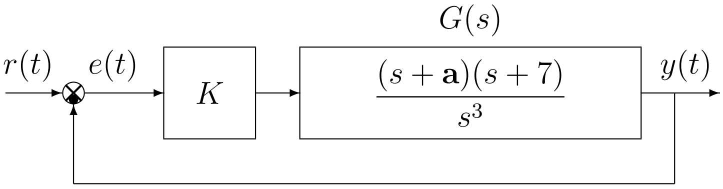
Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Controlli Automatici B
28 Giugno 2013 - Esercizi

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



a1) Posto $\mathbf{a} = 3$, tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K^*. Determinare esattamente la posizione σ_i dei punti di diramazione del luogo delle radici (Nota: i calcoli sono relativamente "semplici").

Sol. Posto $\mathbf{a} = 3$, l'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$ è mostrato in Fig. 1.

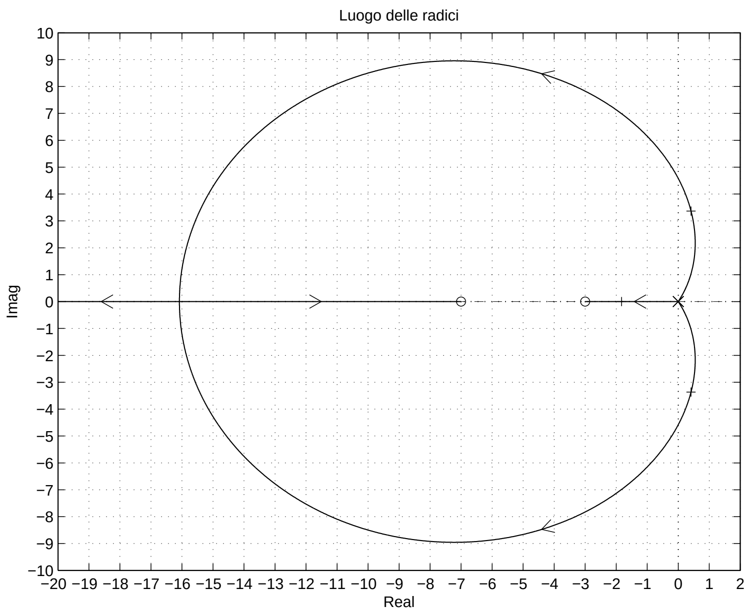


Figura 1: Luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$.

Il luogo delle radici ha un solo asintoto che coincide con il semiasse reale negativo. In questo caso non è necessario calcolare il centro degli asintoti. L'intersezione con l'asse immaginario si calcola utilizzando il criterio di Routh:

$$1 + K\,G(s) = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + K(s+3)(s+7) = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + Ks^2 + 10Ks + 21K = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 10K \\ 2 & K & 21K \\ 1 & K(10K-21) & \\ 0 & 21K & \end{array}$$

Il sistema retroazionato risulta essere stabile per

$$K > 0, \quad 10K - 21 > 0 \qquad \rightarrow \qquad K > \frac{21}{10} = 2.1 = K^*$$

L'intersezione con l'asse immaginario si ha in corrispondenza della pulsazione:

$$\omega^* = \sqrt{10K^*} = \sqrt{21} = 4.583$$

I punti di diramazione si ottengono risolvendo la seguente relazione:

$$\frac{d\,G(s)}{ds} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{(2s+10)s^3 - 3(s^2+10s+21)s^2}{s^6} = 0$$

dalla quale si ricava il vincolo:

$$(s^2+20s+63)s^2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \sigma_1 = -16.083, \quad \sigma_2 = -3.917, \quad \sigma_3 = 0.$$

I punti di diramazione che appartengono al luogo delle radici per $K > 0$ sono $\sigma_1 = -16.083$ e $\sigma_3 = 0$.

a2) Posto $K = 10$, tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\mathbf{a} > 0$. Determinare esattamente la posizione e il centro degli asintoti. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione "solo in modo qualitativo". Determinare per quale valore $\bar{\mathbf{a}}$ del parametro $\mathbf{a}$ i poli del sistema retroazionato sono alla massima distanza dall'asse immaginario.

Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente

$$1 + \frac{10(s+\mathbf{a})(s+7)}{s^3} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 10(s+\mathbf{a})(s+7) = 0$$

da cui si ricava la seguente equazione $1 + \mathbf{a}\,G_1(s) = 0$:

$$s^3 + 10s(s+7) + 10\,\mathbf{a}\,(s+7) = 0 \qquad \rightarrow \qquad 1 + \frac{\mathbf{a}\,10\,(s+7)}{s(s^2+10\,s+70)} = 0$$

Mettendo in evidenza gli zeri della funzione $G_1(s)$ si ottiene:

$$1 + \frac{\mathbf{a}\,10\,(s+7)}{s(s+5)^2 + 6.708^2} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\mathbf{a} > 0$ è mostrato in Fig. 2.

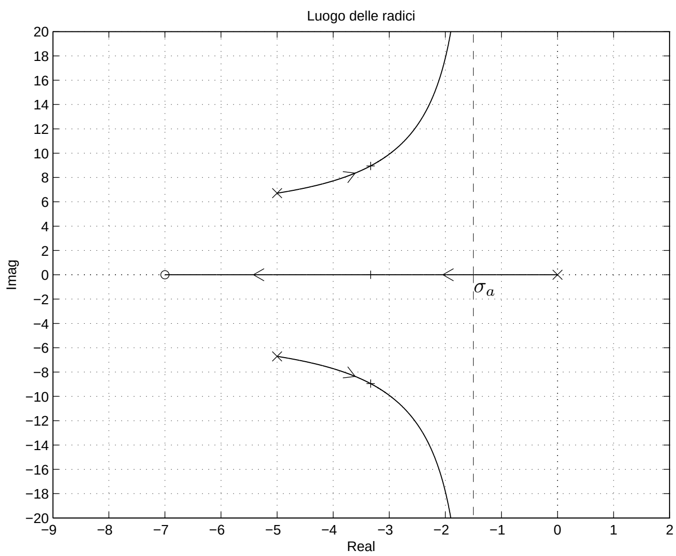


Figura 2: Contorno delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare del parametro $\mathbf{a} > 0$.

Nel contorno delle radici sono presenti 2 asintoti. Il centro degli asintoti è:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-10+7) = -1.5$$

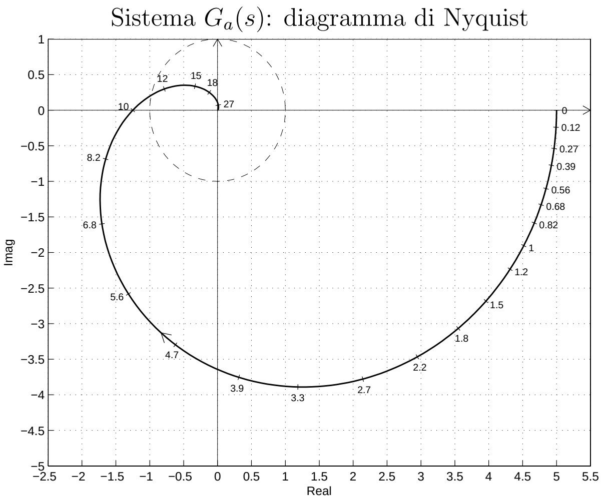
I poli del sistema retroazionato sono alla massima distanza dall'asse immaginario quando i poli sono allineati. Il sistema è di ordine $n = 3$ e ha grado relativo $r = 2$ per cui l'ascissa σ_0 della condizione di allineamento del poli può essere calcolata utilizzando il teorema del baricentro:

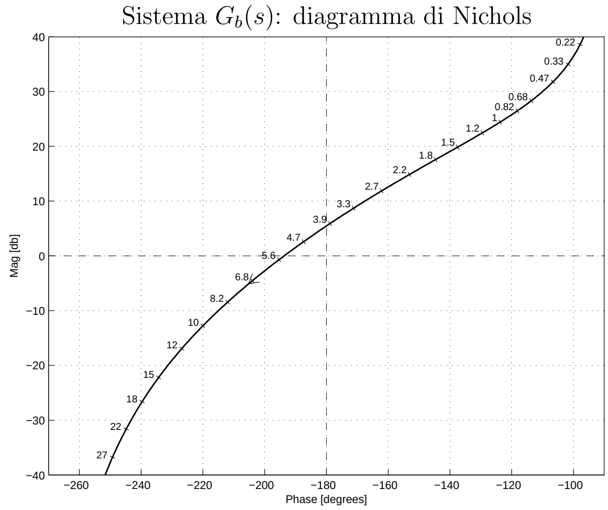
$$3\,\sigma_0 = \sum_{i=1}^{3} p_i = -10 \qquad \rightarrow \qquad \sigma_0 = -\frac{10}{3} = -3.333$$

Il valore $\bar{\mathbf{a}}$ del parametro $\mathbf{a}$ per cui si ha l'allineamento dei poli si calcola nel seguente modo:

$$\bar{\mathbf{a}} = - \left. \frac{1}{G_1(s)} \right|_{s=\sigma_0} = 4.3434$$

b) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi $G_a(s)$ e $G_b(s)$:





b.1) Per il sistema $G_a(s)$, progettare una rete correttrice $C(s)$ in grado di far passare la funzione di risposta armonica del sistema $C(s)G_a(s)$ per il punto B caratterizzato dalle seguenti coordinate: $B = (-0.5,\ -0.5)$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.

Sol. Il modulo e la fase del punto B si ricava dalle specifiche di progetto:

$$M_B = \sqrt{0.5} = 0.707, \qquad \varphi_B = 225^o$$

In questo caso è possibile utilizzare solo una rete ritardatrice. La regione di ammissibilitá è mostrata in grigio in Fig. 3.

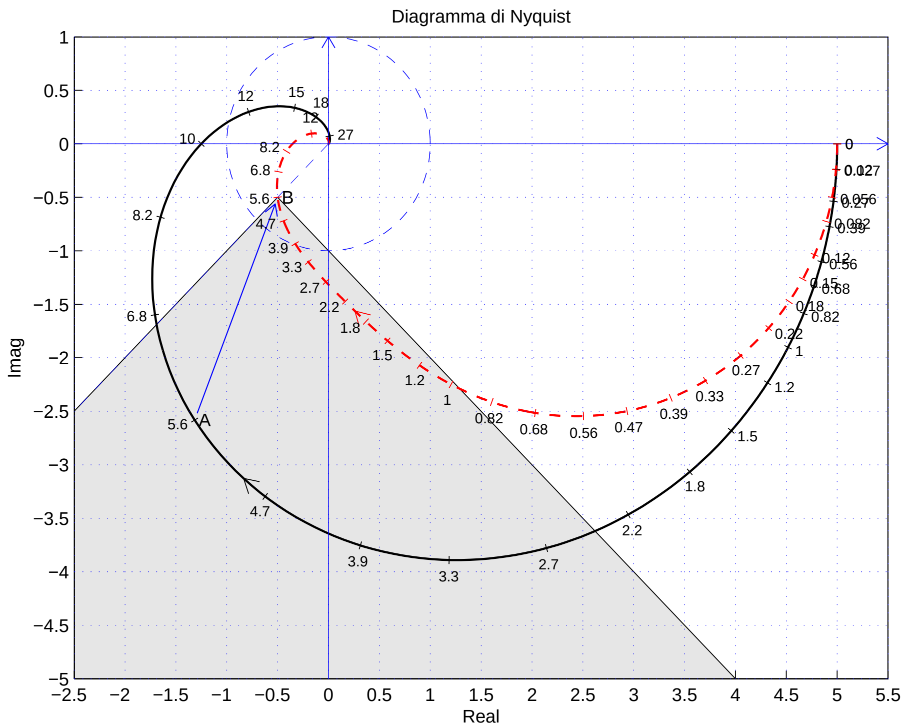


Figura 3: Diagrammi di Nyquisty delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)\,G_a(s)$.

Un punto A ammissibile è quello corrispondente alla pulsazione $\omega = 5.6$:

$$M_A = 2.898, \quad \varphi_A = 243^o \qquad \rightarrow \qquad M = \frac{M_B}{M_A} = 0.2440, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -18^o$$

La rete correttrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi} = 0.4086, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin\varphi} = 1.8187 \quad \rightarrow \quad C(s) = \frac{1 + 0.4086\, s}{1 + 1.8187\, s}$$

Reti correttrici relative ad altre scelte della pulsazione ω_A:

$$\begin{array}{rl} \omega_A = [& 5.6 \quad 4.7 \quad 3.9 \quad 3.3 \quad 2.7 \\ M_A = [& 2.898 \quad 3.354 \quad 3.767 \quad 4.066 \quad 4.344 \\ \varphi_A = [& -117 \quad -100.7 \quad -85.22 \quad -73.05 \quad -60.44 \\ M = [& 0.244 \quad 0.2108 \quad 0.1877 \quad 0.1739 \quad 0.1628 \\ \varphi = [& -18 \quad -34.31 \quad -49.78 \quad -61.95 \quad -74.56 \\ \tau_1 = [& 0.4085 \quad 0.2323 \quad 0.1538 \quad 0.1018 \quad 0.0397 \\ \tau_2 = [& 1.818 \quad 1.479 \quad 1.572 \quad 1.813 \quad 2.258 \end{array}$$

b.2) Per il sistema $G_b(s)$ progettare una rete ritardatrice in grado da garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_a = 5$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.

Sol. La specifica sul margine di ampiezza definisce completamente la posizione del punto B:

$$M_B = \frac{1}{5} = 0.2 \simeq -14 \text{ db}, \qquad \varphi_B = -180^o$$

La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 4.

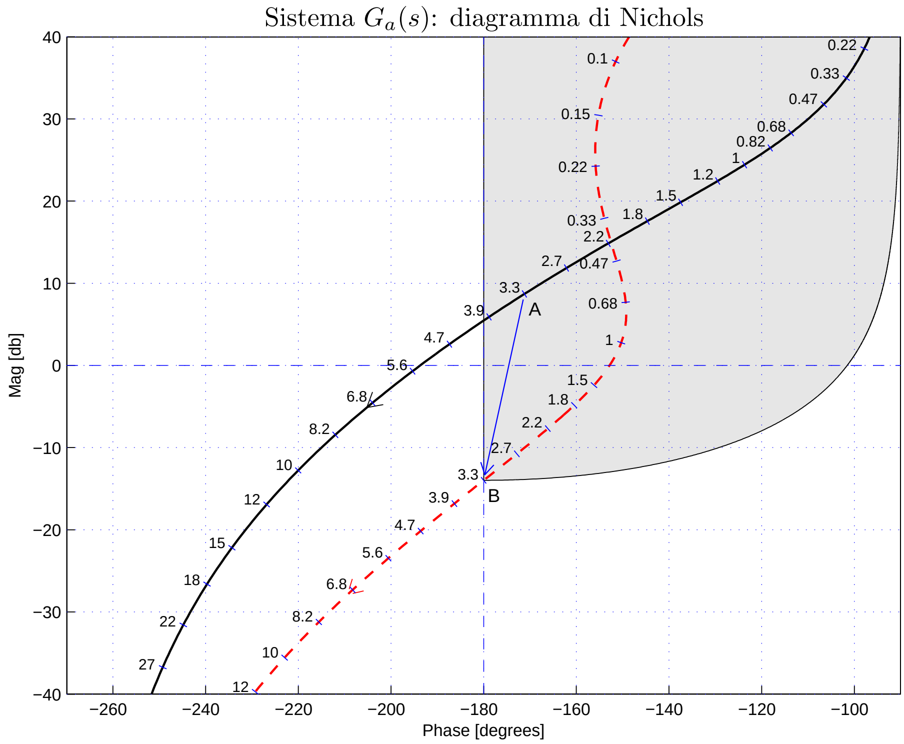


Figura 4: Diagrammi di Nichols delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)\, G_b(s)$.

Il punto A corrispondente alla pulsazione $\omega = 3.3$ può essere portato in B utilizzando una rete ritardatrice:

$$M_A = 2.722 = 8.699 \text{ db}, \qquad \varphi_A = -171.2^o$$

I parametri da utilizzare nelle formule di inversione sono:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.07346, \qquad \varphi = -8.802^o$$

La rete anticipatrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi} = 1.811, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin\varphi} = 25 \quad \rightarrow \quad C(s) = \frac{1 + 1.811\, s}{1 + 25\, s}$$

Il diagramma di Nichols delle funzioni $G_b(s)$ e $C_b(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 4. Reti correttrici relative ad altre scelte della pulsazione ω_A:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr}
\omega_A =[& 3.3 & 2.7 & 2.2 & 1.8 & 1.5 & 1.2 & 1 & 0.82\,] \\
M_A =[& 2.722 & 3.916 & 5.528 & 7.554 & 9.829 & 13.25 & 16.64 & 21.05\,] \\
\varphi_A =[& -171.2 & -162.1 & -153.1 & -144.7 & -137.5 & -129.5 & -123.7 & -118.1\,] \\
M =[& 0.0734 & 0.0510 & 0.0361 & 0.0264 & 0.0203 & 0.0150 & 0.0120 & 0.0095\,] \\
\varphi =[& -8.802 & -17.88 & -26.9 & -35.33 & -42.51 & -50.51 & -56.31 & -61.85\,] \\
\tau_1 =[& 1.811 & 1.087 & 0.8597 & 0.7583 & 0.7072 & 0.6705 & 0.6522 & 0.6393\,] \\
\tau_2 =[& 25 & 22.48 & 26.87 & 35.5 & 47.76 & 70.86 & 99.33 & 144.9\,]
\end{array}
$$

b.3) Sempre per il sistema $G_b(s)$, progettare i parametri K, τ_1 e τ_2 di una rete correttrice $C(s) = K\,\dfrac{1+\tau_1\,s}{1+\tau_2\,s}$ in modo da garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = 45^o$ e una larghezza di banda del sistema retroazionato $\omega_{f0} = 2.7$.

Sol. La posizione del punto $B = (M_\varphi - 180^o,\ 0 \text{ db})$ è univocamente determinata dalla specifica di progetto:

$$M_B = 1, \qquad\qquad \varphi_B = -135^o$$

Il punto A caratterizzato dalla pulsazione $\omega = 2.7$

$$M_A = 3.916 = 11.8569 \text{ db}, \qquad\qquad \varphi_A = -162.1^o$$

non può essere portato in B "direttamente" usando una rete ritardatrice o anticipatrice perchè non appartiene alle regioni del piano ammissibili. Utilizzando, per esempio, il parametro $K = 0.1$ è possibile portare il punto A in un punto A' che appartiene alla regine ammissibile per la sintesi di una rete anticipatrice:

$$M_{A'} = 0.3916 = -8.143 \text{ db}, \qquad\qquad \varphi_{A'} = -162.1^o$$

I parametri da utilizzare nelle formule di inversione sono:

$$M = \frac{M_B}{M_{A'}} = 2.553, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_{A'} = 27.12^o$$

La rete anticipatrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega\,\sin\varphi} = 1.351, \quad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega\,\sin\varphi} = 0.404 \quad \rightarrow \quad C(s) = \frac{1+1.351\,s}{1+0.404\,s}$$

I diagrammi di Nichols delle funzioni $G_b(s)$ e $C_3(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

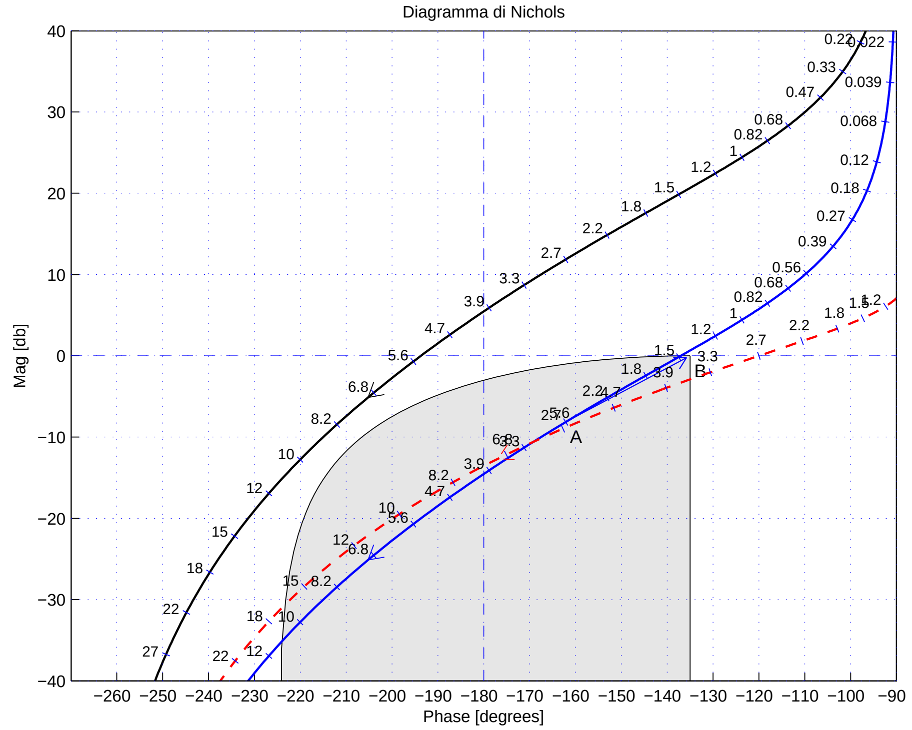
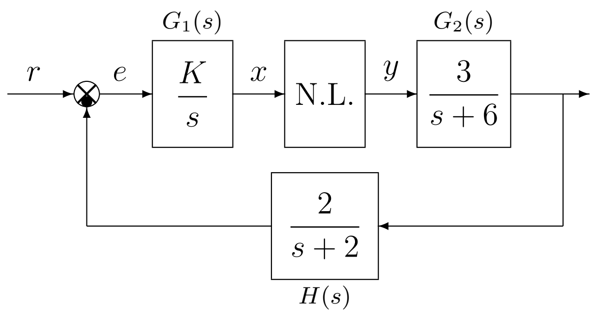
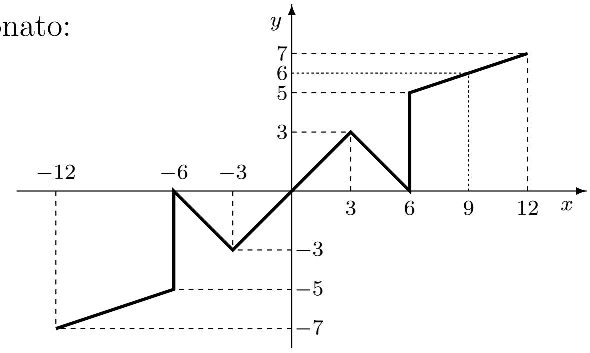


Figura 5: Diagrammi di Nichols delle funzioni $G_b(s)$ e $C_3(s)\,G_b(s)$.

c) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:





c.1) Posto $K = 1$, determinare per quali valori r_1 ed r_2 dell'ingresso r i punti di lavoro del sistema retroazionato sono posizionati in $(x_1,\, y_1) = (0,\, 0)$ e in $(x_2,\, y_2) = (9, 6)$.
Sol. I guadagni statici delle funzioni $G_1(s)$, $G_2(s)$ e $H_(s)$, rispettivamente, sono:

$$K_1 = \infty, \qquad K_2 = \frac{1}{2}, \qquad K_3 = 1.$$

La retta di carico della parte lineare del sistema è una retta orizzontale di ordinata:

$$y = \frac{r}{K_2 K_3} = 2\,r.$$

Imponendo il passaggio per i due punti $(x_1,\, y_1) = (0,\, 0)$ e $(x_2,\, y_2) = (9,\, 6)$ si ottiene:

$$r_1 = 0, \qquad r_2 = 3.$$

c.2) Posto $K = 1$, $r = r_2$ ed utilizzando il criterio del cerchio, dire se il sistema retroazionato è stabile o meno nell'intorno del punto $(x_2,\, y_2) = (9, 6)$.
Sol. Le pendenze α e β di 2 rette che centrate nel punto $(x_1,\, y_1) = (9,\; 6)$ racchiudono a settore tutta la non linearità sono le seguenti:

$$\alpha = \frac{1}{3}, \qquad \beta = 2.$$

Il cerchio critico interseca il semiasse reale negativo nei punti:

$$-\frac{1}{\alpha} = -3, \qquad -\frac{1}{\beta} = -\frac{1}{2}$$

Il margine di ampiezza K^* e la pulsazione ω^* della funzione $G(s) = G_1(s)\, G_2(s)\, H(s)$ si determinano utilizzando il criterio di Routh:

$$G(s) = \frac{6}{s(s+2)(s+6)} \qquad \rightarrow \qquad K^* = \frac{8 \cdot 12}{6} = 16, \qquad \omega^* = \sqrt{12} = 3.464.$$

Il valore di K^* è maggiore di β

$$K^* = 16 > \beta = 2$$

e il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ non interseca il cerchio critico e quindi, in base al criterio del cerchio, si può affermare che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile nell'intorno del punto di lavoro. In Fig. 6 è mostrato il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ sovrapposto al cerchio critico.

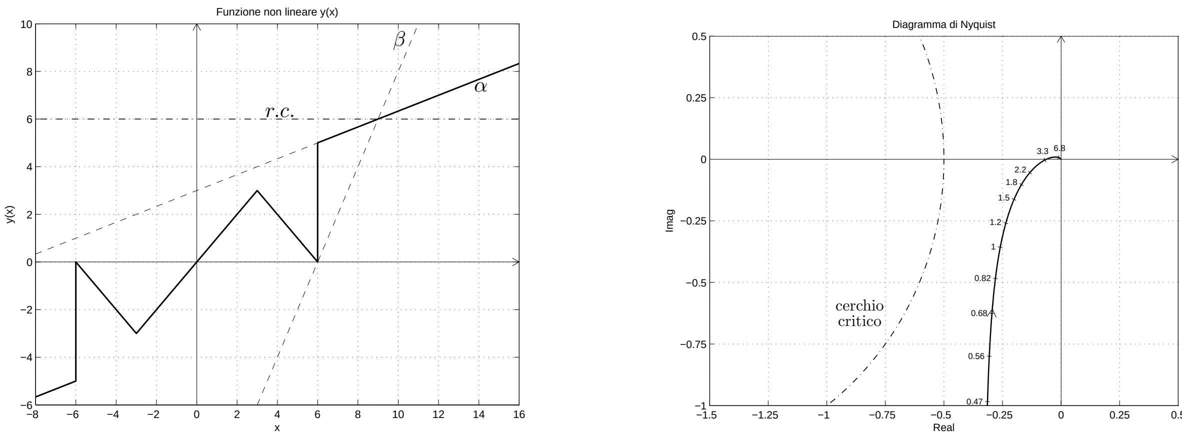


Figura 6: Diagramma di Nyquist della funzione $G_1(s)$ e cerchio critico.

c.3) Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità $y(x)$ nell'intorno del punto $(0, 0)$. Utilizzare le variabili m_0, m_1, m_2, ... per rappresentare gli eventuali valori minimi e massimi "non noti" della funzione $F(X)$.

Sol. L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ è mostrato in Fig. 7. Indichiamo:

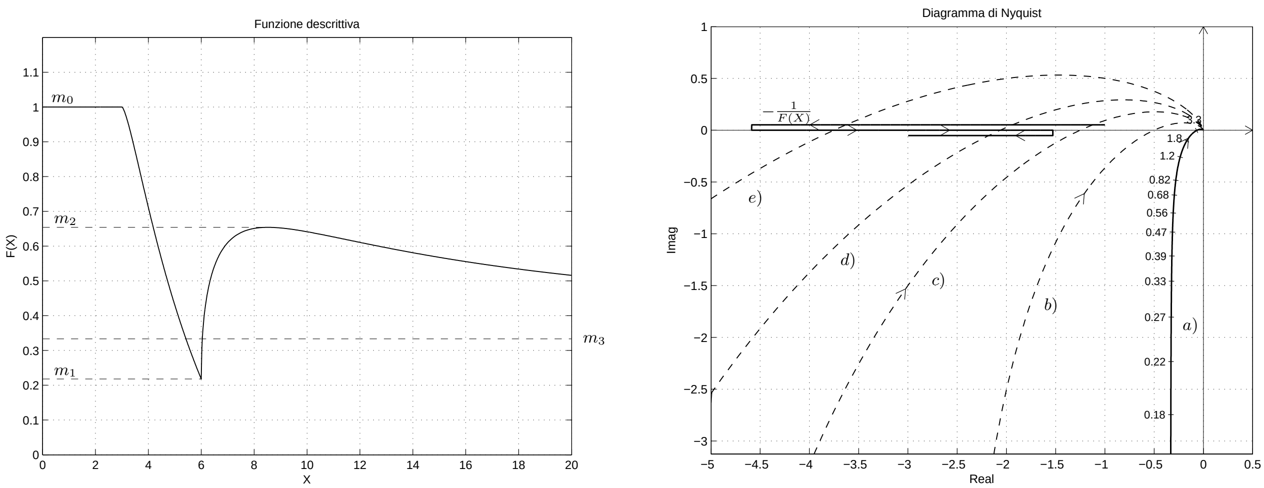


Figura 7: Andamento della funzione descrittiva $F(X)$.

a) con $m_0 = 1$ il valore massimo della funzione $F(X)$; b) con m_2 e con m_3 il minimo locale e il massimo locale della funzione $F(X)$ per $X \simeq 6$ e per $X \simeq 8$; c) con $m_3 = \frac{1}{3}$ il valore finale a cui tende la funzione $F(X)$ per $X \to \infty$. I valori m_2 e m_3 possono essere calcolati esattamente sono conoscendo con precisione la funzione $F(X)$.

c.4) Discutere "qualitativamente", anche in funzione dei parametri m_0, m_1, m_2, ..., l'esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno $K > 0$.

Sol. Per $K = 1$, il margine di ampiezza K_1^* del sistema $G_1(s)$ è $K_1^* = 16$. Per $K \neq 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $K\, G_1(s)$ è $K^* = \frac{K_1^*}{K} = \frac{16}{K}$. Al variare di K^* si possono avere le seguenti condizioni di funzionamento:

a) Per $K^* > m_0 = 1$ la funzione $-1/F(X)$ è tutta esterna al diagramma completo della funzione $G(s)$ per cui non vi sono cicli limite e il sistema retroazionato è stabile.

b) Per $m_2 < K^* < m_0$ il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile.

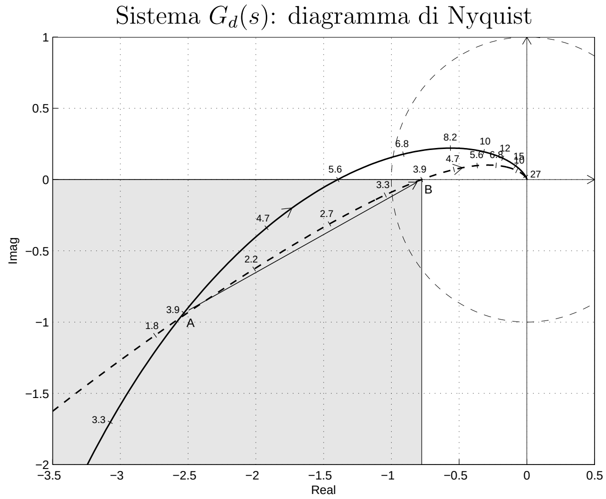
c) Per $m_3 < K^* < m_2$, il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in tre punti a cui corrispondono due cicli limite stabili (quelli esterni) e uno instabile (quello intermedio).

d) Per $m_1 < K^* < m_3$ il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in due punti a cui corrispondono un ciclo limite stabile (il primo) e uno instabile (il secondo).

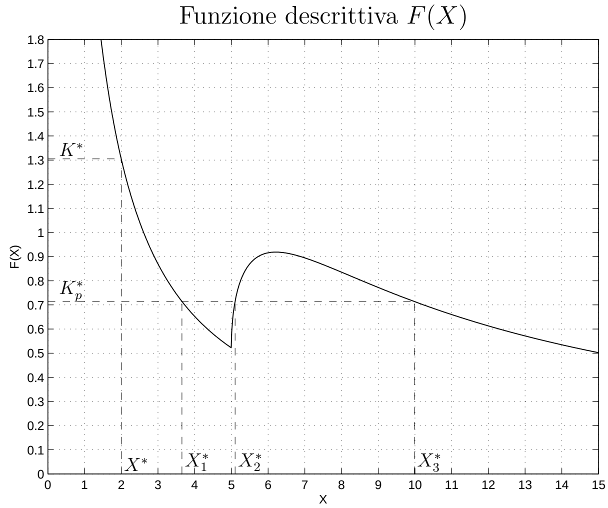
e) Per $K^* < m_1$, la funzione $-1/F(X)$ è tutta interna al diagramma completo della funzione $G(s)$ per cui non vi sono cicli limite e il sistema retroazionato è instabile.

d) Sia dato il diagramma di Nyquist di un sistema $G_d(s)$ posto in retroazione negativa su di una non linearità $y = y(x)$ di cui viene fornita la funzione descrittiva $F(X)$.

Sistema $G_d(s)$: diagramma di Nyquist



Funzione descrittiva $F(X)$



d.1) Nei limiti della precisione dei grafici forniti, determinare l'ampiezza X^*, la pulsazione ω^* e la stabilità degli eventuali cicli limite presenti nel sistema retroazionato.
Sol. Dal diagramma di Nyquist della funzione $G_d(s)$ si può leggere chiaramente il margine di ampiezza K_d^* del sistema e la pulsazione ω_d^* di attraversamento del semiasse reale negativo:

$$K_d^* \simeq -\frac{1}{-1.4} = 0.7143, \qquad \omega_d^* = 5.6.$$

Gli eventuali cicli limite si determinano imponendo $F(X) = K_d^*$. Utilizzando il grafico della funzione $F(X)$ si individuano tre cicli limite:

$$X_1^* \simeq 3.65, \qquad X_2^* \simeq 5.1, \qquad X_3^* \simeq 9.98$$

il primo e il terzo stabili e il secondo instabile. La pulsazione ω^* di tutti e tre i cicli limite è $\omega^* = \omega_d^* = 5.6$.

d.2) Progettare i parametri τ_1 e τ_2 di una rete correttrice $C_d(s) = \frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$ da mettere in cascata al sistema $G_d(s)$ in modo che il sistema retroazionato abbia un ciclo limite stabile di ampiezza $X^* = 2$ in corrispondenza della pulsazione $\omega^* = 3.9$.
Sol. Dal grafico della funzione $F(X)$ si ricava che nel sistema retroazionato sarà presente un ciclo limite stabile $X^* = 2$ solo se il margine di ampiezza del sistema $C_d(s)G_d(s)$ vale $K^* = F(X)|_{X=2} = 1.31$. Tale valore identifica completamente il modulo e la fase del punto $B = -\frac{1}{K^*}$ da utilizzare nella sintesi della rete correttrice:

$$M_B = \frac{1}{1.3051} = 0.766, \qquad \varphi_B = 180^o$$

In punto A è completamente determinato dalla specifica sulla pulsazione $\omega^* = 3.9$. Il modulo e la fase del punto A si ricavano in modo approssimato dal grafico:

$$M_A = 2.697, \qquad \varphi_A = 200.3^o.$$

I parametri da utilizzare nelle formule di inversione sono:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.2876, \qquad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -20.29^o$$

La rete ritardatrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi} = 0.4808, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin\varphi} = 1.877 \qquad \rightarrow \qquad C_1(s) = \frac{1 + 0.4808\, s}{1 + 1.877\, s}$$

e) Partendo da condizione iniziale $y(0) = 1$, calcolare la risposta $y(n)$ del seguente sistema dinamico discreto:

$$y(n+1) + 0.5\, y(n) = 2\, x(n)$$

quando in ingresso è presente un gradino di ampiezza unitaria $x(n) = 1$.

Sol. Applicando la $\mathcal{Z}$-trasformata alla precedente equazione alle differenze con condizione iniziale nulla $y(0) = 1$ si ottiene:

$$z\,[Y(z) - 1] + 0.5\, Y(z) = 2\, X(z) \qquad \rightarrow \qquad Y(z) = \frac{z}{z + 0.5} + \frac{2}{z + 0.5}\, X(z)$$

Aggiungendo la trasformata del segnale di ingresso si ottiene:

$$Y(z) = \frac{z}{z + 0.5} + \frac{2\, z}{(z + 0.5)(z - 1)}$$

Scomponendo in fratti semplici si ha:

$$Y(z) = \frac{z}{z + 0.5} + \frac{4}{3}\left[\frac{z}{(z - 1)} - \frac{z}{(z + 0.5)}\right]$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(n) = (-0.5)^n + \frac{4}{3}\,[1 - (-0.5)^n] = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}(-0.5)^n.$$

f) Utilizzando il metodo della corrispondenza poli-zeri, discretizzare la seguente rete correttrice

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{2\, s + 1}{s + 2}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.2$ e si imponga l'uguaglianza dei guadagni statici.

Soluzione. Utilizzando il metodo della corrispondenza poli-zeri si ottiene:

$$D(z) = K\, \frac{(1 - e^{-0.5\, T}\, z^{-1})}{(1 - e^{-2\, T} z^{-1})} = K\, \frac{(1 - e^{-0.1}\, z^{-1})}{(1 - e^{-0.4} z^{-1})} = K\, \frac{(1 - 0.905\, z^{-1})}{(1 - 0.67\, z^{-1})}$$

Il valore di K si determina imponendo l'uguaglianza dei guadagni statici:

$$\lim_{s\to 0} D(s) = \lim_{z\to 1} D(z) \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{2} = K\, \frac{(1 - e^{-0.1})}{(1 - e^{-0.4})} \qquad \rightarrow \qquad K = \frac{(1 - e^{-0.4})}{2(1 - e^{-0.1})} = 1.732$$

Sostituendo in $D(z)$ si ottiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = 1.732\, \frac{(1 - 0.905\, z^{-1})}{(1 - 0.670\, z^{-1})} = \frac{(1.732 - 1.5675\, z^{-1})}{(1 - 0.670\, z^{-1})}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m(k) = 0.670\, m(k-1) + 1.732\, e(k) - 1.5675\, e(k-1)].$$

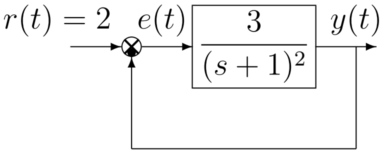
Nr. ____

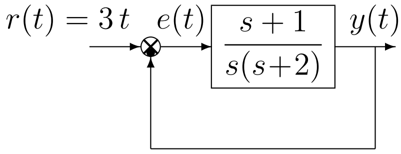
Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

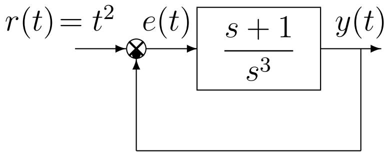
Controlli Automatici B
28 Giugno 2013 - Domande Teoriche

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. La risposta al test è considerata corretta solo se tutte le affermazioni corrette sono state contrassegnate.

1. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:







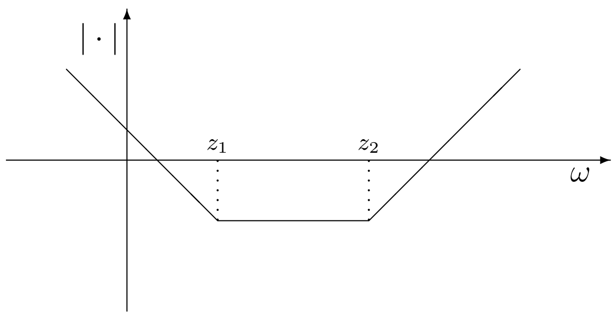
$$e(\infty) = \frac{R_0}{1+K_p} = \frac{1}{2} \qquad e(\infty) = \frac{R_0}{K_v} = 6 \qquad e(\infty) = \frac{R_0}{K_a} = 0$$

2. Scrivere l'equazione alle differenze corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{5 + 3\,z^{-1}}{1 + 2\,z^{-1} + 4\,z^{-2}} \qquad \rightarrow \qquad y_k + 2\,y_{k-1} + 4\,y_{k-2} = 5\,x_k + 3\,x_{k-1}$$

3. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un regolatore standard PID e a fianco disegnare qualitativamente il corrispondente diagramma di Bode dei moduli nell'ipotesi di zeri reali distinti:

$$G(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_d s} + T_s s\right)$$



4. Scrivere la funzione descrittiva $F(X)$ di un relè ideale di ampiezza Y:

$$F(X) = \frac{4\,Y}{\pi\,X}$$

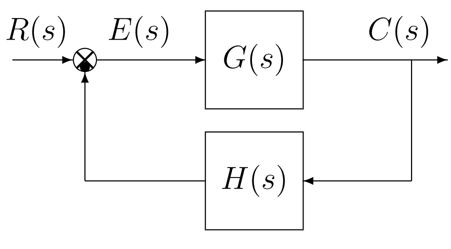
5. La trasformazione bilineare è definita come segue:

○ $s = \frac{2}{T}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$ ⊗ $s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ ⊗ $s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$ ○ $s = \frac{2}{T}\frac{z+1}{z-1}$

6. Sia $G(z)$ la $\mathcal{Z}$-trasformata della successione numerica $g(k)$. Scrivere gli enunciati dei teoremi del valore iniziale e del valore finale:

$$g(0) = g(k)|_{k=0} = \lim_{z\to\infty} G(z), \qquad g(\infty) = \lim_{k\to\infty} g(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})G(z).$$

7. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere il legame che lega la variazione relativa del sistema $H(s)$ alla variazione relativa del sistema retroazionato $G_0(s)$ quando varia un parametro β interno alla funzione di trasferimento $H(s)$:

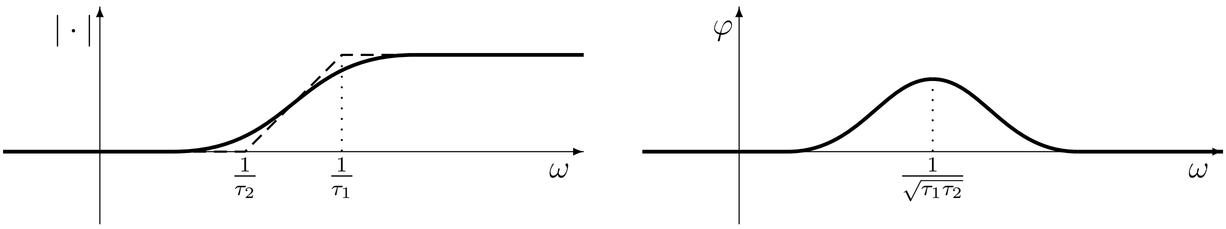


$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \qquad \frac{\Delta H(s)}{H(s)}$$

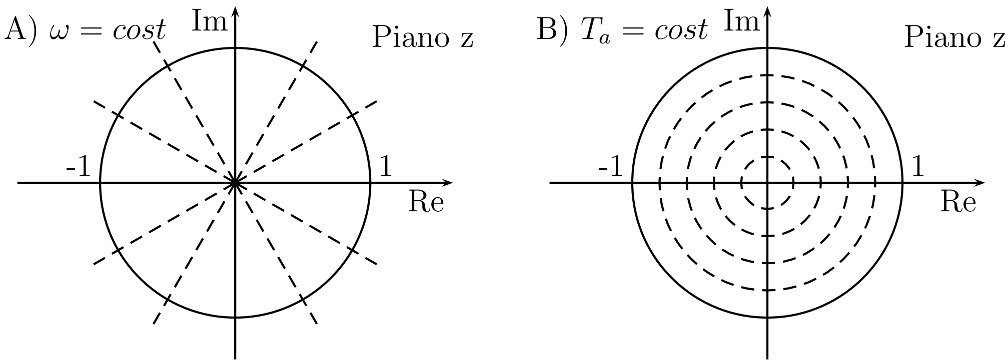
8. Calcolare la $\mathcal{Z}$-trasformata $X(z)$ dei seguenti segnali tempo continui $x(t)$ quando $t = k\,T$:

$$x(t) = 2^{-3\,t} \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{z}{(z - 2^{-3\,T})} \qquad\qquad x(t) = 3\,t \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{3\,T\,z}{(z-1)^2}$$

9. Tracciare i diagrammi di bode (moduli e fasi) di una rete anticipatrice $C(s) = \frac{(1+\tau_1\,s)}{(1+\tau_2\,s)}$, ($\tau_1 > \tau_2$):



10. Tracciare qualitativamente sul piano z: A) i luoghi a pulsazione ω costante; B) i luoghi a tempo di assestamento costante



11. Scrivere il margine di ampiezza K^* e la pulsazione ω^* di attraversamento del semiasse reale negativo del seguente sistema a ritardo finito:

$$G(s) = \frac{e^{-t_0\,s}}{s} \qquad \rightarrow \qquad K^* = \frac{\pi}{2\,t_0} \qquad \omega^* = \frac{\pi}{2\,t_0}$$

12. Scrivere la funzione di trasferimento $H_0(s)$ del ricostruttore di ordine 0:

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

13. 1) Sia data la seguente equazione caratteristica:

$$1 + \tau\,G_1(s) = 0, \qquad 1 + \tau\,\frac{(s+1)^2}{s+3} = 0$$

Disegnare qualitativamente il contorno delle radici di $G_1(s)$ al variare del parametro $\tau > 0$.

2) Determinare la posizione dei punti di diramazione presenti sull'asse reale negativo:

$$\sigma_1 = -5, \qquad \sigma_2 = -1$$

3) Determinare per quale valore $\bar{\tau}$ di τ almeno uno dei 2 poli del sistema retroazionato si trova nella posizione $p = -4$:

$$\bar{\tau} = -\left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=-4} = \frac{1}{9}$$