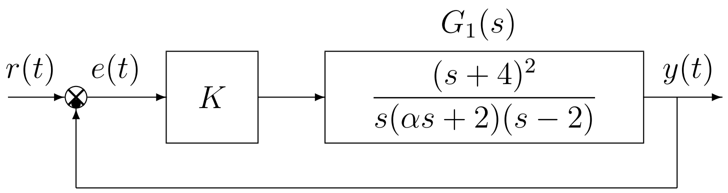
Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Controlli Automatici B
27 Giugno 2016 - Esercizi

a1) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



Posto $\alpha = 1$, tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare la posizione degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K^*. Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Soluzione. Posto $\alpha = 1$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1\,G_1(s) = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + K\frac{(s+4)^2}{s(s+2)(s-2)} = 0$$

L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare di $K > 0$ è mostrato in Fig. 1. Il luogo delle radici è caratterizzato da un solo asintoto coincidente con il semiasse

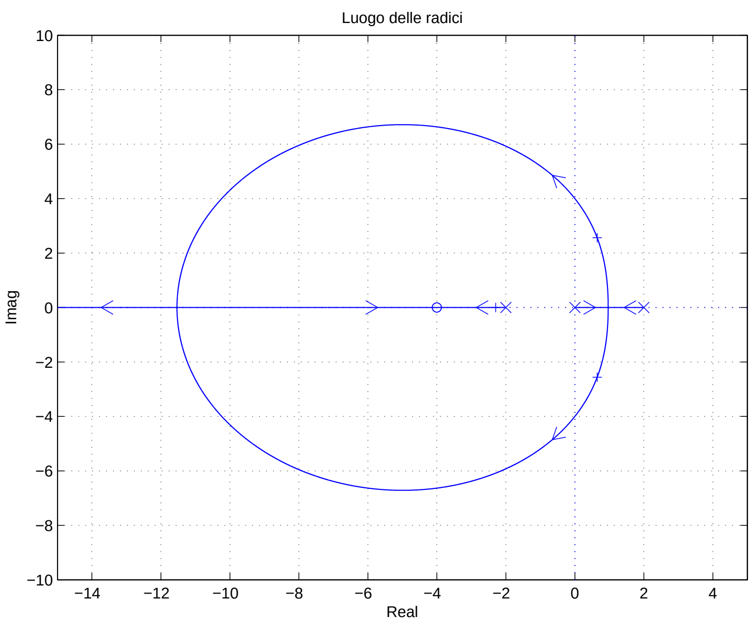


Figura 1: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare di $K > 0$.

reale negativo. Le intersezioni con l'asse immaginario si determinano utilizzando il criterio di Routh. Equazione caratteristica:

$$1 + K\frac{(s+4)^2}{s(s+2)(s-2)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + Ks^2 + (8K-4)s + 16K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & (8K-4) \\ 2 & K & 16K \\ 1 & K(8K-4)-16K & \\ 0 & 16K & \end{array}$$

Dalla tabella si ricavano i seguenti vincoli:

$$(8K-20)K > 0, \qquad\qquad K > 0$$

dai quali si ottiene che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > \frac{5}{2} = 2.5 = K^*.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{14} = 4.$$

a.2) Posto $K = 8$ nel sistema retroazionato sopra definito, tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\alpha > 0$. Nella graficazione del contorno delle radici si tenga conto che nei punti $p_1 \simeq -5.48$ e $p_2 \simeq -7.72$ sono presenti due punti di diramazione del contorno delle radici. Il calcolo di α^* non è necessario. Determinare la posizione degli altri punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Sol. Posto $K = 8$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente:

$$1 + \frac{8(s+4)^2}{s(\alpha s + 2)(s-2)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s(\alpha s + 2)(s-2) + 8(s+4)^2 = 0$$

da cui si ricava l'equazione caratteristica $1 + \alpha\, G_2(s) = 0$:

$$2s(s-2) + 8(s+4)^2 + \alpha s^2(s-2) = 0 \qquad \rightarrow \qquad 1 + \frac{\alpha s^2(s-2)}{10(s^2 + 6s + 12.8)} = 0$$

Mettendo in evidenza i poli della funzione $G_2(s)$ si ottiene:

$$1 + \alpha\, G_s(2) = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + \frac{\alpha s^2(s-2)}{10[(s+3)^2 + 1.949^2]} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\alpha > 0$ è mostrato in Fig. 2.

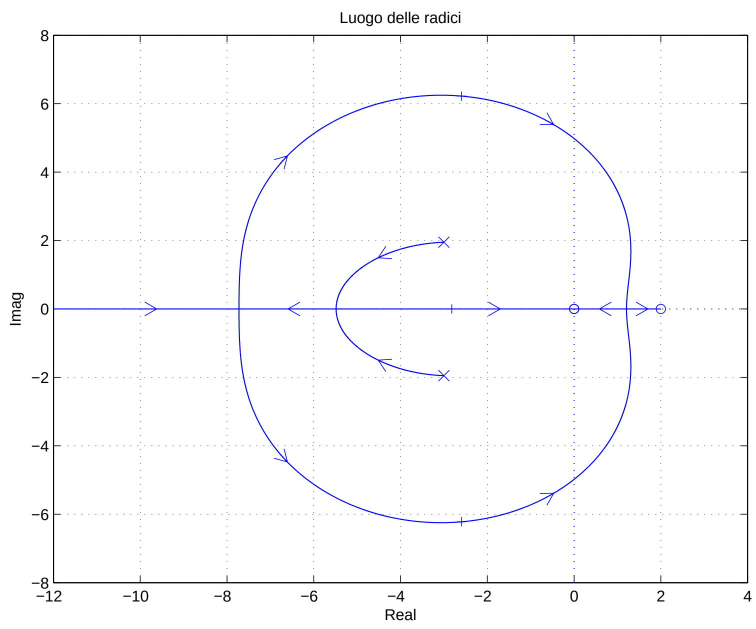


Figura 2: Contorno delle radici del sistema $G_2(s)$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

Il contorno delle radici ha un solo asintoto coincidente con il semiasse reale negativo e percorso dall'infinito al finito.

a.3) Sia data la seguente funzione di trasferimento $G_3(s)$ che descrive il legame tra la tensione in ingresso $V(s)$ e la velocità angolare in uscita $\omega(s)$ di un motore elettrico in corrente continua:

$$G_3(s) = \frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{K_e}{(R + L\,s)(b + J\,s) + K_e^2}$$

Posto $J = 1$, $L = 1$, $K_e = 4$ e $R = 4$, mostrare graficamente come si muovono sul piano complesso i poli della funzione $G_3(s)$ al variare del parametro $b > 0$. Calcolare il valore b^* a cui corrisponde il minimo tempo di assestamento del sistema $G_3(s)$ alla risposta al gradino.

Soluzione. I poli della funzione di trasferimento $G_3(s)$ coincidono con le radici del polinomio a denominatore:

$$(R + L\,s)(b + J\,s) + K_e^2 = 0$$

Posto $J = 1$, $L = 1$, $K_e = 4$, e $R = 4$ si ottiene la seguente equazione:

$$(4 + s)(b + s) + 16 = 0$$

che, in modo equivalente, può essere riscritta nel seguente modo:

$$s^2 + 4s + 16 + b(s + 4) = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + b\,\frac{(s + 4)}{s^2 + 4s + 16} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + b\,G_4(s) = 0$$

Mettendo in evidenza i poli della funzione $G_4(s)$ si ottiene:

$$1 + b\,\frac{(s + 4)}{(s + 2)^2 + 3.464^2} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $b > 0$ è mostrato in Fig. 3. In questo caso il

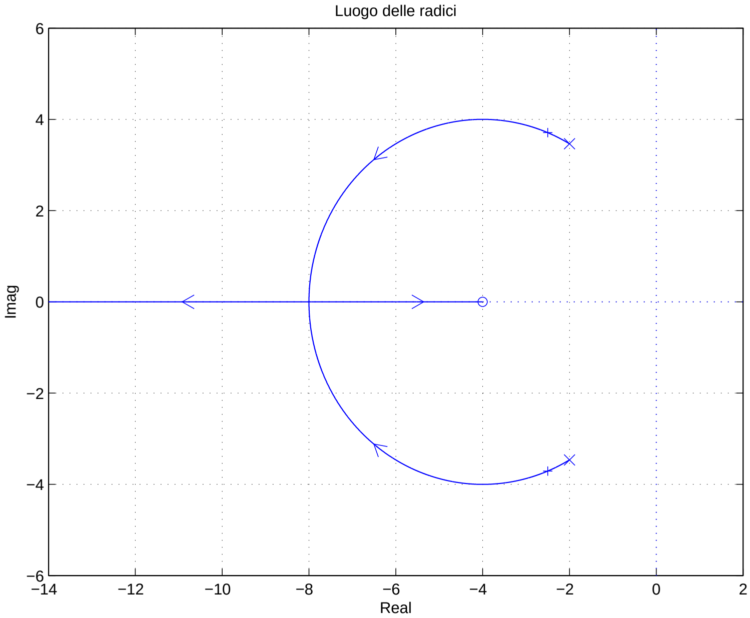


Figura 3: Contorno delle radici del sistema $G_4(s)$ al variare del parametro $b > 0$.

contorno delle radici si muove lungo una circonferenza centrata in $z = -4$. Il raggio R della circonferenza è:

$$R = \sqrt{2^2 + 3.464^2} = \sqrt{16} = 4$$

I punto di diramazione σ_1 del contorno delle radici è:

$$\sigma_1 = -4 - 4 = -8.$$

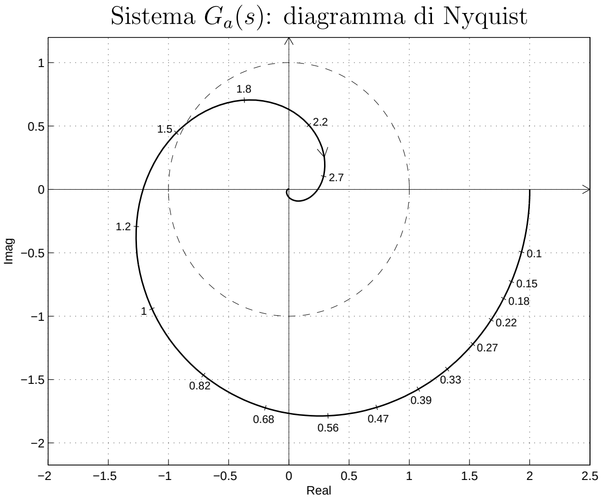
I punto di diramazione σ_1 poteva essere calcolato anche nel seguente modo:

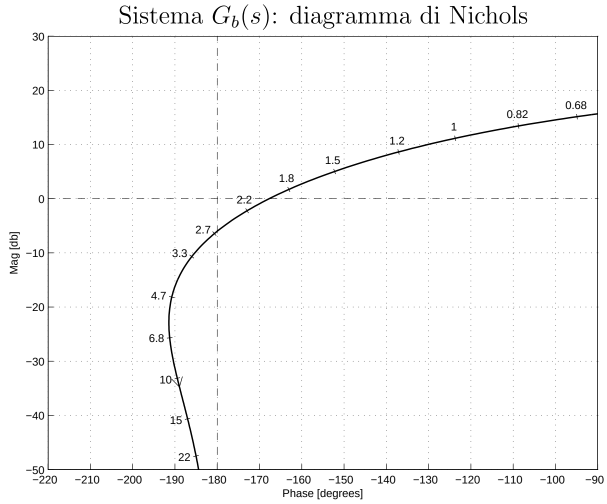
$$\frac{dG_4(s)}{ds} = 0 \quad \rightarrow \quad (2s + 4)(s + 4) - (s^2 + 4s + 16) = s^2 + 8s = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_1 = -8, \;\; \sigma_2 = 0.$$

La condizione di minimo tempo di assestamento del sistema $G_1(s)$ alla risposta al gradino si ha in corrispondenza del punto di diramazione $\sigma_1 = -8$ e quindi in corrispondenza del seguente valore del parametro b^*:

$$b^* = -\left.\frac{1}{G_4(s)}\right|_{s=\sigma_1} = -\left.\frac{s^2 + 4s + 16}{s + 4}\right|_{s=-8} = 12.$$

b) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi $G_a(s)$ e $G_b(s)$:





b.1) Per il sistema $G_a(s)$, progettare una rete correttrice $C(s)$ in grado di garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_a = 5$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. La specifica sul margine di ampiezza $M_a = 5$ definisce completamente la posizione del punto $B = M_B\, e^{j\varphi_B}$:

$$M_B = \frac{1}{M_a} = 0.2, \qquad\qquad \varphi_B = -180^\circ$$

La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 4.

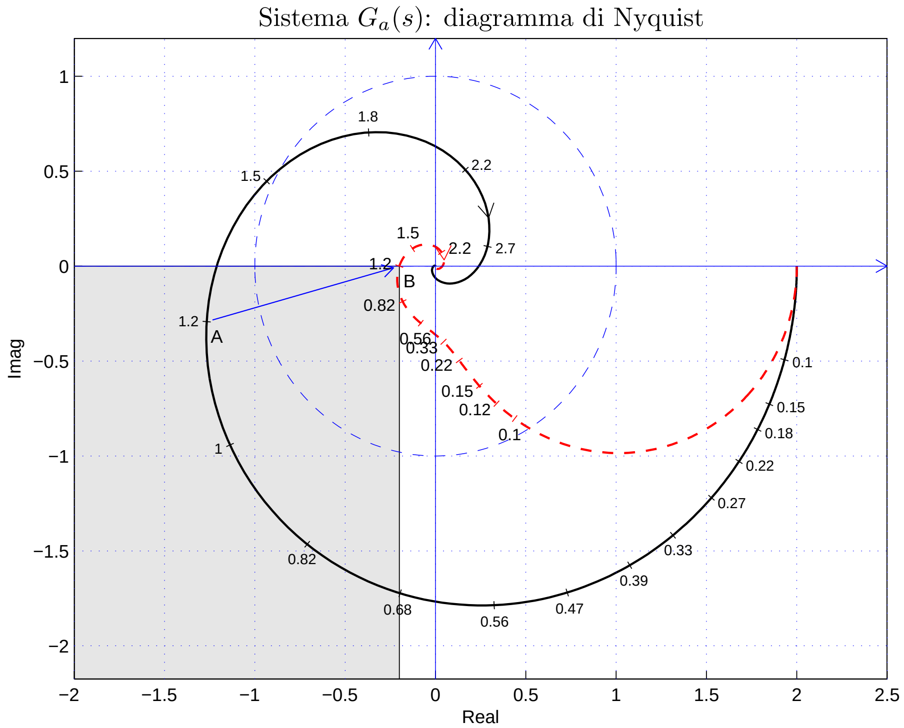


Figura 4: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)\, G_a(s)$.

Il punto $A = G_b(j\omega_A)$ scelto per la sintesi della rete correttrice è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 1.2$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 1.3, \qquad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -167^\circ.$$

Sostituendo i valori di M, φ e $\omega = \omega_A$ all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 3.038$ e $\tau_2 = 20.46$ della rete correttrice $C_1(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.1539, \qquad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -13^\circ \qquad \rightarrow \qquad C_1(s) = \frac{(1 + 3.038\, s)}{(1 + 20.46\, s)}.$$

Il diagramma di Myquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 4.
Sintesi della rete correttrice $C_1(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A:

$$\begin{aligned}
\omega_A &= [\ 0.82 \quad 1 \quad 1.2\ ]\\
M_A &= [\ 1.628 \quad 1.477 \quad 1.3\ ]\\
\varphi_A &= [\ -115.9 \quad -140.4 \quad -167\ ]\\
M &= [\ 0.1229 \quad 0.1354 \quad 0.1539\ ]\\
\varphi &= [\ -64.15 \quad -39.64 \quad -13.01\ ]\\
\tau_1 &= [\ 0.4244 \quad 0.9949 \quad 3.038\ ]\\
\tau_2 &= [\ 10.44 \quad 10.37 \quad 20.46\ ]
\end{aligned}$$

b.2) Per il sistema $G_b(s)$ progettare una rete anticipatrice in grado di garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = 50°$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol.

La posizione del punto $B = M_B\, e^{j\varphi_B}$ è completamente determinata dalla specifica di progetto: $M_B = 10$ db e $\varphi_B = -130°$. La regione di ammissibilitá è mostrata in grigio in Fig. 5. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione

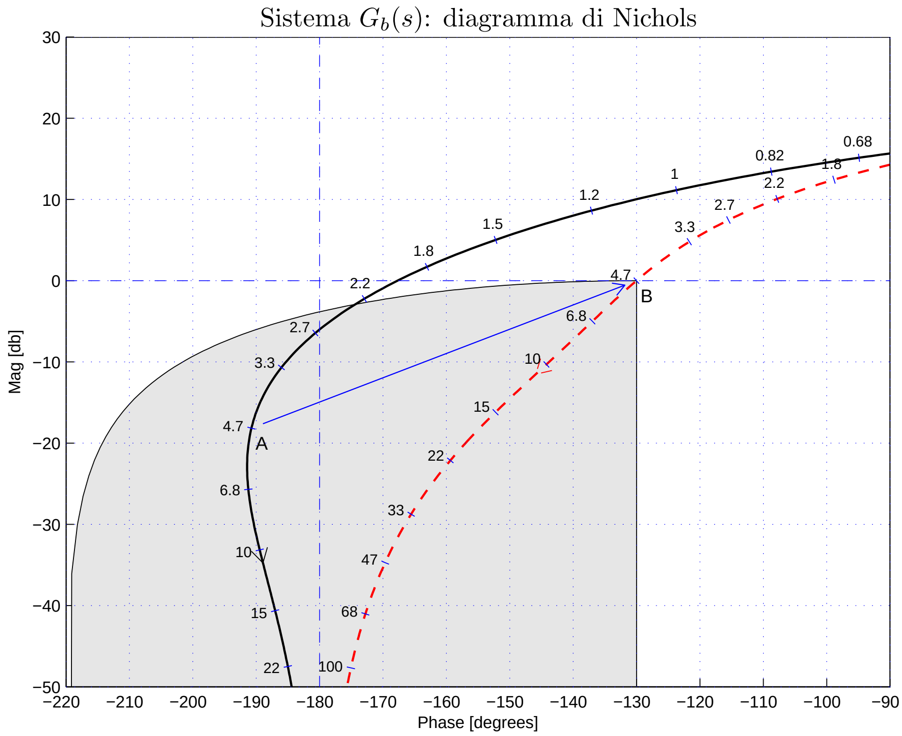


Figura 5: Diagrammi di Nichols delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)\,G_b(s)$.

$\omega_A = 4.7$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.1237, \qquad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -190.7°.$$

Sostituendo i valori di M, φ e ω all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 1.852$ e $\tau_2 = 0.08905$ della rete correttrice $C_2(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 8.084, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 60.7° \qquad \rightarrow \qquad C_2(s) = \frac{(1 + 1.852\, s)}{(1 + 0.08905\, s)}.$$

Il diagramma di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ $C_2(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

Sintesi della rete correttrice $C_2(s)$ per alcuni valori della pulsazione ω_A:

$$
\begin{array}{rl}
\omega_A = & [\;2.7 \quad 3.3 \quad 4.7 \quad 6.8 \quad 10 \quad 15 \quad 22\;] \\
M_A = & [\;0.4761 \quad 0.2922 \quad 0.1237 \quad 0.0519 \quad 0.0220 \quad 0.0093 \quad 0.0042\;] \\
\varphi_A = & [\;179.3 \quad 174 \quad 169.3 \quad 168.8 \quad 170.6 \quad 173 \quad 175\;] \\
M = & [\;2.1 \quad 3.422 \quad 8.084 \quad 19.23 \quad 45.39 \quad 107.4 \quad 236.7\;] \\
\varphi = & [\;50.66 \quad 56 \quad 60.74 \quad 61.23 \quad 59.43 \quad 56.99 \quad 55\;] \\
\tau_1 = & [\;0.7022 \quad 1.046 \quad 1.852 \quad 3.146 \quad 5.213 \quad 8.498 \quad 13.1\;] \\
\tau_2 = & [\;0.0755 \quad 0.0975 \quad 0.0890 \quad 0.0720 \quad 0.0565 \quad 0.0425 \quad 0.0316\;]
\end{array}
$$

b.3) Sempre per il sistema $G_b(s)$ progettare una rete ritardatrice in grado di garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_a = 10$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Soluzione. La specifica sul margine di ampiezza $M_a = 10$ definisce completamente la posizione del punto $B = M_B\, e^{j\varphi_B}$: $M_B = 0.1$ e $\varphi_B = -180°$. La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 6. Il punto $A = G(j\omega_A)$ che deve essere portato in B è quello assegnato corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 2.2$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.774, \qquad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -172.9°.$$

Sostituendo i valori di M, φ e ω all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 1.852$ e $\tau_2 = 0.08905$ della rete correttrice $C_3(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_{A'}} = 0.1292, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_{A'} = -7.08° \quad \rightarrow \quad C_3(s) = \frac{(1 + 3.183\, s)}{(1 + 24.88\, s)}.$$

I diagrammi di Nichols delle funzioni $G_b(s)$, $K\, G_b(s)$ e $K\, C_3(s) G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 6.

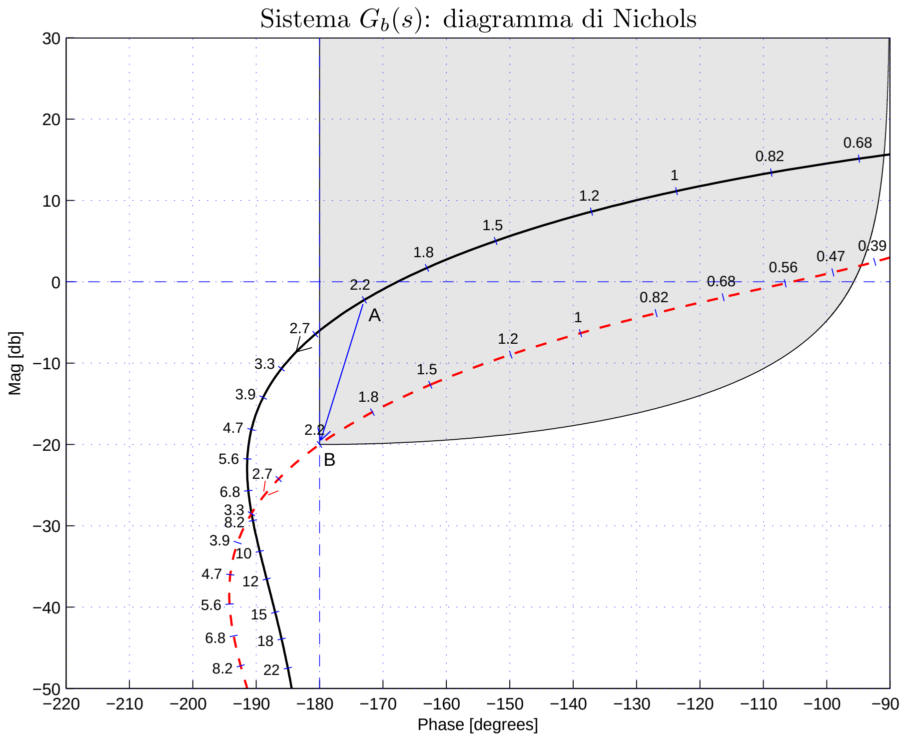
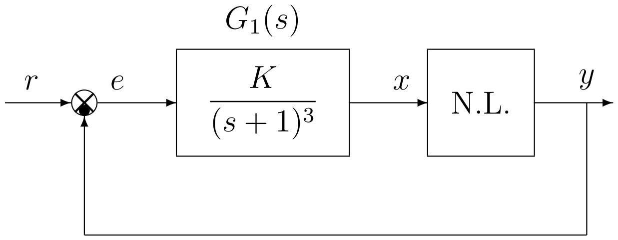


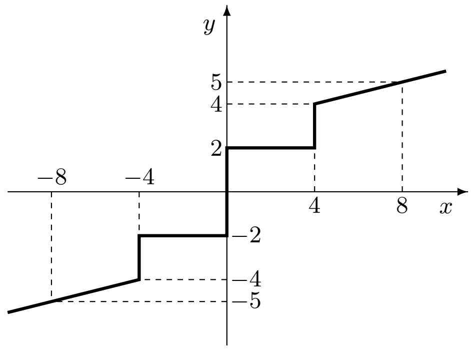
Figura 6: Diagrammi di Nichols delle funzioni $G_b(s)$, $K\, G_b(s)$ e $K\, C_3(s)\, G_b(s)$.

Sintesi della rete correttrice $C_3(s)$ per alcuni valori della pulsazione ω_A:

$$
\begin{array}{rl}
\omega_A = & [\;0.68 \quad 0.82 \quad 1 \quad 1.2 \quad 1.5 \quad 1.8 \quad 2.2\;] \\
M_A = & [\;5.707 \quad 4.685 \quad 3.606 \quad 2.698 \quad 1.782 \quad 1.217 \quad 0.7741\;] \\
\varphi_A = & [\;-94.9 \quad -108.7 \quad -123.7 \quad -137.1 \quad -152.2 \quad -163 \quad -172.9\;] \\
M = & [\;0.0175 \quad 0.0213 \quad 0.0277 \quad 0.0370 \quad 0.0561 \quad 0.0821 \quad 0.1292\;] \\
\varphi = & [\;-85.1 \quad -71.26 \quad -56.31 \quad -42.91 \quad -27.77 \quad -16.96 \quad -7.081\;] \\
\tau_1 = & [\;0.1003 \quad 0.3863 \quad 0.6333 \quad 0.851 \quad 1.186 \quad 1.665 \quad 3.183\;] \\
\tau_2 = & [\;84.1 \quad 59.93 \quad 42.67 \quad 32.13 \quad 24.23 \quad 21.36 \quad 24.88\;]
\end{array}
$$

c) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:





c.1) Posto $K = 1$, determinare per quale valore r^* del riferimento r il punto di lavoro del sistema retroazionato coincide con il punto $(x_0, y_0) = (-8, -5)$.

Sol. La retta di carico della parte lineare del sistema retroazionato è la seguente:

$$x = K_1(r - K_2 K_3 y) \qquad \text{dove} \qquad K_1 = 1, \;\; K_2 = 1, \;\; K_3 = 1.$$

Il valore r^* si ottiene ponendo $K_1 = K_2 = K_3 = 1$ e $(x, y) = (-8, -5)$ nella retta di carico:

$$-8 = r^* + 5 \qquad \rightarrow \qquad r^* = -13.$$

c.2) Posto $K = 1$, $r = r^*$ ed utilizzando il criterio del cerchio, dire se il sistema retroazionato è stabile nell'intorno del punto di lavoro $(x_0, y_0) = (-8, -5)$.

Sol. Per $r = r^*$ il punto di lavoro coincide con il punto $(x_0, y_0) = (-8, -5)$. Le pendenze delle 2 rette che passano nel punto di lavoro e che racchiudono a settore tutta la non linearità sono:

$$\alpha = \frac{1}{4}, \qquad \beta = \frac{7}{8}.$$

Per $K = 1$, il guadagno d'anello del sistema è:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

Il margine di ampiezza K^* e la pulsazione ω^* della funzione $G(s)$ si determinano utilizzando il criterio di Routh. Equazione caratteristica:

$$1 + K\frac{1}{(s+1)^3} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K = 0$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & K+1 \\ 1 & 8-K & \\ 0 & K+1 & \end{array}$$

Dalla tabella si ricava che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$-1 < K < 8 = K^*.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{3} = 1.732.$$

In questo caso il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ non interseca il cerchio critico per cui in base al criterio del cerchio si può affermare che il punto $(x_0, y_0) = (-8, -5)$ è un punto di equilibrio globalmente asintoticamente stabile. In Fig. 7 è mostrato il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ sovrapposto al cerchio critico.

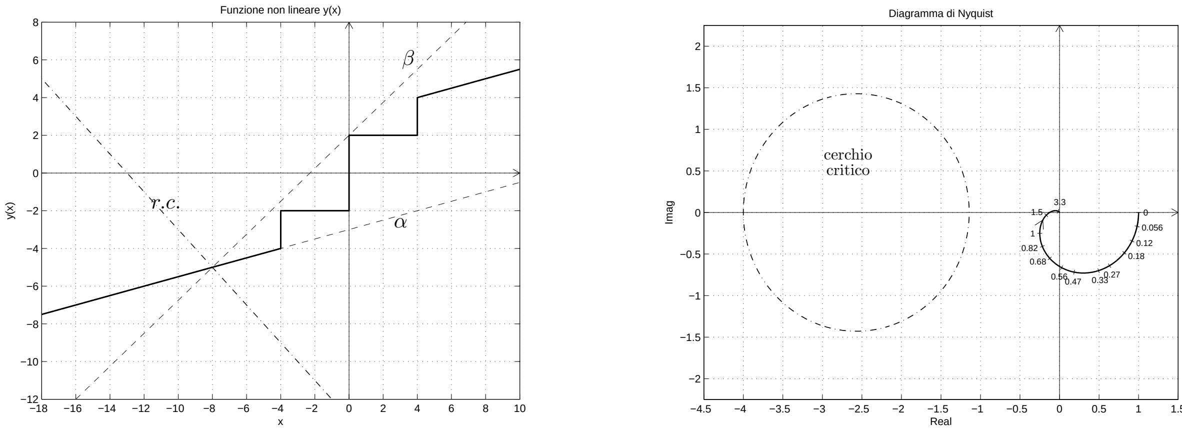


Figura 7: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ e cerchio critico.

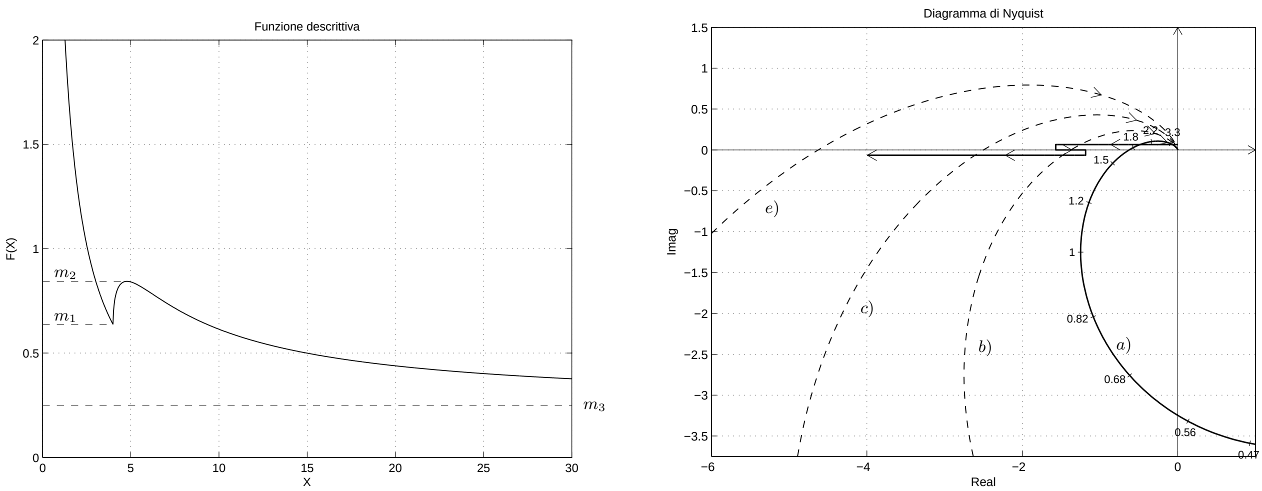


Figura 8: Andamento della funzione descrittiva $F(X)$.

c.3) Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità N.L. assegnata, prendendo l'origine come punto di lavoro. Utilizzare dei parametri ausiliari (per esempio: m_1, m_2, ...) per rappresentare gli eventuali valori non noti minimi e massimi della funzione $F(X)$.

Soluzione. L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ è mostrato in Fig. 8 dove: a) $m_0 = \infty$ è il valore iniziale della funzione $F(X)$ per $X = 0^+$; b) $m_1 \simeq 0.65$ è il valore minimo della funzione $F(X)$ per $X \simeq 4$; c) $m_2 =\simeq 0.8$ è il valore massimo della funzione $F(X)$ per $X \simeq 5$. d) $m_3 = \frac{1}{4} = 0.25$ è il valore minimo della funzione $F(X)$ per $X \to \infty$.

Nel primo tratto $X \in [0,\ 4]$, la funzione descrittiva $F(X)$ coincide con quella di un relè ideale:

$$F(X) = \frac{8}{\pi X}$$

Il valore del parametri m_1 può quindi essere determinato con esattezza:

$$m_1 = F(X)|_{X=4} = \left.\frac{8}{\pi X}\right|_{X=4} = \frac{2}{\pi} = 0.6366.$$

c.4) Discutere "qualitativamente" (in funzione anche dei parametri m_1, m_2, ...) l'esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno $K > 0$.

Sol. Per $K = 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema G(s) è $K^* = 8$. Al variare di K si hanno queste possibili soluzioni:

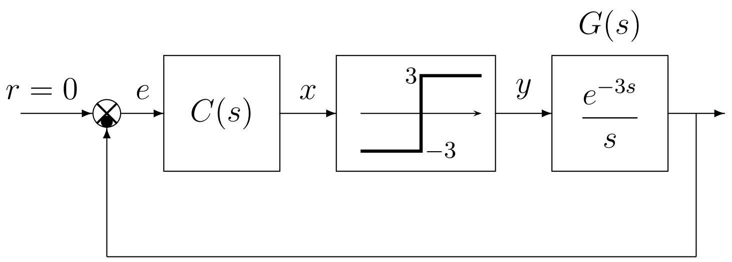
1) $-\dfrac{1}{m_2} < -\dfrac{K}{K^*}$: il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ interseca la funzione $\frac{-1}{F(X)}$ in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile.

2) $-\dfrac{1}{m_1} < -\dfrac{K}{K^*} < -\dfrac{1}{m_2}$: il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ interseca la funzione $\frac{-1}{F(X)}$ in 3 punti a cui corrispondono 2 cicli limite stabili (quelli uscenti) e un ciclo limite stabile (quello entrante).

3) $-\dfrac{1}{m_3} < -\dfrac{K}{K^*} < -\dfrac{1}{m_1}$: il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ interseca la funzione $\frac{-1}{F(X)}$ in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile.

4) $-\dfrac{K}{K^*} < -\dfrac{1}{m_3}$: la funzione $\frac{-1}{F(X)}$ è tutta interna al diagramma di Nyquist completo della funzione $G(s)$ per cui non vi sono cicli limite e l'origine è un punto di lavoro instabile per il sistema retroazionato.

d) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:



d.1) Posto $C(s) = 1$, determinare l'ampiezza X^* e la pulsazione ω^* dell'oscillazione autosostenuta presente all'interno nel sistema retroazionato.

Soluzione. La funzione descrittiva del relè ideale è:

$$F(X) = \frac{12}{\pi\, X}$$

Il margine di ampiezza K^* e la pulsazione ω^* della funzione $G(s)$ hanno il seguente valore:

$$K^* = \omega^* = \frac{\pi}{6} = 0.5236$$

L'ampiezza X^* dell'oscillazione autosostenuta si determina nel seguente modo:

$$F(X^*) = K^* \qquad \to \qquad \frac{12}{\pi X^*} = \frac{\pi}{6} \qquad \to \qquad X^* = \frac{72}{\pi^2} = 7.2951$$

d.2) Posto $C(s) = K$, determinare il valore di K in modo da garantire che l'oscillazione autosostenuta presente all'interno del sistema retroazionato abbia un'ampiezza $X^* = 4$.
Soluzione. Posto $C(s) = K$, Il margine di ampiezza $\bar{K}^*$ della funzione $K\,G(s)$ è:

$$\bar{K}^* = \frac{K^*}{K} = \frac{\pi}{6K}$$

Il valore di K si determina nel seguente modo:

$$F(X^*)|_{X^*=4} = \bar{K}^* \qquad \to \qquad \frac{3}{\pi} = \frac{\pi}{6K} \qquad \to \qquad K = \frac{\pi^2}{18} = 0.5483$$

d.3) Progettare una rete correttrice $C(s) = \frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$ in modo che l'oscillazione autosostenuta presente all'interno del sistema sia caratterizzata da un'ampiezza $X^* = 2$ e da una pulsazione $\omega^* = 0.3$.
Soluzione. Per avere un'oscillazione autosostenuta con ampiezza $X^* = 2$, il margine di ampiezza $\bar{K}^*$ del sistema compensato dovrà avere il seguente valore:

$$\bar{K}^* = F(X^*)|_{X^*=2} = \frac{6}{\pi} = 1.91 \qquad \to \qquad B = -\frac{1}{\bar{K}^*} = -0.5236$$

Modulo e fase del punto B:

$$M_B = 0.5236, \qquad \varphi_B = -180^o.$$

Il punto A è quello che si ottiene dalla funzione $G(s)$ quando $s = j\omega^* = j0.3$:

$$A = G(s)|_{s=j0.3} = \frac{e^{-0.9\,j}}{j\,0.3} \qquad \longrightarrow \qquad M_A = 3.333, \quad \varphi_A = -\frac{\pi}{2} - 0.9 = -141.56^o$$

I parametri M, φ e ω da inserire nelle formule di inversioni hanno il seguente valore:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{0.5236}{3.333} = 0.1571 \qquad \varphi = -38.434^o \qquad \omega = 0.3.$$

La rete correttrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi} = 3.358, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin\varphi} = 29.93 \qquad \to \qquad C(s) = \frac{1 + 3.358\,s}{1 + 29.93\,s}$$

La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 9.

e) Partendo dalla condizione iniziale $y(0) = 5$, calcolare la risposta $y(n)$ del seguente sistema dinamico discreto:

$$y(n+1) = 0.5\,y(n) + 3\,x(n)$$

quando in ingresso è presente il segnale discreto $x(n) = 2^n$.

Sol. Applicando la $\mathcal{Z}$-trasformata alla precedente equazione alle differenze si ottiene:

$$z\,Y(z) - y(0)\,z = 0.5\,Y(z) + 3\,X(z)$$

Esprimendo $Y(z)$ in funzione di $X(z)$ e $y(0)$ si ottiene:

$$Y(z) = \frac{y(0)\,z}{z-0.5} + \frac{3}{z-0.5}\,X(z) = \frac{5\,z}{z-0.5} + \frac{3\,z}{(z-0.5)(z-2)}$$

Scomponendo in fratti semplici si ottiene:

$$Y(z) = \frac{5\,z}{z-0.5} + z\left[\frac{2}{z-2} - \frac{2}{z-0.5}\right] = \frac{5\,z}{z-0.5} + \left[\frac{2\,z}{z-2} - \frac{2\,z}{z-0.5}\right]$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(n) = 3\,(0.5)^n + 2\,(2)^n.$$

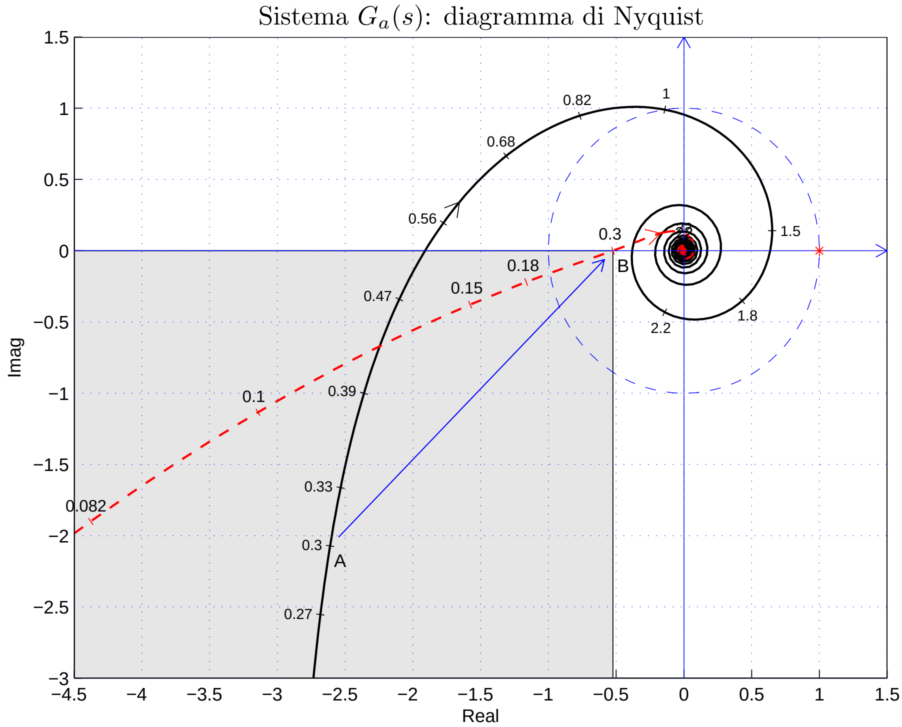


Figura 9: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G(s)$ e $C(s)\,G(s)$.

f) Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare la seguente rete correttrice:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s+1)}{(s+2)^2}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

Sol. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(z) = D(s)|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{T(1+T-z^{-1})}{(1+2T-z^{-1})^2} = \frac{0.1(1.1-z^{-1})}{(1.2-z^{-1})^2} = \frac{0.11-0.1\,z^{-1}}{1.44-2.4\,z^{-1}+z^{-2}}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la seguente forma:

$$\begin{aligned} m_k &= \frac{1}{1.44}\left(2.4\,m_{k-1} - m_{k-2} + 0.11\,e_k - 0.1\,e_{k-1}\right) \\ &= 1.6667\,m_{k-1} - 0.6944\,m_{k-2} + 0.0764\,e_k - 0.0694\,e_{k-1} \end{aligned}$$

Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Controlli Automatici B
27 Giugno 2016 - Domande Teoriche

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. La risposta al test è considerata corretta solo se tutte le affermazioni corrette sono state contrassegnate.

1. Sia dato il sistema discreto $G(z)$ caratterizzato dal periodo di campionamento T. Fornire l'espressione analitica della funzione di risposta armonica $F(\omega)$ della funzione discreta $G(z)$:

$$G(z) = \frac{z}{z-0.5} \qquad \rightarrow \qquad F(\omega) = \frac{e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - 0.5}$$

2. A fianco è riportato il luogo delle radici del sistema $G(s) = \frac{2(s-1)}{(s+2)(s^2+4)}$ al variare del parametro $K > 0$. Calcolare:

   1) L'ascissa σ_0 corrispondente alla condizione di allineamento dei tre poli:

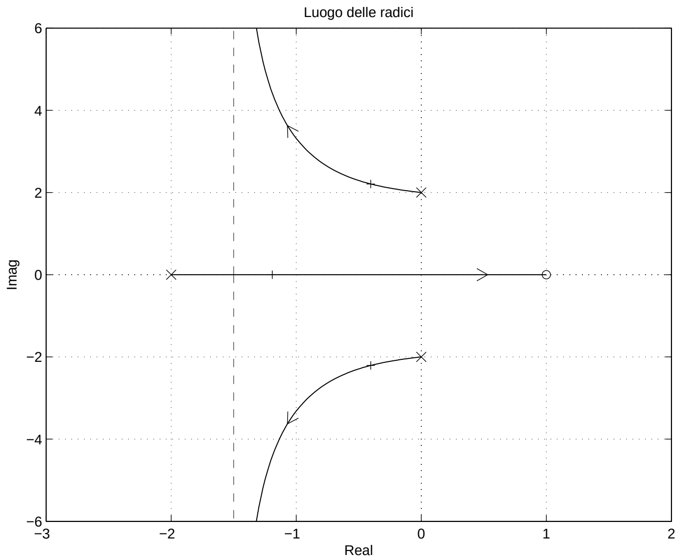
   $$\sigma_0 = -\frac{2}{3}$$

   2) Il valore K_0 corrispondente alla condizione di allineamento dei tre poli:

   $$K_0 = -\left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=-\frac{2}{3}} = 1.777$$

   3) Il valore minimo K_1^* e il valore massimo K_2^* del parametro K per la stabilità asintotica del sistema retroazionato:

   $$0 < K < 4 = -\left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=0}$$



3. Calcolare la $\mathcal{Z}$-trasformata $X(z)$ dei seguenti segnali tempo continui $x(t)$ quando $t = k\,T$:

$$x(t) = 3 \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{3\,z}{(z-1)} \qquad\qquad x(t) = 2\,e^{-3t} \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{2\,z}{(z-e^{-3T})}$$

4. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{k\to 0} y(k)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{k\to\infty} y(k)$ del segnale $y(k)$ corrispondente alla seguente funzione $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{z(1+2\,z)}{(z-1)(z-0.5)} \qquad \rightarrow \qquad y_0 = 2, \qquad y_\infty = 6$$

5. Scrivere la funzione di trasferimento discreta $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ corrispondente alla seguente equazione alle differenze:

$$6\,y_k + 4\,y_{k-1} + 5\,y_{k-2} + 3\,y_{k-3} = 2\,x_{k-1} + x_{k-2} \qquad \rightarrow \qquad G(z) = \frac{2\,z^{-1} + z^{-2}}{6 + 4\,z^{-1} + 5\,z^{-2} + 3\,z^{-3}}$$

6. Sia $y_1(t) = 3\,\sin(4\,t - \frac{\pi}{4})$ la fondamentale del segnale periodico $y(t)$ che si ha all'uscita del blocco non lineare N.L. sollecitato in ingresso dal segnale periodico $x(t) = 5\,\sin(4\,t)$. Calcolare il valore della funzione descrittiva $F(X)$ in corrispondenza del valore $X = 5$:

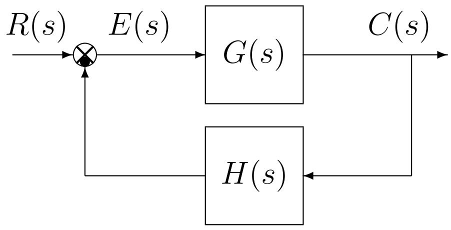
N.L.

$$x(t) = 5\,\sin(4\,t) \longrightarrow \boxed{F(5) = \frac{3}{5}\,e^{-j\frac{\pi}{4}}} \longrightarrow y(t) \simeq y_1(t) = 3\,\sin\left(4\,t - \frac{\pi}{4}\right)$$

7. Indicare quale dei seguenti sistemi discreti $G(z)$ tende a zero "più rapidamente":

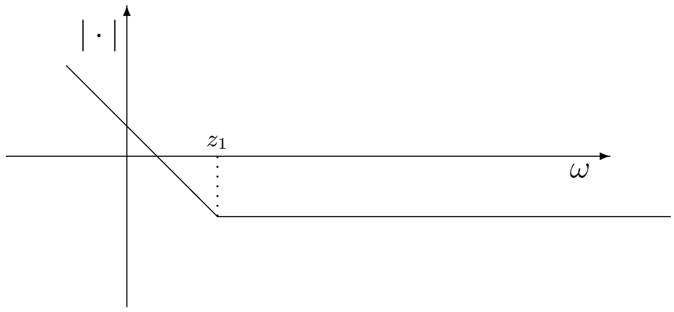
○ $G(z) = \frac{1}{z(z+0.5)}$ ○ $G(z) = \frac{1}{z(2\,z+1)}$ ○ $G(z) = \frac{1}{z(z+2)}$ ⊗ $G(z) = \frac{1}{z(4\,z+1)}$

8. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere il legame che lega la variazione relativa del sistema $G(s)$ alla variazione relativa del sistema retroazionato $G_0(s)$ quando varia un parametro α interno alla funzione di trasferimento $G(s)$:



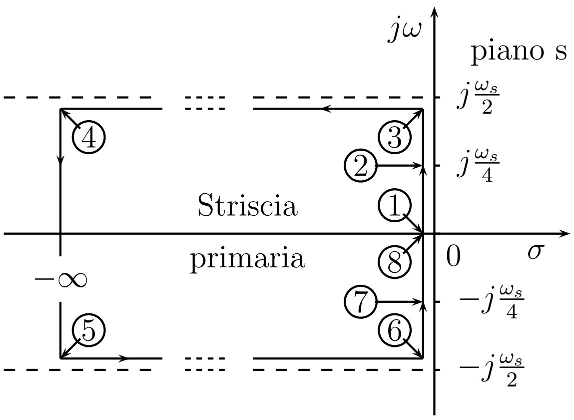
$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)}\,\frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

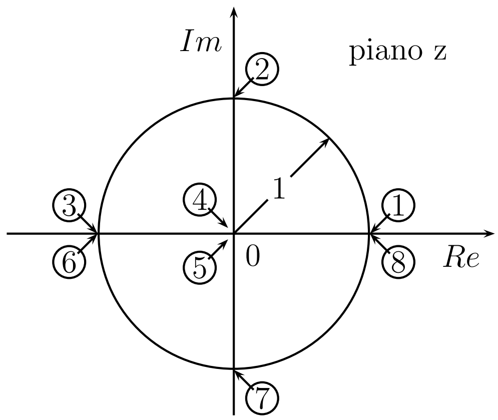
9. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un regolatore standard PI e a fianco disegnare qualitativamente il corrispondente diagramma di Bode dei moduli:



$$G(s) = K\left(1+\frac{1}{T_d s}\right)$$

10. Indicare sul piano z dove sono collocati i punti della striscia primaria numerati da 1 a 8:





11. Date le seguenti caratteristiche non lineari simmetriche rispetto all'origine, determinare "qualitativamente" gli andamenti delle corrispondenti funzioni descrittive $F_1(X)$ ed $F_2(X)$: