\dfrac{K}{K^*} < -\dfrac{1}{m_1}$: il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in 2 punti a cui corrispondono 2 cicli limite, uno stabile (quello uscente) e uno instabile (quello entrante).

d) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:





dove la nonlinearità è caratterizzata dalla funzione $y = f(x)$ mostrata in figura.

d.1) Posto $C(s) = 1$, calcolare l'ampiezza X^* e la pulsazione ω^* dell'oscillazione autosostenuta presente all'interno del sistema.

Sol. La non linearità N.L. mostrata in figura è la somma di un relè ideale di ampiezza $Y = 1$ e di una retta di pendenza 0.25 per cui ad essa corrisponde la seguente funzione descrittiva:

$$F(X) = \frac{4}{\pi X} + \frac{1}{4}$$

Applicando il criterio di Routh è facile mostrare che i parametri K^* e ω^* del sistema $G_1(s)$ sono i seguenti:

$$K^* = \omega^* = \frac{\pi}{2\,t_0} = \frac{\pi}{4} = 0.7854$$

Il sistema retroazionato presenta un ciclo limite stabile alla pulsazione $\omega = \omega^*$ la cui ampiezza X puó essere determinata imponendo:

$$F(X^*) = K^* \quad \rightarrow \quad \frac{4}{\pi X^*} + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \rightarrow \quad X^* = \frac{16}{\pi(\pi - 1)} = 2.3781$$

d.2) Posto $C(s) = K$, determinare il valore massimo $\bar{K}$ del guadagno K oltre il quale il sistema retroazionato è sicuramente instabile.

Sol. Quando il margine di ampiezza del sistema $\frac{K^*}{K}$ coincide con piú piccolo valore della funzione descrittiva $F(X)$, $f_{min} = 0.25$, il diagramma polare completo della funzione $G_1(s)$ ingloba totalmente la funzione $-1/F(X)$ per cui il sistema retroazionato diventa instabile. Il valore limite $\bar{K}$ si calcola nel modo seguente:

$$\frac{K^*}{\bar{K}} = f_{min} \quad \leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4\,\bar{K}} = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad \bar{K} = \pi$$

d.3) Calcolare i parametri τ_1 e τ_2 di una rete correttrice $C(s) = \frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$ in modo da garantire che all'interno del sistema retroazionato sia presente un'oscillazione autosostenuta la cui pulsazione ω_c e la cui ampiezza X_c siano: $\omega_c = \frac{\pi}{8}$ e $X_c = 1$.

Sol. Il vincolo $\omega_c = \frac{\pi}{8}$ sulla pulsazione ω_c individua il punto A della funzione $G_1(s)$ che deve essere portato in B ad intersecare l'asse reale negativo:

$$M_A = \left|G_1(j\omega)\right|_{\omega=\frac{\pi}{8}} = \frac{8}{\pi} = 2.5465, \qquad \varphi_A = -\frac{\pi}{2} - 2\,\omega_c = -\frac{3\pi}{4} = 225^o$$

Il punto B sul semiasse reale negativo è completamente definito dal vincolo sull'ampiezza della pulsazione:

$$X_c = 1 \quad \rightarrow \quad B = -\frac{1}{F(X_c)} = -\left.\frac{1}{\frac{4}{\pi X_c} + \frac{1}{4}}\right|_{X_c=1} = -\frac{4\pi}{16+\pi} = -0.6565$$

Il modulo e la fase del punto B sono i seguenti:

$$M_B = 0.6565, \qquad \varphi_B = 180^o$$

I parametri da utilizzare nelle formule di inversione sono:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{0.6565}{2.5465} = 0.2578, \qquad \varphi = -45^o$$

Utilizzando le formule di inversione si ottiene la seguente rete ritardatrice:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi} = 1.615, \quad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin\varphi} = 11.387 \quad \rightarrow \quad C(s) = \frac{1 + 1.615\,s}{1 + 11.387\,s}$$

e) Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare la seguente rete correttrice

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s+2)}{s(s+3)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

Sol. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(z) = \left.\frac{(s+2)}{s(s+3)}\right|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{T(1 - z^{-1} + 2T)}{(1 - z^{-1})(1 - z^{-1} + 3T)}$$

Per $T = 0.1$ si ha:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{0.1(1.2 - z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1.3 - z^{-1})} = \frac{0.12 - 0.1\,z^{-1}}{1.3 - 2.3\,z^{-1} + z^{-2}}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m(k) = \frac{1}{1.3}[2.3\,m(k-1) - m(k-2) + 0.12\,e(k) - 0.1\,e(k-1)]$$

cioè:

$$m(k) = 1.7692\,m(k-1) - 0.7692\,m(k-2) + 0.0923\,e(k) - 0.0769\,e(k-1)]$$

f) Partendo da condizioni iniziali nulle, calcolare la risposta $y(n)$ della seguente equazione alle differenze

$$y(n+1) - 0.4\,y(n) = x(n)$$

quando in ingresso è presente la successione periodica $x(n) = (-1)^n$.

Soluzione. L'equazione alle differenze genera la seguente funzione discreta $G(z)$:

$$y(n+1) - 0.4y(n) = x(n) \qquad \leftrightarrow \qquad G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z - 0.4}.$$

La $\mathcal{Z}$-trasformata del segnale di ingresso $x(n) = (-1)^n$ è:

$$X(z) = \frac{z}{z+1}.$$

La $\mathcal{Z}$-trasformata $Y(z)$ del segnale di uscita è quindi la seguente:

$$Y(z) = G(z)X(z) = \frac{z}{(z+1)(z-0.4)}.$$

Mediante il metodo della scomposizione in fratti semplici si ricava:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z+1)(z-0.4)} = \frac{5}{7(z-0.4)} - \frac{5}{7(z+1)}$$

e quindi:

$$Y(z) = \frac{5z}{7(z-0.4)} - \frac{5z}{7(z+1)} \qquad \rightarrow \qquad y(n) = \frac{5}{7}[(0.4)^n - (-1)^n].$$

Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Controlli Automatici B

30 Giugno 2015 - Domande Teoriche

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. La risposta al test è considerata corretta solo se tutte le affermazioni corrette sono state contrassegnate.

1. Posto $T = 0.5$ e utilizzando la corrispondenza tra piano-s e piano-z, calcolare il tempo di assestamento T_a della risposta impulsiva $g(k)$ del sistema discreto $G(z) = \frac{z}{z-0.4}$:

$$z = e^{-\sigma T} \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{1}{T}|\ln z| \quad \rightarrow \quad T_a = \frac{3}{\sigma} = \frac{3\,T}{|\ln(z)|} = \frac{3 \cdot 0.5}{|\ln(0.4)|} = 1.637 \text{ s.}$$

2. Sia dato il seguente sistema dinamico:

$$G(s) = \frac{(s+1)(s+3)}{(s+2)^2+1}$$

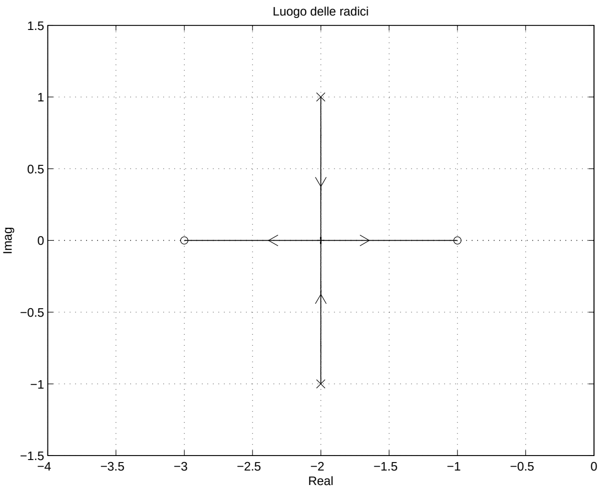
1) Disegnare qualitativamente il luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$.

2) Determinare la posizione del punto di diramazione presente sull'asse reale negativo:

$$\sigma_1 = -2,$$

3) Determinare per quale valore di K i due poli del sistema retroazionato si trovano nel punto di diramazione $s = \sigma_1$:

$$\bar{K} = -\left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=-2} = -\left.\frac{(s+2)^2+1}{(s+1)(s+3)}\right|_{s=-2} = 1$$



3. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{k\to 0} y(k)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{k\to\infty} y(k)$ del segnale $y(k)$ corrispondente alla seguente funzione $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{z\,(1+3\,z)}{(1-z)(2+z)} \qquad \rightarrow \qquad y_0 = -3, \qquad y_\infty = \nexists$$

4. Scrivere la funzione di trasferimento discreta $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ corrispondente alla seguente equazione alle differenze:

$$y_{k+1} + 2\,y_k + 3\,y_{k-1} + 5\,y_{k-2} = 6\,x_{k+1} + 4\,x_{k-1} \qquad \rightarrow \qquad G(z) = \frac{6\,z + 4\,z^{-1}}{z + 2 + 3\,z^{-1} + 5\,z^{-2}}$$

5. Sia $X(z) = \mathcal{Z}[x(k)]$. Enunciare il teorema della traslazione "in anticipo" nel tempo:

$$\mathcal{Z}[x(t+nT)] = z^n \left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}\right]$$

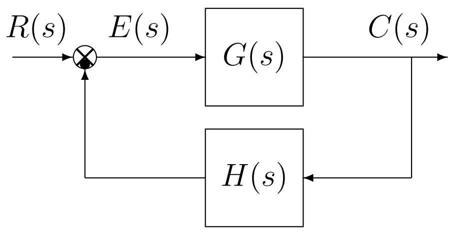
6. Calcolare la $\mathcal{Z}$-trasformata $X(z)$ dei seguenti segnali tempo continui $x(t)$ quando $t = k\,T$:

$$x(t) = 2^{-3t} \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{z}{(z - 2^{-3T})} \qquad\qquad x(t) = 5\,t \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{5\,T\,z}{(z-1)^2}$$

7. Calcolare la soluzione $y(n)$ della seguente equazione alle differenze a partire dalla condizione iniziale $y(0) = 3$:

$$y(n+1) + 0.5\,y(n) = 0 \qquad \rightarrow \qquad y(n) = 3\,(-0.5)^n.$$

8. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere il legame che lega la variazione relativa del sistema $H(s)$ alla variazione relativa del sistema retroazionato $G_0(s)$ quando varia un parametro β interno alla funzione di trasferimento $H(s)$:

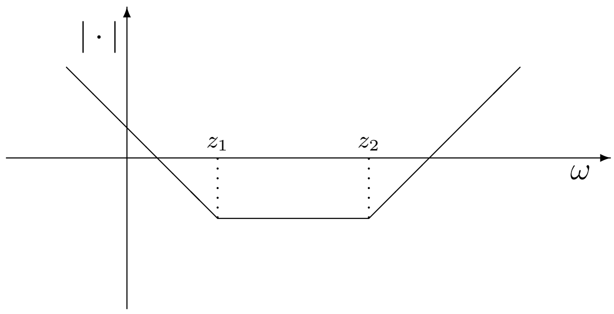


$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{-G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} \; \frac{\Delta H(s)}{H(s)}$$

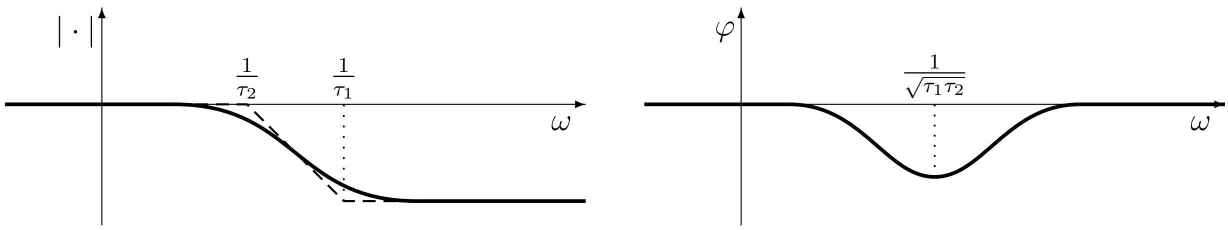
9. Fornire l'enunciato del Teorema del baricentro: ... *La somma dei poli del sistema ottenuto chiudendo in retroazione un sistema dinamico descritto da una funzione di trasferimento $G(s)$ razionale fratta con polinomio a denominatore di grado superiore di almeno due a quello del polinomio a numeratore è indipendente dal valore del guadagno statico di anello e dalle posizioni degli zeri ed è uguale alla somma dei poli del sistema ad anello aperto.*

10. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un regolatore standard PID e a fianco disegnare qualitativamente il corrispondente diagramma di Bode dei moduli nell'ipotesi di zeri reali distinti:

$$G(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_d s} + T_s s\right)$$



11. Tracciare i diagrammi di bode (moduli e fasi) di una rete ritardatrice $C(s) = \frac{(1+\tau_1 s)}{(1+\tau_2 s)}$, $(\tau_1 < \tau_2)$:



12. Sia $Y(X)\sin(\omega t + \varphi(X))$ la fondamentale del segnale periodico $y(t)$ presente all'uscita di una non linearità algebrica $y(t) = f(x(t))$ in risposta al segnale $x(t) = X\sin(\omega t)$ in ingresso. Fornire la definizione di funzione descrittiva $F(X)$:

$$F(X) = \frac{Y(X)}{X}\, e^{j\varphi(X)}.$$

13. Tracciare qualitativamente sul piano z: A) i luoghi a coefficiente di smorzamento δ costante; B) i luoghi a decadimento esponenziale costante: