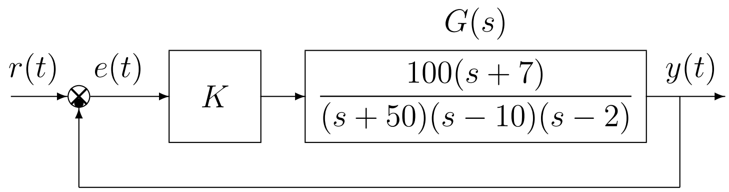
Controlli Automatici B

29 Giugno 2017 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



a.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K^*. Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Sol. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$ é mostrato in Fig. 1.

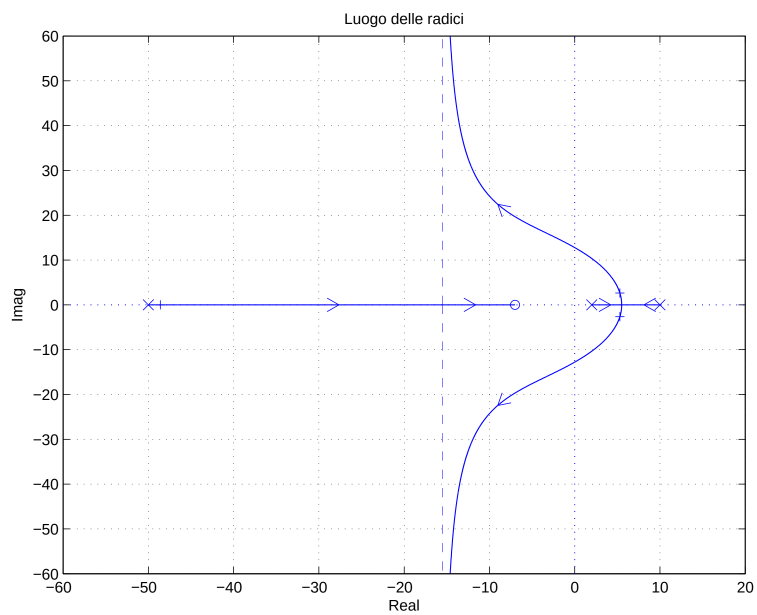


Figura 1: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare di $K_1 > 0$.

Il centro degli asintoti σ_a è il seguente:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-50 + 10 + 7 + 2) = -15.5$$

L'intersezione con l'asse immaginario si calcola utilizzando il criterio di Routh:

$$1 + K\,G(s) = 0 \qquad \rightarrow \qquad (s+50)(s-10)(s-2) + 100\,K(s+7) = 0$$

$$s^3 + 38s^2 + (100K - 580)s + 700K + 1000 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 100K - 580 \\ 2 & 38 & 700K + 1000 \\ 1 & 38(100K - 580) - (700K + 1000) & \\ 0 & 700K + 1000 & \end{array}$$

Il sistema risulta essere stabile per:

$$K > \frac{23040}{3100} = 7.4323 = K^*$$

L'intersezione con l'asse immaginario si ha alla pulsazione:

$$\omega^* = \sqrt{100K^* - 580} = 12.776$$

a.2) Determinare per quale valore $\bar{K}$ di K il sistema retroazionato "stabile" ha i poli alla massima distanza dall'asse immaginario.

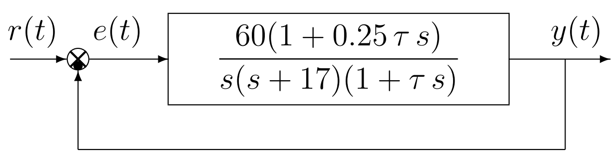
Sol. La massima distanza dei poli dall'asse immaginario si ha quando i 3 poli del sistema retroazionato sono allineati. Tale condizione si calcola facilmente utilizzando il teorema del baricentro:

$$3\sigma_0 = -50 + 10 + 2 \qquad \rightarrow \qquad \sigma_0 = \frac{-38}{3} = -12.666$$

Il corrispondente valore di $\bar{K}$ si calcola nel modo seguente:

$$\bar{K} = -\frac{1}{G(s)}\bigg|_{s=\sigma_0} = -\frac{(\sigma_0+50)(\sigma_0-2)(\sigma_0-10)}{100(\sigma_0+7)} = 21.9022$$

a.3) Tracciare qualitativamente il contorno delle radici del seguente sistema retroazionato al variare del parametro $\tau > 0$. Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".



Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente

$$s(s+17)(1+\tau\, s) + 60(1+0.25\,\tau\, s) = 0 \qquad \rightarrow \qquad s(s+17) + 60 + \tau\, s[s(s+17)+15] = 0$$

da cui si ricava L'equazione caratteristica $1 + \tau\, G_1(s) = 0$:

$$1 + \frac{\tau\, s[s^2+17s+15]}{s^2+17s+60} = 0 \qquad \rightarrow \qquad 1 + \frac{\tau\, s(s+0.934)(s+16.07)}{(s+5)(s+12)} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\alpha > 0$ è mostrato in Fig. 2.

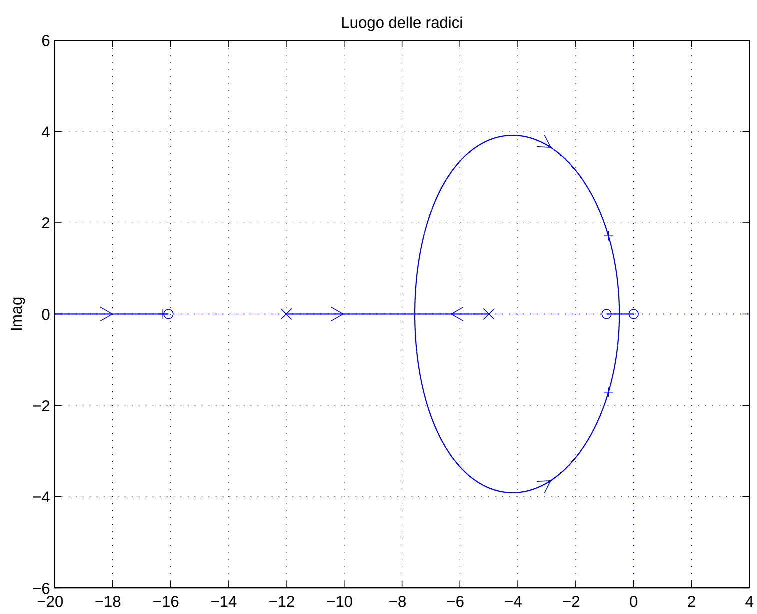
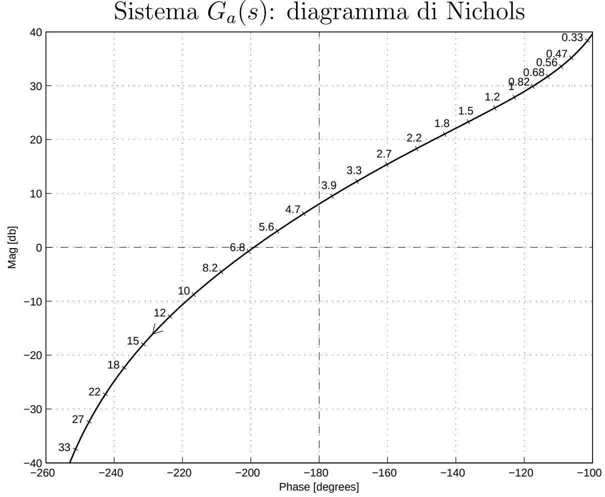
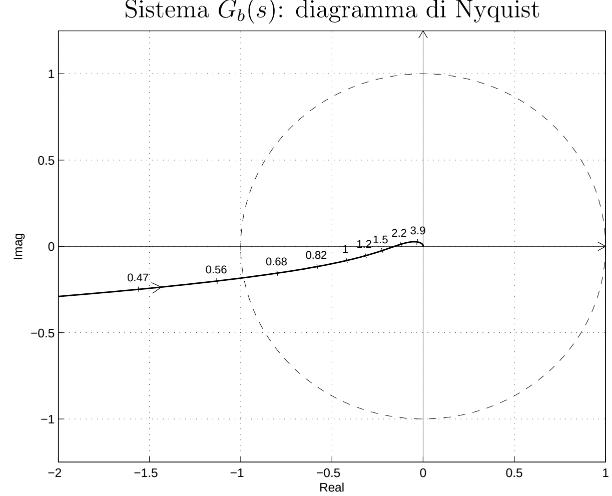


Figura 2: Contorno delle radici del sistema $G_2(s)$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

b) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi $G_a(s)$ e $G_b(s)$:





b.1) Per il sistema $G_a(s)$, progettare una rete correttrice in grado di garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_a = 5$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.

Sol. La posizione del punto B è completamente determinata dalla specifica di progetto $B = M_B\, e^{j\varphi_B}$: $M_B = -14$ db $= 0.2$ e $\varphi_B = -180°$. La regione di ammissibilitá è mostrata in grigio in Fig. 3. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 3.3$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 4.0961, \qquad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 191.1°.$$

Sostituendo i valori di M, φ e ω all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 1.47$ e $\tau_2 = 30.7$ della rete correttrice $C_1(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.0488, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -11.1° \qquad \rightarrow \qquad C_1(s) = \frac{(1 + 1.47\, s)}{(1 + 30.7\, s)}.$$

Il diagramma di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 3.

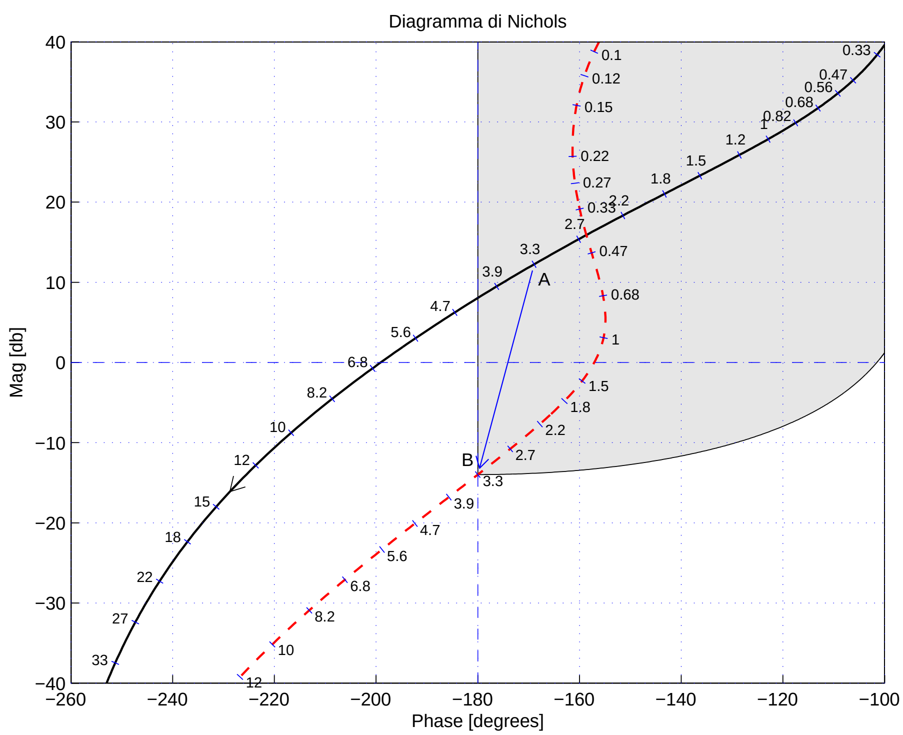


Figura 3: Diagrammi di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)\, G_a(s)$.

Sintesi della rete correttrice $C_1(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A:

$$
\begin{array}{rl}
\omega_A = & [\;3.9 \quad 3.3 \quad 2.7 \quad 2.2 \quad 1.8 \quad 1.5 \quad 1.2 \quad 1 \quad 0.82\;] \\
M_A = & [\;2.982 \quad 4.096 \quad 5.865 \quad 8.25 \quad 11.25 \quad 14.61 \quad 19.68 \quad 24.69 \quad 31.21\;] \\
\varphi_A = & [\;-176.3 \quad -168.9 \quad -160.2 \quad -151.5 \quad -143.3 \quad -136.3 \quad -128.6 \quad -122.9 \quad -117.5\;] \\
M = & [\;0.0670 \quad 0.0488 \quad 0.0341 \quad 0.0242 \quad 0.0177 \quad 0.0136 \quad 0.0101 \quad 0.0080 \quad 0.0064\;] \\
\varphi = & [\;-3.721 \quad -11.08 \quad -19.83 \quad -28.54 \quad -36.7 \quad -43.67 \quad -51.44 \quad -57.09 \quad -62.5\;] \\
\tau_1 = & [\;3.678 \quad 1.47 \quad 0.9898 \quad 0.8128 \quad 0.7287 \quad 0.6852 \quad 0.6534 \quad 0.6374 \quad 0.626\;] \\
\tau_2 = & [\;54.97 \quad 30.74 \quad 30.99 \quad 38.41 \quad 51.53 \quad 69.85 \quad 104.2 \quad 146.4 \quad 213.9\;]
\end{array}
$$

b.2) Per il sistema $G_b(s)$, progettare una rete correttrice in modo da garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = 50^o$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.

Sol. La specifica sul margine di fase $M_\varphi = 50^o$ definisce completamente la posizione del punto $B = M_B\, e^{j\varphi_B}$: $M_B = 1$ e $\varphi_B = 230°$. La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 4. Il punto $A = G_b(j\omega_A)$ scelto per la sintesi della rete correttrice è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 1$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.4267, \qquad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 191.1°.$$

Sostituendo i valori di M, φ e $\omega = \omega_A$ all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 2.492$ e $\tau_2 = 0.5589$ della rete correttrice $C(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 2.3436, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 38.93° \qquad \rightarrow \qquad C_2(s) = \frac{(1 + 2.492\, s)}{(1 + 0.5589\, s)}.$$

I diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

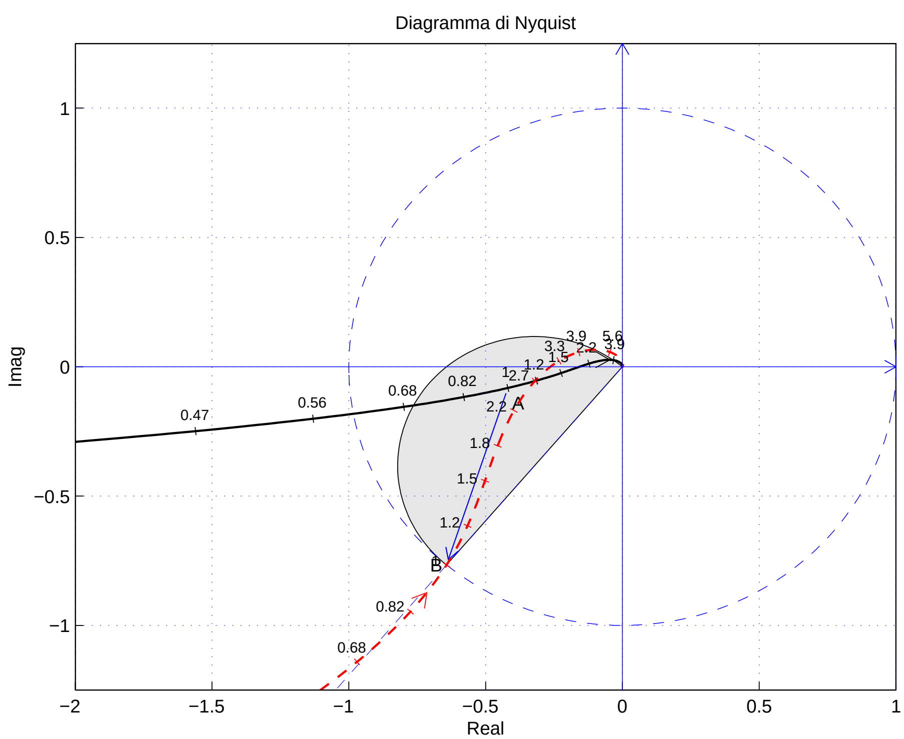
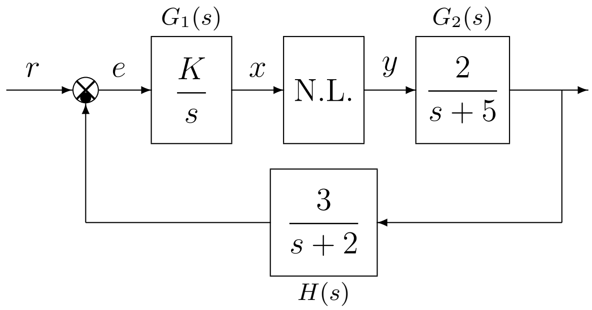


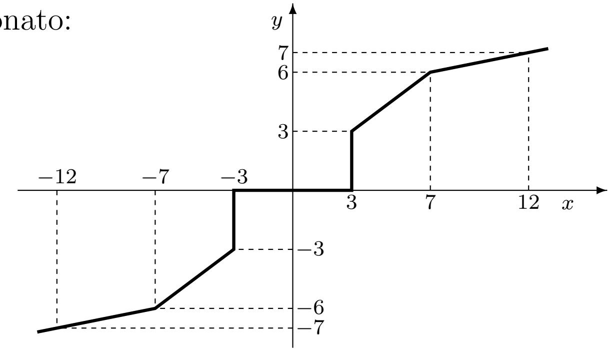
Figura 4: di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)\,G_b(s)$.

Sintesi della rete correttrice $C_1(s)$ con altri valori del guadagno K: ω_A:

$$
\begin{array}{rl}
\omega_A = & [\;2.2 \quad 1.5 \quad 1.2 \quad 1 \quad 0.82\;] \\
M_A = & [\;0.1225 \quad 0.2253 \quad 0.3192 \quad 0.4267 \quad 0.5914\;] \\
\varphi_A = & [\;174.3 \quad -173.8 \quad -170.3 \quad -168.9 \quad -168.6\;] \\
M = & [\;8.162 \quad 4.438 \quad 3.133 \quad 2.344 \quad 1.691\;] \\
\varphi = & [\;-304.3 \quad 43.79 \quad 40.29 \quad 38.93 \quad 38.59\;] \\
\tau_1 = & [\;4.181 \quad 3.581 \quad 3.055 \quad 2.492 \quad 1.778\;] \\
\tau_2 = & [\;0.2427 \quad 0.4784 \quad 0.5716 \quad 0.5589 \quad 0.3719\;]
\end{array}
$$

c) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:





c.1) Posto $K = 1$, determinare per quale valore r_1 dell'ingresso r il punto di lavoro del sistema retroazionato è posizionato in $(x_1, y_1) = (5, 4.5)$.

Soluzione. Il sistema è caratterizzato dai seguenti guadagni statici: $K_1 = \infty$, $K_2 = \frac{2}{5}$ e $K_3 = \frac{3}{2}$. La retta di carico della parte lineare del sistema è una retta orizzontale di ordinata:

$$y = \frac{r_1}{K_2 K_3} \quad \rightarrow \quad r_1 = K_2 K_3 y \quad \rightarrow \quad r_1 = \frac{2}{5}\frac{3}{2} 4.5 = 2.7$$

c.2) Posto $K = 1$ ed utilizzando il criterio del cerchio, dire se il sistema retroazionato è stabile o meno nell'intorno del punto $(x_1, y_1) = (5, 4.5)$.

Soluzione. Le pendenze α e β di 2 rette che centrate in $(x_0, y_0) = (5, 4.5)$ racchiudono a settore tutta la non linearità sono le seguenti:

$$\alpha = \frac{1}{5}, \qquad \beta = \frac{4.5}{2} = 2.25.$$

Il cerchio critico interseca il semiasse reale negativo nei punti:

$$-\frac{1}{\alpha} = -5, \qquad -\frac{1}{\beta} = -\frac{2}{4.5} = 0.444.$$

La funzione $G_1(s)$ che descrive la parte lineare del sistema è :

$$G_1(s) = \frac{6}{s(s+2)(s+5)}$$

Il margine di ampiezza $\bar{K}^*$ e la pulsazione ω^* della funzione $G_1(s)$ si determinano mel seguente modo:.

$$K^* = \frac{2 \cdot 5 \cdot (2+5)}{6} = \frac{70}{6} = \frac{35}{3} = 11.66, \qquad \omega^* = \sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{10} = 3.1623$$

Il valore di $\bar{K}^*$ è maggiore di β:

$$\bar{K}^* > \beta$$

per cui in base al criterio del cerchio si puó concludere che il sistema retroazionato è globalmante asintoticamente stabile nell'intorno del punto di lavoro (5, 4.5). In Fig. 5 è mostrato il diagramma di Nyquist della funzione $G_1(s)$ sovrapposto al cerchio critico.

c.3) Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità $y(x)$ nell'intorno del punto $(0, 0)$. Utilizzare delle variabili (per esempio: $m_1, m_2, \ldots$) per rappresentare gli eventuali valori non noti minimi e massimi della funzione $F(X)$.

Soluzione. L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ è mostrato in Fig. 6. Il valore m_1 del massimo intermedio può essere calcolato solo conoscendo la $F(X)$ per $X > 3$. Per $X \to \infty$ la $F(X)$ tende al valore finale minimo $m_3 = 0.2$.

c.4) Discutere "qualitativamente" (in funzione anche dei parametri $m_1, m_2, \ldots$) l'esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno $K > 0$.

Soluzione. Per $K = 1$, il margine di ampiezza $\bar{K}^*$ del sistema $G_1(s)$ è $\bar{K}^* = 11.66$. Per $K \neq 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $K\,G_1(s)$ è $K^* = \frac{\bar{K}^*}{K}$. Al variare di K^* si possono avere le seguenti condizioni di funzionamento:

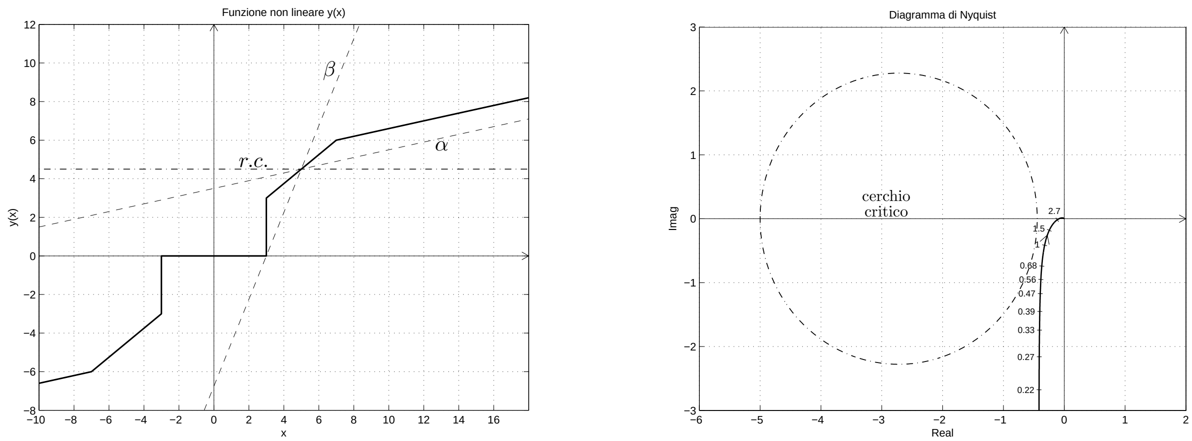


Figura 5: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ e cerchio critico.

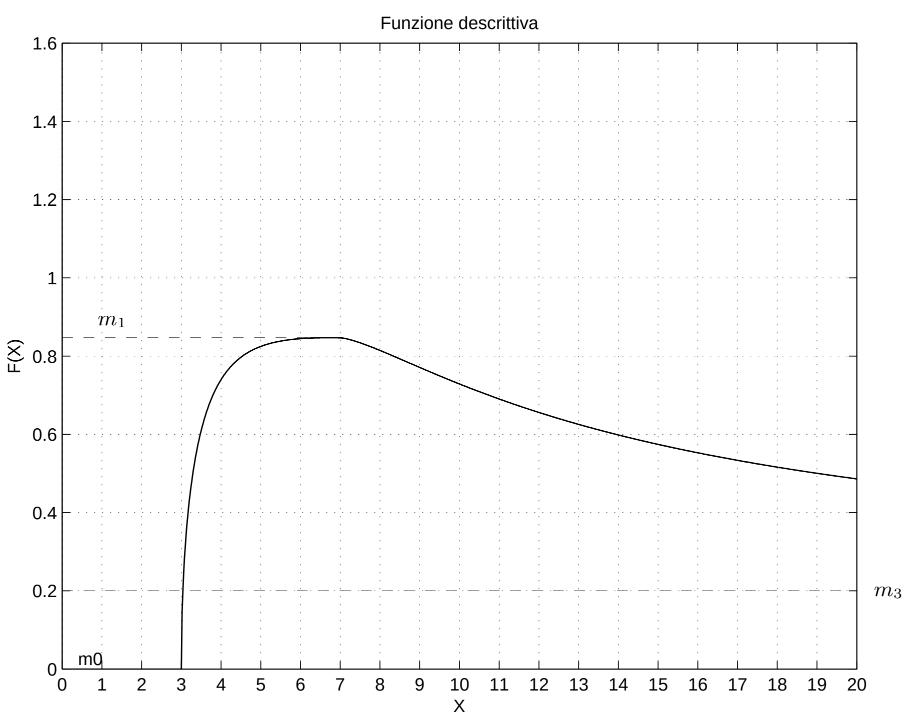


Figura 6: Andamento della funzione descrittiva $F(X)$.

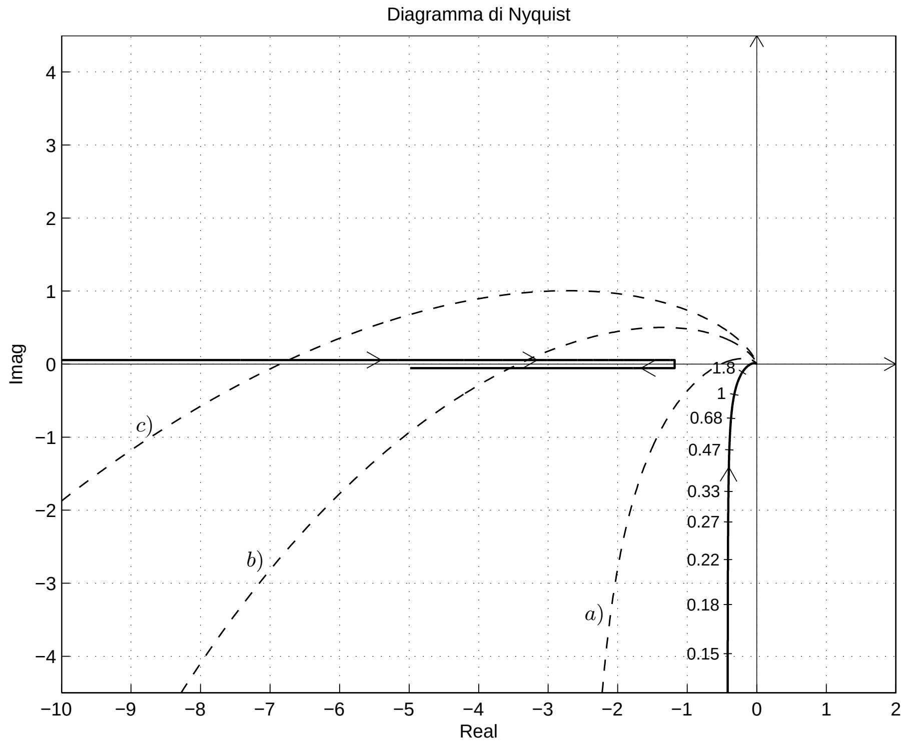


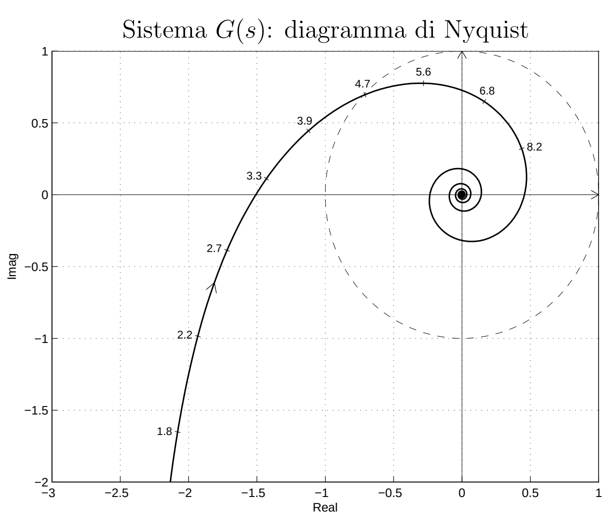
Figura 7: Discussione grafica al variare di K.

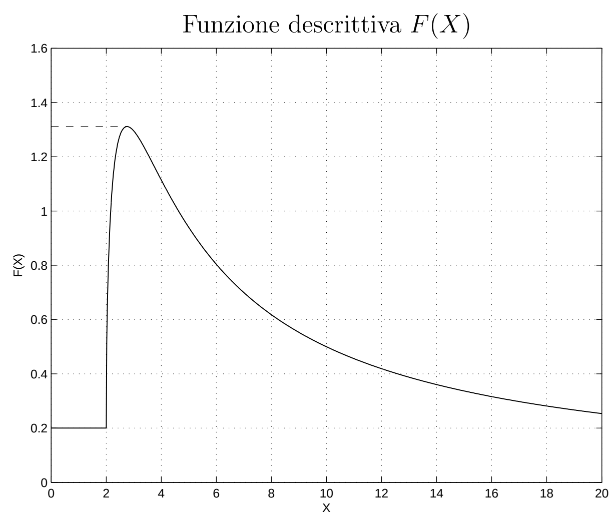
a) Per $K^* > m_1$, il diagramma di Nyquist della $G_1(s)$ non interseca la funzione $-1/F(X)$ per cui il sistema retroazionato è globalmente asintoticamente stabile perchè la funzione $-1/F(X)$ è tutta esterna al diagramma polare compeleto.

b) Per $m_3 < K^* < m_1$, il diagramma di Nyquist della $G_1(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in due punti: il primo punto corrisponde a un ciclo limite instabile, il secondo punto corrisponde a un ciclo limite stabile.

c) Per $K^* < m_3$ il diagramma di Nyquist della $G_1(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite instabile.

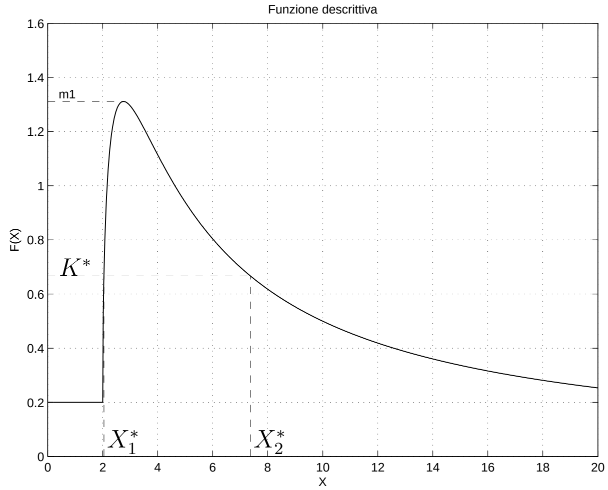
d) Dato il diagramma di Nyquist di un sistema $G(s)$ posto in retroazione negativa su di una non linearità $y = y(x)$ di cui viene fornita la funzione descrittiva $F(X)$.





d.1) Nei limiti della precisione dei grafici forniti, determinare l'ampiezza X^*, la pulsazione ω^* e la stabilità degli eventuali cicli limite stabili presenti nel sistema retroazionato.

Sol. Dal diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ si ricava (in modo approssimato) il margine di ampiezza $K^* \simeq \frac{1}{1.5} = 0.666$ e la pulsazione $\omega^* \simeq 3.1$.



Utilizzando la funzione descrittiva $F(X)$ che è stata fornita ed imponendo $F(X^*) = K^*$ si ricava:

$$X_1^* \simeq 2.1, \qquad\qquad X_2^* \simeq 7.4.$$

d.2) Progettare i parametri τ_1 e τ_2 di una rete correttrice $C(s) = \frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$ da mettere in cascata al sistema $G(s)$ in modo che nel sistema retroazionato sia presente un ciclo limite stabile di ampiezza $X^* = 3$ in corrispondenza della pulsazione $\omega^* = 2.2$.

Sol. Nel sistema retroazionato sarà presente un ciclo limite stabile di ampiezza $X^* = 3$ solo se il margine di ampiezza $\bar{K}^*$ del sistema compensato $C(s)G(s)$ ha il valore $\bar{K}^* \simeq 1.31$ che si ricava dalla $F(X)$ in corrispondenza del valore $X^* = 3$. Il sistema compensato dovrà quindi passare per il punto $B = -\frac{1}{\bar{K}^*}$:

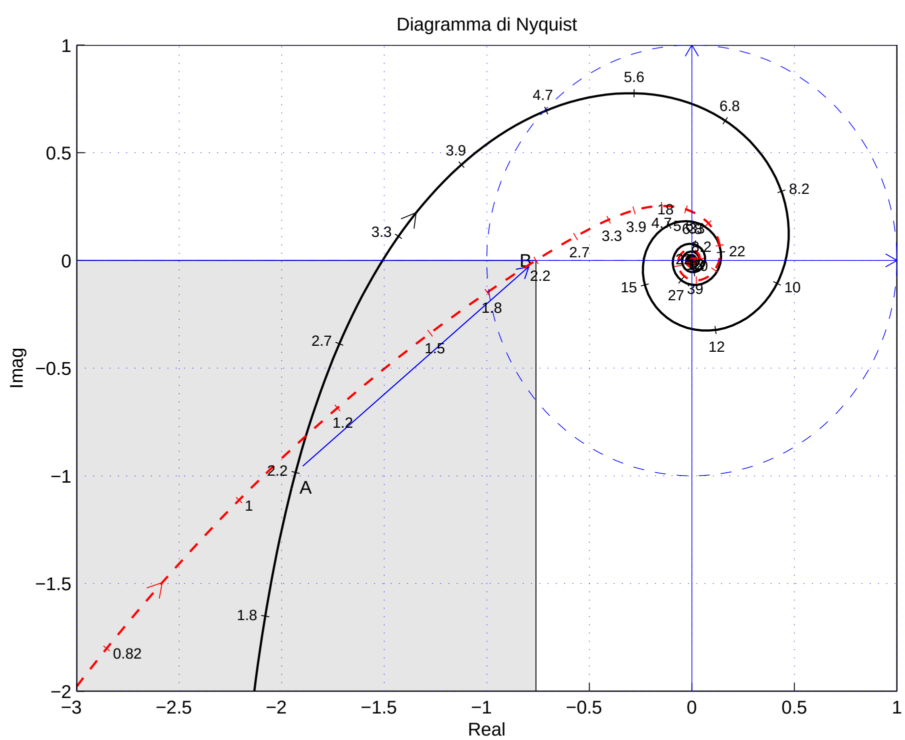
$$M_B = 0.76, \qquad \varphi_B = 180^o$$

Un punto A che deve essere portato in B è quello caratterizzato dalla pulsazione $\omega = 2.2$:

$$M_A = 2.1687, \quad \varphi_A = 207^o \qquad \longrightarrow \qquad M = \frac{M_B}{M_A} = 0.3504, \qquad \varphi = -27^o$$

La rete ritardatrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi} = 0.5412, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin\varphi} = 1.965 \qquad \rightarrow \qquad C(s) = \frac{1 + 0.5412\, s}{1 + 1.965\, s}$$



e) Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare la seguente rete correttrice

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s+7)}{(s+2)(s+1)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

Sol. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(z) = \left.\frac{(s+7)}{(s+2)(s+1)}\right|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{T(1-z^{-1}+7\,T)}{(1-z^{-1}+2\,T)(1-z^{-1}+T)}$$

Per $T = 0.1$ si ha:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{0.17 - 0.1\,z^{-1}}{(1.2-z^{-1})(1.1-z^{-1})} = \frac{0.17-0.1\,z^{-1}}{1.32-2.3\,z^{-1}+z^{-2}}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m(k) = \frac{1}{1.32}[2.3\,m(k-1) - m(k-2) + 0.17\,e(k) - 0.1\,e(k-1)]$$

cioè:

$$m(k) = 1.7424\,m(k-1) - 0.7576\,m(k-2) + 0.1288\,e(k) - 0.0758\,e(k-1)]$$

f) Partendo dalla condizione iniziale non nulla $y(0) = 1$, calcolare la risposta $y(n)$ al gradino unitario $x(n) = (1, 1, 1, \ldots)$ del seguente sistema dinamico discreto:

$$y(n+1) - y(n) = 3\,x(n)$$

Sol. Applicando la Z-trasformata alla precedente equazione alle differenze si ottiene:

$$z\,Y(z) - z\,y(0) - Y(z) = 3\,X(z)$$

Esprimendo $Y(z)$ in funzione di $X(z)$ e della condizione iniziale $y(0)$ si ottiene:

$$Y(z) = \frac{3}{z-1}\,X(z) + \frac{y(0)\,z}{z-1} = \frac{3\,z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1}$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(n) = 3\,n + 1$$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Controlli Automatici B

29 Giugno 2017 - Domande Teoriche

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono corrette.

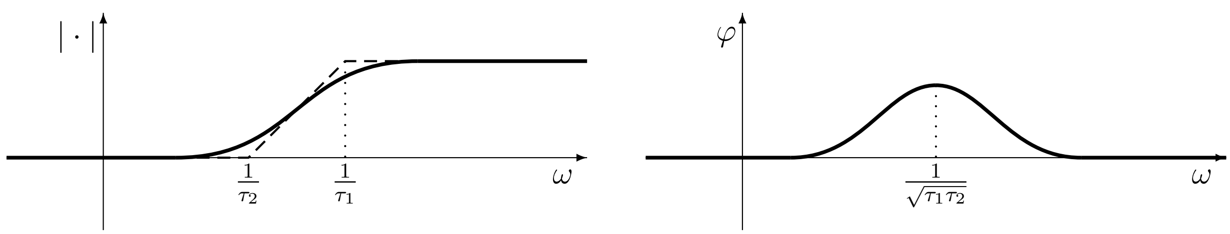
1. Scrivere la funzione di trasferimento discreta $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ corrispondente alla seguente equazione alle differenze:

$$y_{n+3} + 4\,y_{n+2} + 5\,y_{n+1} + 3\,y_n = 7\,x_{n+2} + 2\,x_{n+1} \qquad \rightarrow \qquad G(z) = \frac{7\,z^2 + 2\,z}{z^3 + 4\,z^4 + 5\,z + 3}$$

2. Sia $G(z)$ la $\mathcal{Z}$-trasformata della successione numerica $g(k)$. Scrivere gli enunciati dei teoremi del valore iniziale e del valore finale:

$$g(0) = g(k)|_{k=0} = \lim_{z\to\infty} G(z), \qquad\qquad g(\infty) = \lim_{k\to\infty} g(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})G(z).$$

3. Tracciare i diagrammi di bode (moduli e fasi) di una rete anticipatrice $C(s) = \frac{(1+\tau_1\,s)}{(1+\tau_2\,s)}$, $(\tau_1 > \tau_2)$:



4. Fornire l'enunciato del Teorema del baricentro: *La somma dei poli del sistema ottenuto chiudendo in retroazione un sistema dinamico descritto da una funzione di trasferimento $G(s)$ razionale fratta con ...*
polinomio a denominatore di grado superiore di almeno due a quello del polinomio a numeratore è indipendente dal valore del guadagno statico di anello e dalle posizioni degli zeri ed è uguale alla somma dei poli del sistema ad anello aperto.

5. In un sistema discreto a segnali campionati, qual è il legame che lega la variabile discreta z e la variabile s di Laplace?

$$z = e^{s\,T}.$$

6. Scrivere la funzione di trasferimento $H_0(s)$ del ricostruttore di ordine 0:

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}.$$

7. Calcolare la soluzione $y(n)$ della seguente equazione alle differenze a partire dalla condizione iniziale $y(0) = y_0$:

$$y(n+1) + 0.4\,y(n) = 0 \qquad\qquad \rightarrow \qquad\qquad y(n) = y_0\,(-0.4)^n.$$

8. Calcolare la $\mathcal{Z}$-trasformata $X(z)$ delle seguenti due successioni numeriche $x(k)$:

$$x(k) = 3\,k \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{3\,z}{(z-1)^2}, \qquad\qquad x(k) = e^{2\,k\,T} \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{z}{z - e^{2\,T}}.$$

9. Nel piano z i luoghi dei punti a coefficiente di smorzamento δ costante

- ○ sono rette uscenti dall'origine
- ⊗ sono tratti di spirali verso l'origine
- ○ sono circonferenze centrate nell'origine
- ○ nessuna delle precedenti risposte

10. L'uso di un regolatore standard di tipo PI è consigliato:

- ○ Se si desidera introdurre un anticipo di fase
- ⊗ Se si desidera amplificare alle basse frequenze
- ○ Se si desidera introdurre un ritardo di fase alle alte frequenze
- ⊗ Se si desidera avere errore a regime nullo per ingresso a gradino

11. Si consideri il sistema

$$G(s) = \frac{(s-1)(s+12)}{(s^2+4)(s+10)}$$

e il corrispondente luogo delle radici rappresentato in figura.

1) Determinare per quali valori di $K > 0$ il sistema retroazionato è stabile.

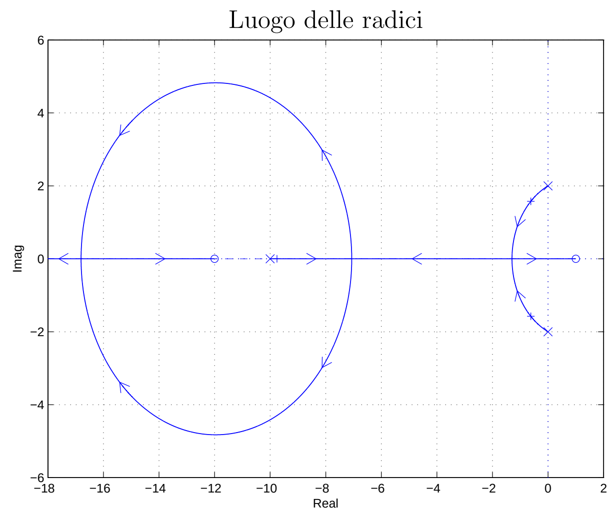
$$0 < K < -\left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=0} = 3.333$$

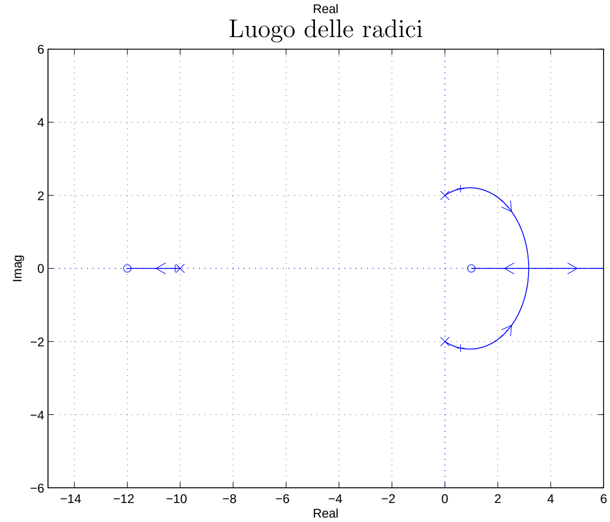
2) Nei limiti della precisione consentita dal grafico riportato sopra, calcolare il minimo tempo di assestamento ottenibile al variare di $K > 0$.

$$\sigma_1 = -1.298, \qquad T_a = \frac{3}{|\sigma_1|} = 2.31$$

essendo σ_1 il punto di diramazione più vicino all'asse immaginario.

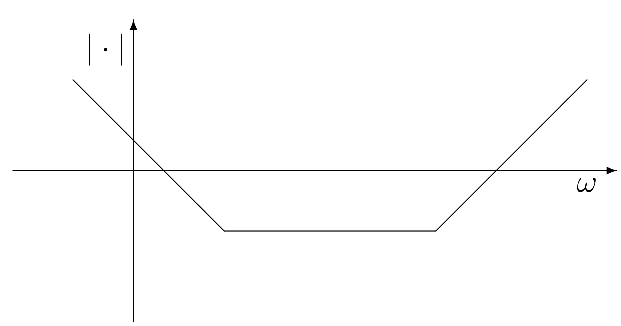
3) Nella figura a fianco, tracciare il luogo delle radici per valori $K < 0$.



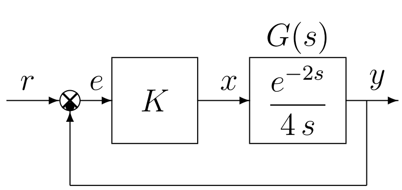


12. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un regolatore standard PID e a fianco disegnare qualitativamente il corrispondente diagramma di Bode dei moduli:

$$G(s) = K\left(1 + T_s s + \frac{1}{T_i s}\right)$$



13. Sia dato il seguente sistema retroazionato. Per quale valore di K il sistema retroazionato è stabile con un margina di fase $M_\varphi = 60°$?



$$K = \frac{4}{t_0}\left(\frac{\pi}{2} - M_\varphi\right) = \frac{4}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} = 1.0472$$