Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Controlli Automatici B
27 Giugno 2014 - Esercizi

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:

$$r(t) \to \bigotimes \xrightarrow{e(t)} \boxed{K} \to \underbrace{\boxed{\frac{(s+\alpha)}{s(s-1)(s+10)}}}_{G(s)} \to y(t)$$

a.1) Posto $\alpha = 1$, tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K^*. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione "solo in modo qualitativo". Determinare inoltre per quale valore $\bar{K}$ si ha il minimo tempo di assestamento della risposta al gradino del sistema retroazionato.

Sol. Posto $\alpha = 1$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1 G_1(s) = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + K\frac{(s+1)}{s(s-1)(s+10)} = 0$$

dove $K_1 = K$. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ per $K = K_1 > 0$ é mostrato in Fig. 1. Il luogo delle radici ha due asintoti verticali. Il centro degli

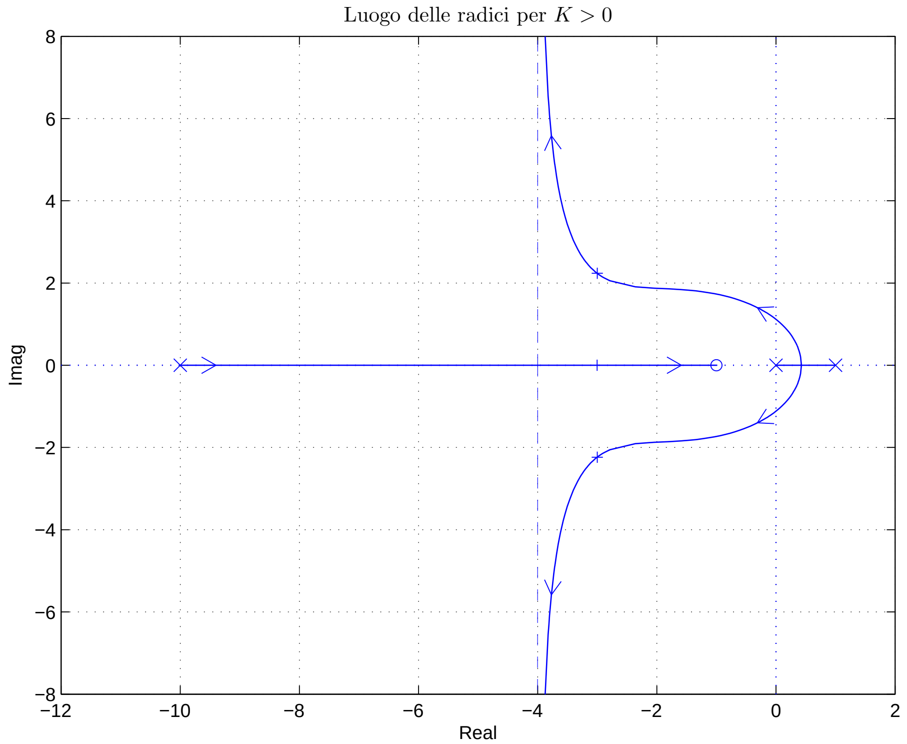


Figura 1: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ per $K = K_1 > 0$

asintoti è:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-10 + 1 + 1) = -4.$$

L'intersezione con l'asse immaginario si calcola applicando il criterio di Routh alla seguente equazione caratteristica:

$$1 + K\frac{(s+1)}{s(s-1)(s+10)} = 0 \qquad \to \qquad s^3 + 9\,s^2 + (K-10)s + K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & K-10 \\ 2 & 9 & K \\ 1 & 9(K-10)-K & \\ 0 & K & \end{array}$$

Il sistema retroazionato é stabile se

$$8K - 90 > 0, \qquad\qquad K > 0.$$

Il sistema retroazionato é stabile se

$$K > \frac{45}{4} = 11.25 = K^*$$

L'intersezione con l'asse immaginario si ha in corrispondenza della pulsazione:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{K^*}{9}} = 1.118.$$

I poli del sistema retroazionato sono alla massima distanza dall'asse immaginario quando i poli sono allineati. Il sistema è di ordine $n = 3$ e ha grado relativo $r = 2$ per cui l'ascissa σ_0 della condizione di allineamento dei poli può essere calcolata utilizzando il teorema del baricentro:

$$3\,\sigma_0 = \sum_{i=1}^{3} p_i = -9 \qquad \rightarrow \qquad \sigma_0 = -\frac{9}{3} = -3$$

Il valore $\bar{K}$ del parametro K per cui si ha l'allineamento dei poli si calcola nel seguente modo:

$$\bar{K} = -\left.\frac{1}{G_1(s)}\right|_{s=\sigma_0} = 42$$

Nota: quando, al variare di K, i due poli complessi coniugati del sistema retroazionato si trovano sull'asse immaginario, il terzo polo di trova in $p_3 = -9$. Questo risultato si ottiene applicando il teorema del baricentro. Un modo alternativo di calcolare il valore limite di stabilità K^* è il seguente:

$$K^* = -\left.\frac{1}{G_1(s)}\right|_{s=-9} = 11.25$$

a2) Posto $K = 18$, tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\alpha > 0$. Determinare esattamente la posizione e il centro degli asintoti. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione "solo in modo qualitativo".
Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente

$$1 + \frac{18(s+\alpha)}{s(s-1)(s+10)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s(s-1)(s+10) + 18(s+\alpha) = 0$$

da cui si ricava la seguente equazione $1 + \alpha\, G_1(s) = 0$:

$$s^3 + 9\,s^2 + 8\,s + 18\,\alpha = 0 \qquad \rightarrow \qquad 1 + \frac{18\,\alpha}{s(s+1)(s+8)} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\alpha > 0$ è mostrato in Fig. 2.
Nel contorno delle radici sono presenti 3 asintoti. Il centro degli asintoti è:

$$\sigma_a = \frac{1}{3}(-1-8) = -3$$

I valori di α^* e di ω^* per cui si ha l'attraversamento dell'asse immaginario sono:

$$\alpha^* = \frac{1 \cdot 8 \cdot (1+8)}{18} = 4, \qquad\qquad \omega^* = \sqrt{8} = 2.83.$$

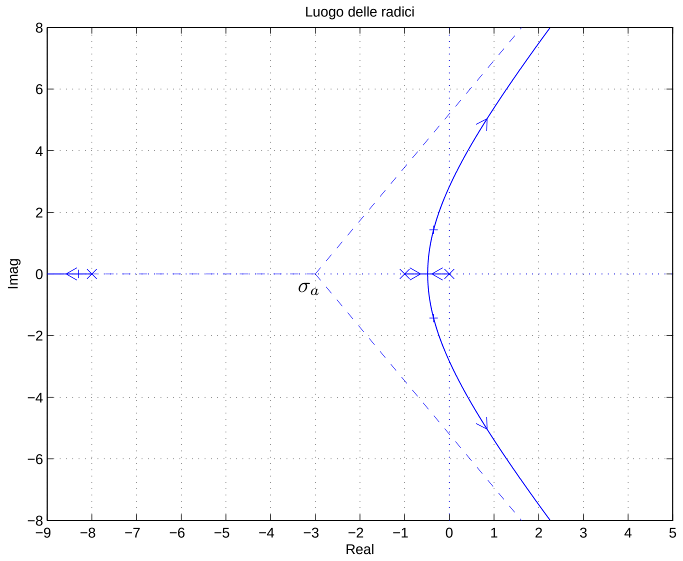


Figura 2: Contorno delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

a.3) Sia data la seguente funzione di trasferimento che descrive la dinamica di un sistema meccanico caratterizzato dalla massa m:

$$G(s) = \frac{1}{m\,s^4 + (m+1)s^3 + (m+3)s^2 + 3\,s + 1}$$

Utilizzando la metodologia del contorno delle radici mostrare come si spostano sul piano complesso i poli della funzione $G(s)$ al variare del parametro $m > 0$. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Sol. I poli della funzione $G(s)$ sono le soluzioni della seguente equazione:

$$m\,s^4 + (m+1)s^3 + (m+3)s^2 + 3\,s + 1 = 0$$

che puó essere riscritta nel seguente modo $1 + m\,G_1(s) = 0$:

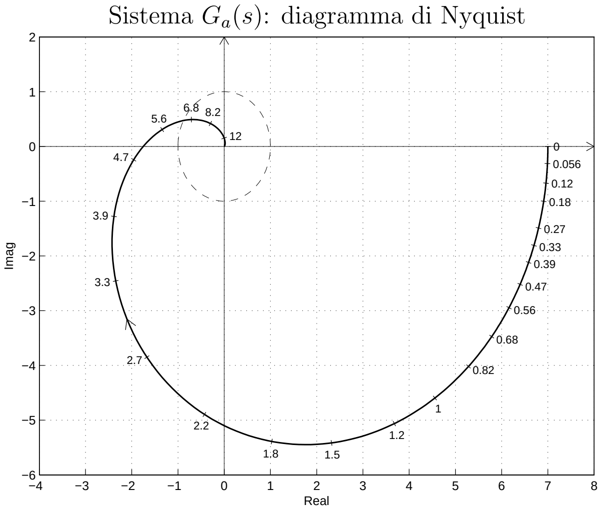
$$s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + m\,s^2(s^2 + s + 1) = 0 \qquad \rightarrow \qquad 1 + m\,\frac{s^2(s^2 + s + 1)}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} = 0$$

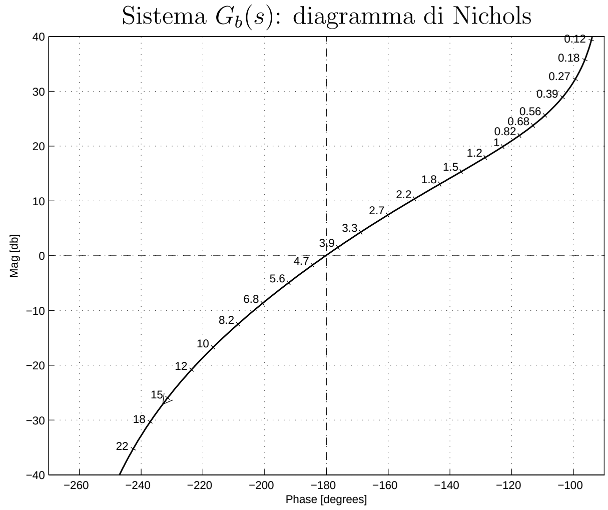
Mettendo in evidenza i poli e gli zeri della funzione $G_1(s)$ si ottiene:

$$1 + \frac{ms^2[(s+0.5)^2 + 0.866^2]}{(s+1)^3} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $m > 0$ è mostrato in Fig. 3. Nel contorno delle radici è presente un solo asintoto coincidente con il semiasse reale negativo, percorso dall'infinito a finito.

b) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi $G_a(s)$ e $G_b(s)$:





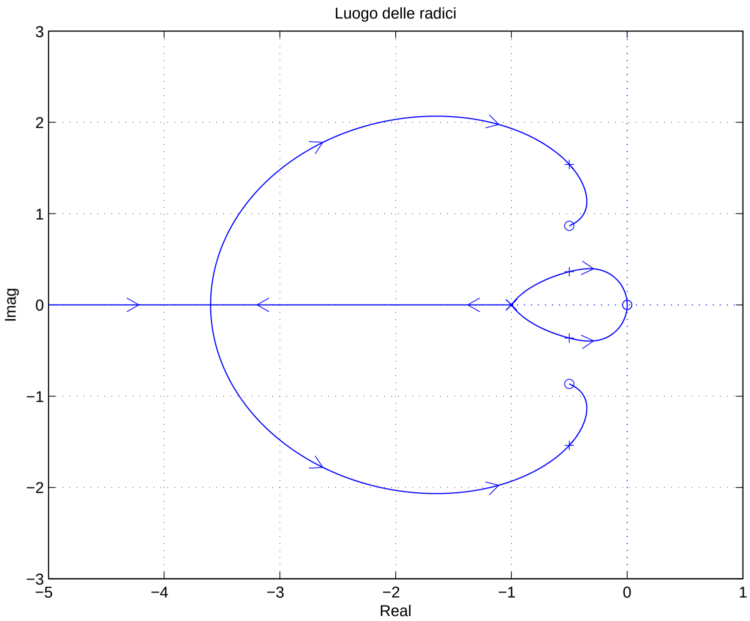


Figura 3: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare del parametro $m > 0$.

b.1) Per il sistema $G_a(s)$, progettare una rete correttrice in grado di garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = 60^o$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. La specifica sul margine di fase $M_\varphi = 60^o$ definisce completamente la posizione del punto $B = M_B\, e^{j\varphi_B}$: $M_B = 1$ e $\varphi_B = 240°$. La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 4.

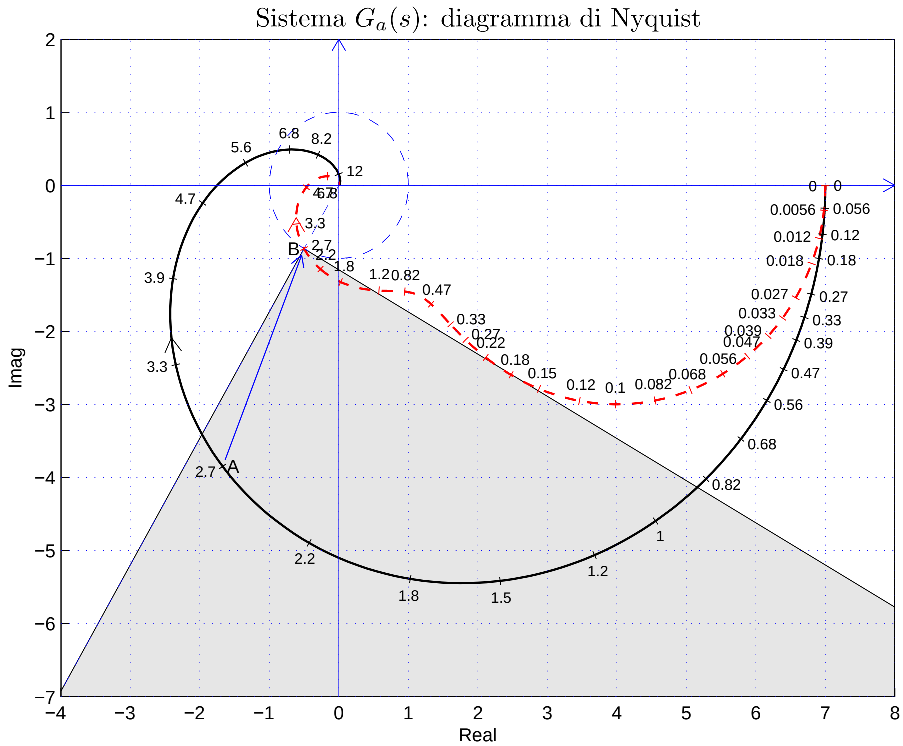


Figura 4: Diagrammi di Nyquisty delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)\, G_a(s)$.

Il punto $A = G_b(j\omega_A)$ scelto per la sintesi della rete correttrice è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 2.7$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 4.196, \qquad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 246.5°.$$

Sostituendo i valori di M, φ e $\omega = \omega_A$ all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 2.462$ e $\tau_2 = 10.44$ della rete correttrice $C(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.2383, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -6.523^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 2.462\, s)}{(1 + 10.44\, s)}.$$

Il diagramma di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 4.
Sintesi della rete correttrice $C_1(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A:

$$\begin{array}{rl}
\omega_A = & [\;\; 2.7 \quad 2.2 \quad 1.9 \quad 1.5\;] \\
M_A = & [\;\; 4.196 \quad 4.913 \quad 5.345 \quad 5.892\;] \\
\varphi_A = & [\; -113.5 \quad -95 \quad -83.23 \quad -66.8\;] \\
M = & [\;\; 0.2383 \quad 0.2035 \quad 0.1871 \quad 0.1697\;] \\
\varphi = & [\; -6.524 \quad -25 \quad -36.77 \quad -53.2\;] \\
\tau_1 = & [\;\; 2.462 \quad 0.7558 \quad 0.5397 \quad 0.3574\;] \\
\tau_2 = & [\;\; 10.44 \quad 4.309 \quad 3.995 \quad 4.406\;]
\end{array}$$

b.2) Per il sistema $G_b(s)$, progettare una rete ritardatrice in modo da garantire che il sistema compensato passi per il punto $B = (-140^o,\ -10\,\text{db})$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.

Sol. La posizione del punto B è completamente determinata dalla specifica di progetto $B = M_B\, e^{j\varphi_B}$: $M_B = -10\,\text{db} = 0.3162$ e $\varphi_B = -140^\circ$. La regione di ammissibilitá è mostrata in grigio in Fig. 5. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per il progetto è quello corrispondente alla

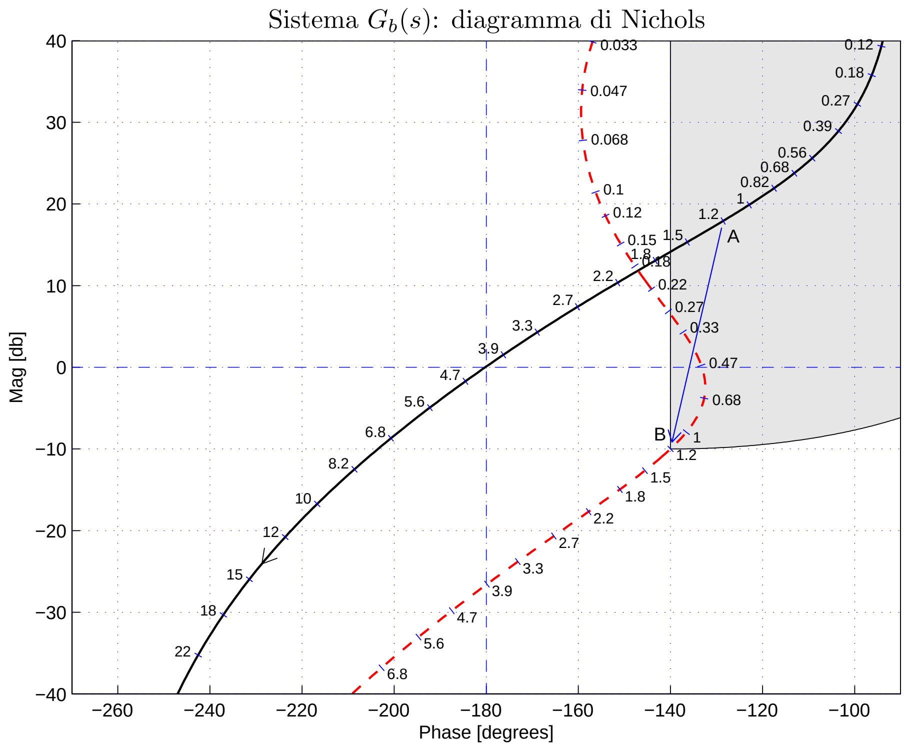


Figura 5: Diagrammi di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_2(s)\,G_a(s)$.

pulsazione $\omega_A = 1.2$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 7.87, \qquad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -128.55^\circ.$$

Sostituendo i valori di M, φ e ω all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 3.949$ e $\tau_2 = 100.4$ della rete correttrice $C_1(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.04017, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -11.44^\circ \quad \rightarrow \quad C_2(s) = \frac{(1 + 3.949\, s)}{(1 + 100.4\, s)}.$$

Il diagramma di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ $C_2(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

Sintesi della rete correttrice $C_2(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A:

$$\begin{array}{rl}
\omega_A = & [\;1.5 \quad 1.2 \quad 1 \quad 0.82\;] \\
M_A = & [\;5.845 \quad 7.87 \quad 9.877 \quad 12.49\;] \\
\varphi_A = & [\;-136.3 \quad -128.6 \quad -122.9 \quad -117.5\;] \\
M = & [\;0.0540 \quad 0.0401 \quad 0.0320 \quad 0.0253\;] \\
\varphi = & [\;-3.668 \quad -11.44 \quad -17.09 \quad -22.5\;] \\
\tau_1 = & [\;9.836 \quad 3.949 \quad 3.143 \quad 2.863\;] \\
\tau_2 = & [\;182.3 \quad 100.4 \quad 103 \quad 122.9\;]
\end{array}$$

b.3) Sempre per il sistema $G_b(s)$, progettare una rete anticipatrice in grado di garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_\alpha = 5$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.

Soluzione. La specifica sul margine di ampiezza $M_\alpha = 5°$ definisce completamente la posizione del punto $B = M_B\, e^{j\varphi_B}$: $M_B = 0.2 = -14$ db e $\varphi_B = -180°$. La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 6.

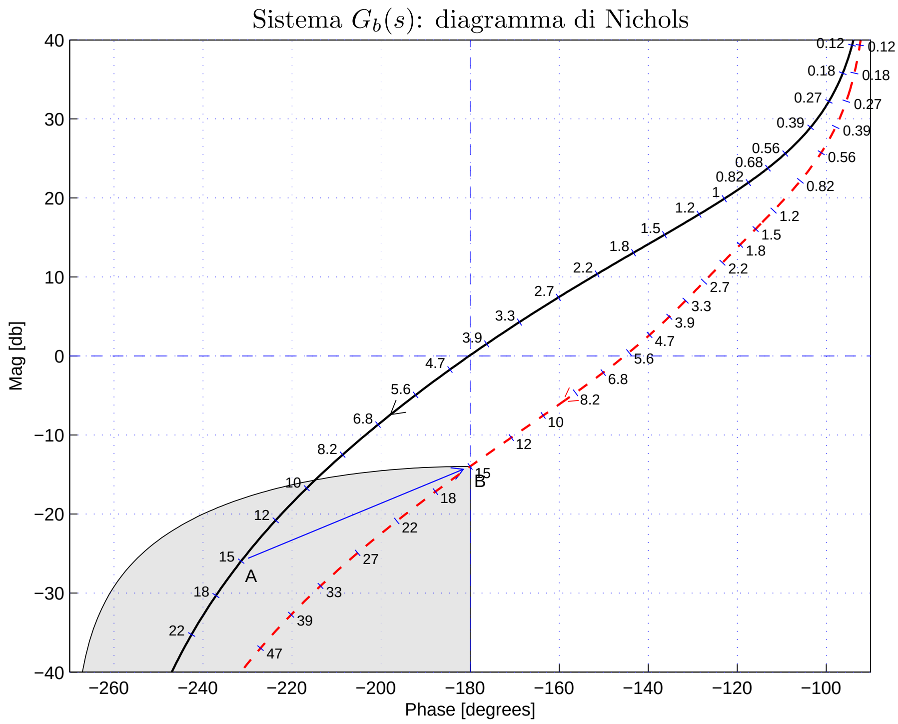


Figura 6: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_3(s)\,G_b(s)$.

Il punto $A = G(j\omega_A)$ che deve essere portato in B è quello assegnato corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 15$:

$$M_A = |G(j\omega_A)|\,0 - 25.95 \text{ db} = 0.0504, \qquad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -231.4°.$$

I valori di M e φ da usare nelle formule di inversione sono i seguenti:

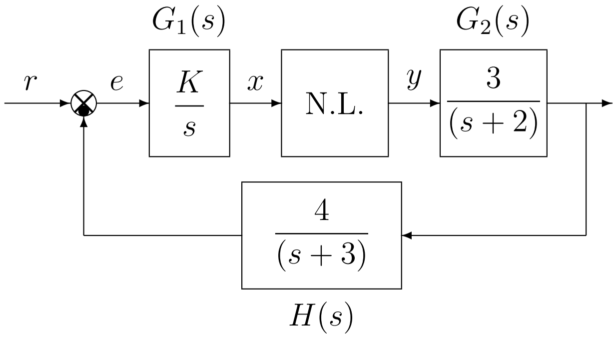
$$M = \frac{M_B}{M_{A'}} = 3.971, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_{A'} = 51.4° \qquad \rightarrow \qquad C_3(s) = \frac{(1 + 0.2854\, s)}{(1 + 0.03167\, s)}.$$

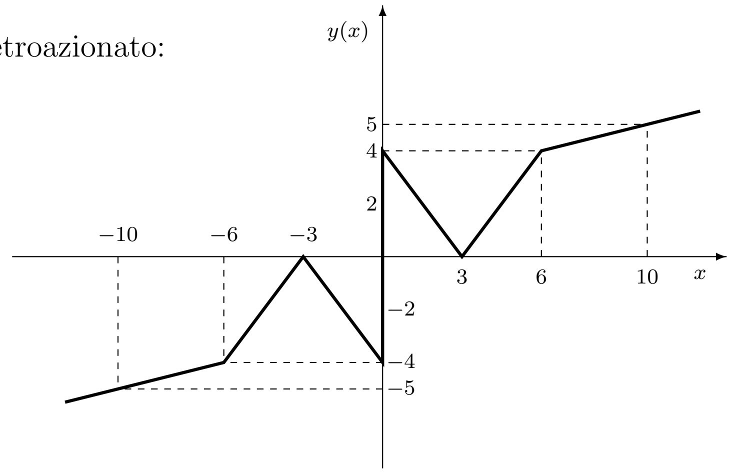
I diagrammi di Nichols delle funzioni $G_b(s)$ e $C_3(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 6.

Sintesi della rete correttrice $C_3(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A:

$$\begin{array}{rl}
\omega_A = & [\;10 \quad 12 \quad 15 \quad 18 \quad 22\;] \\
M_A = & [\;0.1458 \quad 0.0913 \quad 0.0503 \quad 0.0304 \quad 0.0173\;] \\
\varphi_A = & [\;143.3 \quad 136.3 \quad 128.6 \quad 122.9 \quad 117.4\;] \\
M = & [\;1.372 \quad 2.19 \quad 3.971 \quad 6.56 \quad 11.55\;] \\
\varphi = & [\;36.7 \quad 43.7 \quad 51.4 \quad 57.1 \quad 62.6\;] \\
\tau_1 = & [\;0.0954 \quad 0.177 \quad 0.2854 \quad 0.3982 \quad 0.5681\;] \\
\tau_2 = & [\;0.0122 \quad 0.0321 \quad 0.0316 \quad 0.0258 \quad 0.0191\;]
\end{array}$$

c) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:





c.1) Posto $K = 1$, calcolare i punti di lavoro $(x_i,\, y_i)$ corrispondenti ai valori $r_1 = 4$ ed $r_2 = 8$ dell'ingresso r.
Sol. I guadagni statici delle funzioni $G_1(s)$, $G_2(s)$ e $H_(s)$, rispettivamente, sono:

$$K_1 = \infty, \qquad\qquad K_2 = \frac{3}{2}, \qquad\qquad K_3 = \frac{4}{3}.$$

La retta di carico della parte lineare del sistema è una retta orizzontale di ordinata:

$$y = \frac{r}{K_2 K_3} = \frac{r}{2}.$$

Quando $r = r_1 = 4$ la retta di carico è $y = 2$ e il sistema presenta tre punti di lavoro:

$$(x_1,\, y_1) = (0,\, 2), \qquad\qquad (x_2,\, y_2) = (1.5,\, 2), \qquad\qquad (x_3,\, y_3) = (4.5,\, 2).$$

Quando $r = r_2 = 8$ la retta di carico è $y = 4$. In questo caso il punto di lavoro è:

$$(x_1,\, y_1) = (6,\, 4).$$

c.2) Posto $K = 1$, utilizzare il criterio del cerchio per verificare se il sistema retroazionato è stabile nell'intorno del punto $(x_0,\, y_0) = (10,\, 5)$.
Sol. Le pendenze α e β di 2 rette che centrate nel punto $(x_1,\, y_1) = (10,\, 5)$ racchiudono a settore tutta la non linearità sono le seguenti:

$$\alpha = \frac{1}{10} = 0.1, \qquad\qquad \beta = \frac{9}{10} = 0.9.$$

Il cerchio critico interseca il semiasse reale negativo nei punti:

$$-\frac{1}{\alpha} = -10, \qquad\qquad -\frac{1}{\beta} = -1.111.$$

Il margine di ampiezza K^* e la pulsazione ω^* della funzione $G(s) = G_1(s)\, G_2(s)\, H(s)$ si determinano utilizzando il criterio di Routh:

$$G(s) = \frac{12}{s(s+2)(s+3)} \qquad \rightarrow \qquad K^* = \frac{2 \cdot 3 \cdot (2+3)}{12} = 2.5, \qquad\qquad \omega^* = \sqrt{6} = 2.45.$$

Il valore di K^* è maggiore di β:

$$K^* = 2.5 > \beta = 0.9$$

e il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ non interseca il cerchio critico. Quindi, in base al criterio del cerchio, si può affermare che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile nell'intorno del punto di lavoro. In Fig. 7 è mostrato il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ sovrapposto al cerchio critico.

c.3) Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità $y(x)$ nell'intorno del punto $(0,\, 0)$. Utilizzare le variabili $m_1,\; m_2,\; m_3, \ldots$ per rappresentare gli eventuali valori minimi e massimi "non noti" della funzione $F(X)$.

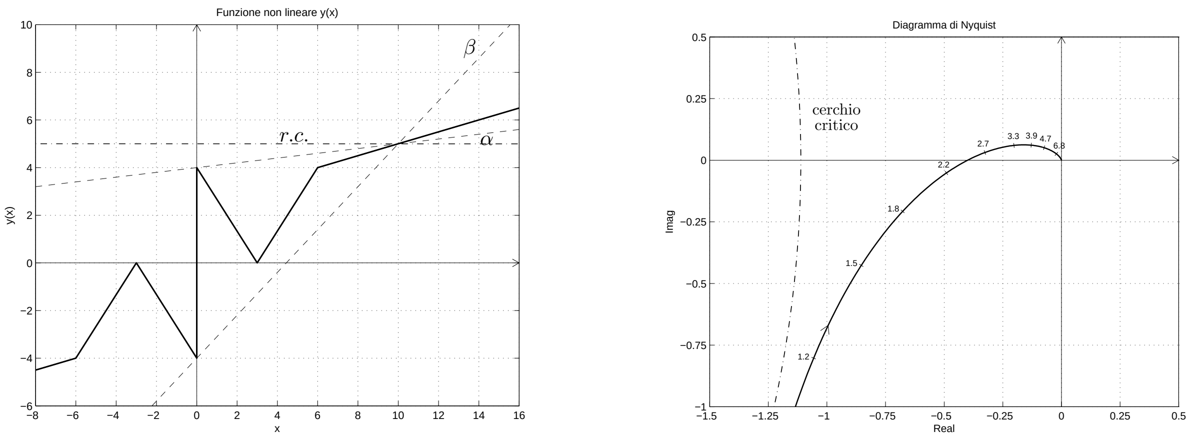


Figura 7: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ e cerchio critico.

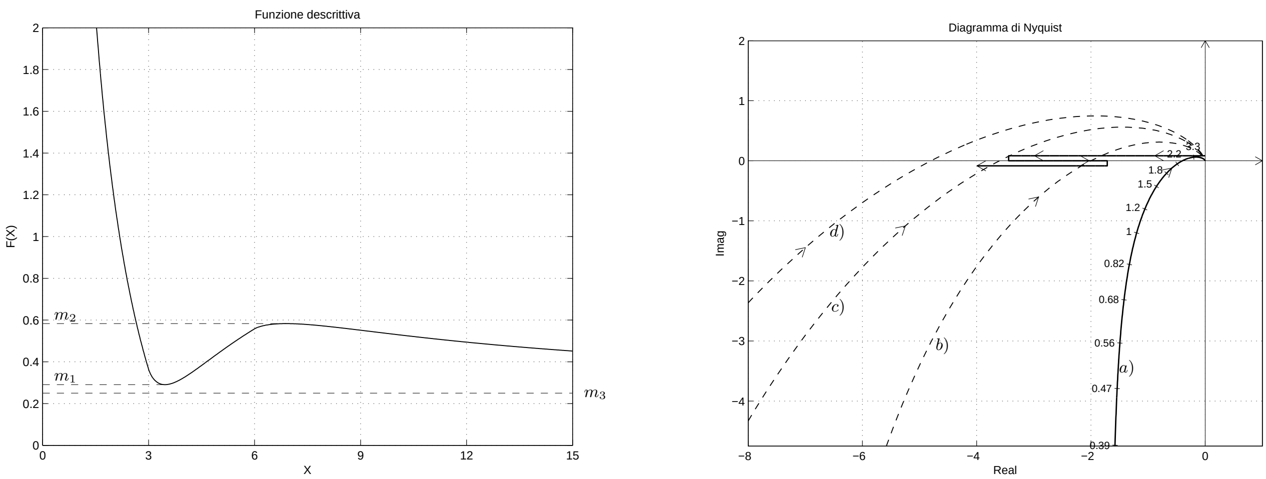


Figura 8: Andamento della funzione descrittiva $F(X)$.

Sol. L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ è mostrato in Fig. 8. Indichiamo: a) con m_1 il valore minimo della funzione $F(X)$ per $X \simeq 3$; b) con m_2 il valore massimo della funzione $F(X)$ per $X \simeq 6$; c) con $m_3 = \frac{1}{4} = 0.25$ il valore finale a cui tende la funzione $F(X)$ per $X \to \infty$. Il valore m_2 può essere calcolato esattamente sono conoscendo con precisione la funzione $F(X)$. Il primo tratto della funzione descrittiva coincide con la funzione $F(X)$ di un relè ideale sommato ad una pendenza negativa:

$$F(X) = \frac{16}{\pi X} - \frac{4}{3}$$

c.4) Discutere "qualitativamente", anche in funzione dei parametri m_1, m_2, m_3, ..., l'esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno $K > 0$.

Sol. Per $K = 1$, il margine di ampiezza K_1^* del sistema $G_1(s)$ è $K_1^* = 2.5$. Per $K \neq 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $K\,G_1(s)$ è $K^* = \frac{K_1^*}{K} = \frac{2.5}{K}$. Al variare di K^* si possono avere le seguenti condizioni di funzionamento:

a) Per $K^* > m_2$ il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile.

b) Per $m_1 < K^* < m_2$, il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in tre punti a cui corrispondono due cicli limiti stabili (il primo, il terzo) e uno instabile (il secondo).

c) Per $m_3 < K^* < m_1$, il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile.

d) Per $K^* < m_3$, la funzione $-1/F(X)$ è tutta interna al diagramma completo della funzione $G(s)$ per cui non vi sono cicli limite e il sistema retroazionato è instabile.

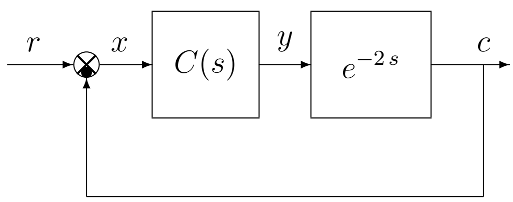
c.5) Posto $K = 1$, calcolare l'ampiezza X^* e la pulsazione ω^* del più piccolo ciclo limite stabile presente nel sistema retroazionato.

Sol. Posto $K = 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $K\,G(s)$ è $K^* = 2.5$. Tale valore è maggiore di m_1 per cui nel sistema retroazionato è presente un solo ciclo limite stabile di cui è possibile calcolare l'ampiezza X^* utilizzando la funzione $F(X)$:

$$F(X^*) = K^* \quad \to \quad \frac{16}{\pi X} - \frac{4}{3} = 2.5 \quad \to \quad X^* = \frac{96}{23\pi} = 1.3286.$$

La pulsazione ω^* del ciclo limite coincide con quella del punto di intersezione della $G(s)$ con il semiasse reale negativo $\omega^* = \sqrt{6} = 2.46$.

d) Dato il sistema retroazionato riportato a fianco, progettare il regolatore $C(s)$ in modo che il sistema retroazionato abbia un errore a regime nullo per ingresso a gradino e un margine di ampiezza $M_a = 5$. Calcolare inoltre la pulsazione ω^*.



Sol. Per potere avere errore a regime nullo il regolatore $C(s)$ deve essere di tipo integrale:

$$C(s) = \frac{K}{s}$$

Per $K = 1$, il margine di stabilità e la pulsazione critica del sistema sono:

$$K^* = \omega^* = \frac{\pi}{2\,t_0} = \frac{\pi}{4} = 0.7854.$$

Il valore di K necessario per imporre un margine di ampiezza $M_a = 4$ al sistema compensato si ottiene nel modo seguente:

$$-\frac{K}{K^*} = -\frac{1}{M_a} \qquad \to \qquad K = \frac{K^*}{M_a} = \frac{\pi}{20} = 0.157$$

e) Utilizzando il metodo della corrispondenza poli-zeri, discretizzare la seguente rete correttrice

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(1+2\,s)}{s}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$ e si imponga l'uguaglianza dei guadagni alle alte frequenze.

Soluzione. Utilizzando il metodo della corrispondenza poli-zeri si ottiene:

$$D(z) = K\,\frac{(1-e^{-0.5\,T}\,z^{-1})}{(1-z^{-1})} = K\,\frac{(1-e^{-0.05}\,z^{-1})}{(1-z^{-1})} = K\,\frac{(1-0.9512\,z^{-1})}{(1-z^{-1})}$$

Il valore di K si determina imponendo l'uguaglianza dei guadagni alle alte frequenze:

$$\lim_{s\to\infty} D(s) = \lim_{z\to -1} D(z) \qquad \to \qquad 2 = K\,\frac{1.9512}{2} \qquad \to \qquad K = \frac{4}{1.9512} = 2.05$$

Sostituendo in $D(z)$ si ottiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = 2.05\,\frac{(1-0.9512\,z^{-1})}{(1-z^{-1})} = \frac{2.05-1.95\,z^{-1}}{(1-z^{-1})}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m(k) = m(k-1) + 2.05\,e(k) - 1.95\,e(k-1)].$$

f) Calcolare la risposta all'impulso unitario $x(n) = (1, 0, 0, \ldots)$ del seguente sistema dinamico discreto, partendo da condizioni iniziali nulle:

$$y(n+2) - 0.4\;y(n+1) - 0.6\;y(n) = 2\,x(n+1)$$

Sol. Utilizzando le Z-trasformate si ottiene:

$$Y(z) = \frac{2\,z}{z^2-0.4\,z-0.6}\,X(z) = \frac{2\,z}{(z-1)(z+0.6)}$$

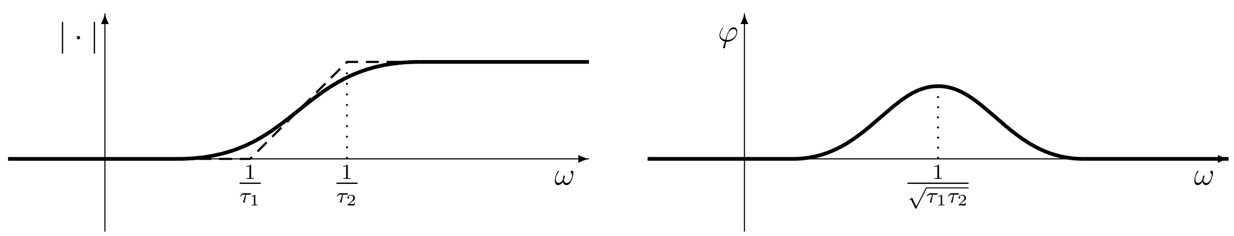
Scomponendo in fratti semplici si ottiene:

$$Y(z) = z\left[\frac{1.25}{z-1} - \frac{1.25}{z+0.6}\right]$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(n) = 1.25\,[1-(-0.6)^n]$$

g) Tracciare qualitativamente i diagrammi di bode dei moduli e delle fasi di una rete anticipatrice $C(s) = \frac{(1+\tau_1\,s)}{(1+\tau_2\,s)}$ con $\tau_1 > \tau_2$:



Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Controlli Automatici B

27 Giugno 2014 - Domande Teoriche

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. La risposta al test è considerata corretta solo se tutte le affermazioni corrette sono state contrassegnate.

1. Posto $T = 0.5$ e utilizzando la corrispondenza tra piano-s e piano-z, calcolare il tempo di assestamento T_a della risposta impulsiva $g(k)$ del sistema discreto $G(z) = \frac{z}{z-0.8}$:

$$T_a = \frac{3}{|\frac{1}{T}\ln(p)|} = \frac{3}{|\frac{1}{0.5}\ln(0.8)|} = 6.72 \text{ s.}$$

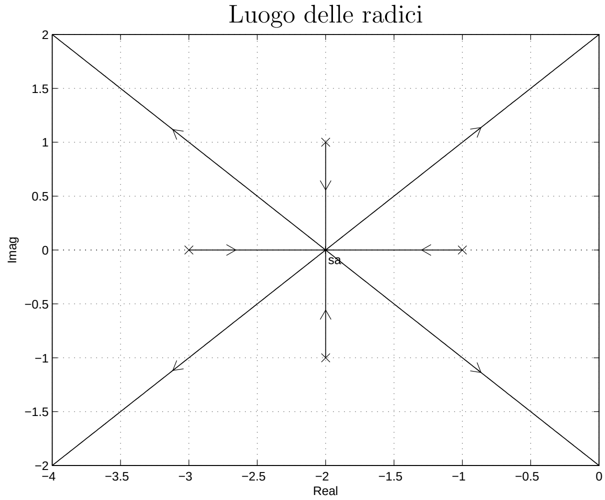
2. a) Sulla figura riportata a fianco, disegnare il luogo delle radici per $K > 0$ del seguente sistema

$$G(s) = \frac{1}{(s+3)[(s+2)^2+1](s+1)}$$

caratterizzato dai 4 poli indicati in figura con delle crocette. Nella graficazione tenere conto del fatto che in $(-2,\ 0)$ è presente un punto di diramazione di ordine 4.

b) Calcolare per quale valore di K tutti i poli del sistema retroazionato si trovano in $(-2,\ 0)$:

$$K_d = \left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=-2} = 1$$



3. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{k\to 0} y(k)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{k\to\infty} y(k)$ del segnale $y(k)$ corrispondente alla seguente funzione $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{z^{-1}(1+3z^{-1})}{(1-z^{-1})(2+z^{-1})} \qquad \to \qquad y_0 = 0, \qquad y_\infty = \frac{4}{3}$$

4. Il metodo di Ziegler-Nichols per determinare i valori di primo tentativo dei parametri di un regolatore standard PID

- ○ richiede la conoscenza esatta del modello del sistema da controllare
- ○ richiede la conoscenza della risposta impulsiva del sistema da controllare
- ⊗ richiede la conoscenza della risposta al gradino del sistema da controllare
- ⊗ è applicabile in modo approssimato anche al controllo di sistemi non lineari

5. Sia $X(z) = \mathcal{Z}[x(k)]$ la $\mathcal{Z}$-trasformata della successione $x(k)$. Per $n = 1, 2, \ldots$, enunciare il teorema della traslazione nel tempo nei 2 casi a) ritardo, e b) anticipo:

$$a) \qquad \mathcal{Z}[x(t-nT)] = z^{-n}X(z)$$

$$b) \qquad \mathcal{Z}[x(t+nT)] = z^{n}\left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}\right]$$

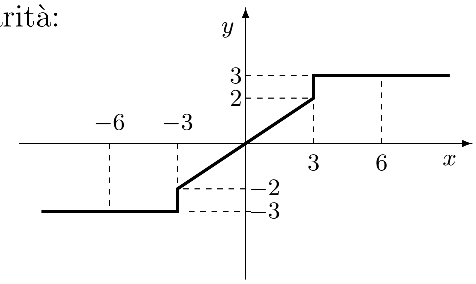
6. Indicare quale dei seguenti sistemi discreti $G(z)$ ha la risposta impulsiva $g(k)$ che tende a zero più rapidamente:

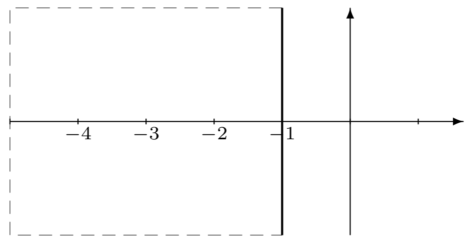
○ $G(z) = \frac{1}{z^2(z-0.7)}$ ○ $G(z) = \frac{1}{z^2(z+0.4)}$ ○ $G(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ ⊗ $G(z) = \frac{1}{z(z^2+0.1)}$

7. Tipicamente, quali delle seguenti reti correttrici è bene utilizzare se si vuole stabilizzare in retroazione un sistema caratterizzato da un margine di fase fortemente negativo?

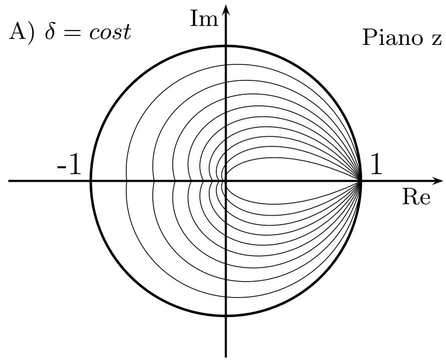
   ○ una rete anticipatrice; ○ un regolatore PD;
   ⊗ una rete ritardatrice; ⊗ un regolatore PI;

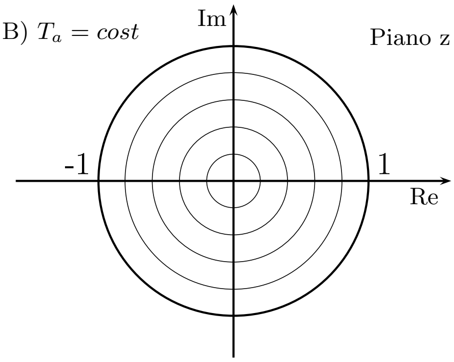
8. Sia (0, 0) il punto di lavoro. Disegnare il cerchio critico corrispondente alle seguente non linearità:



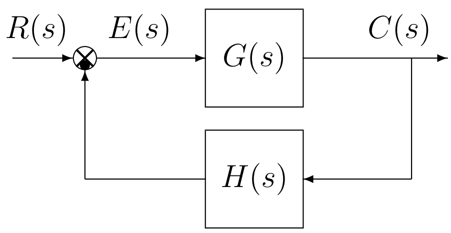


9. Tracciare qualitativamente sul piano z: A) i luoghi a coefficiente di smorzamento δ costante; B) i luoghi a decadimento esponenziale costante:



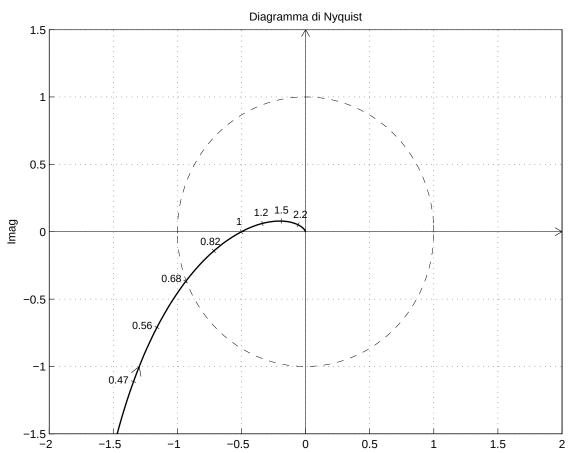


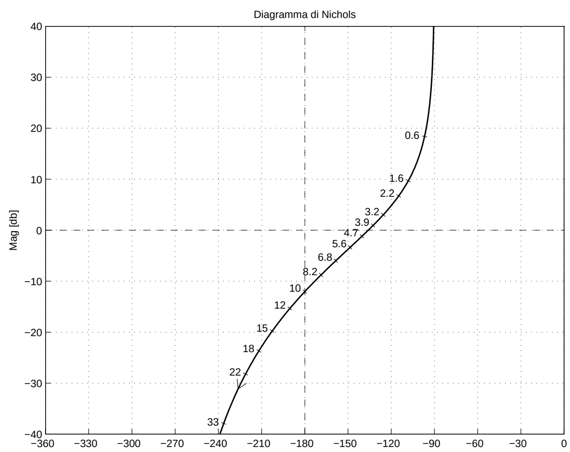
10. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere il legame che lega la variazione relativa del sistema $G(s)$ alla variazione relativa del sistema retroazionato $G_0(s)$ quando varia un parametro α interno alla funzione di trasferimento $G(s)$:



$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)} \; \frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

11. Fornire una stima della larghezza di banda ω_{f0} e del tempo di salita t_r dei due sistemi retroazionati corrispondenti ai seguenti sistemi $G_1(s)$ e $G_2(s)$:





$$\omega_{f0,1} \simeq 0.68 \qquad \omega_{f0,2} \simeq 4.2$$

$$t_{r1} \simeq 1.47 \qquad t_{r2} \simeq 0.24$$