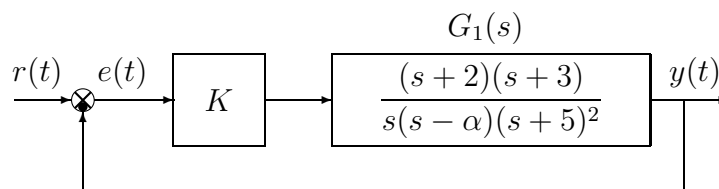


Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a1) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



Posto  $\alpha = 1$ , tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro  $K > 0$ . Determinare esattamente la posizione degli asintoti. Determinare la posizione dei punti di diramazione “solo in modo qualitativo”. Nota: non é necessario calcolare le intersezioni con l’asse immaginario.

*Soluzione.* Posto  $\alpha = 1$ , l’equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1 G_1(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + K \frac{(s+2)(s+3)}{s(s-1)(s+5)^2} = 0$$

dove  $K_1 = K$ . L’andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema  $G_1(s)$  al variare di  $K > 0$  é mostrato in Fig. 1. Il luogo delle radici è caratterizzato da due asintoti. Per  $K > 0$  i

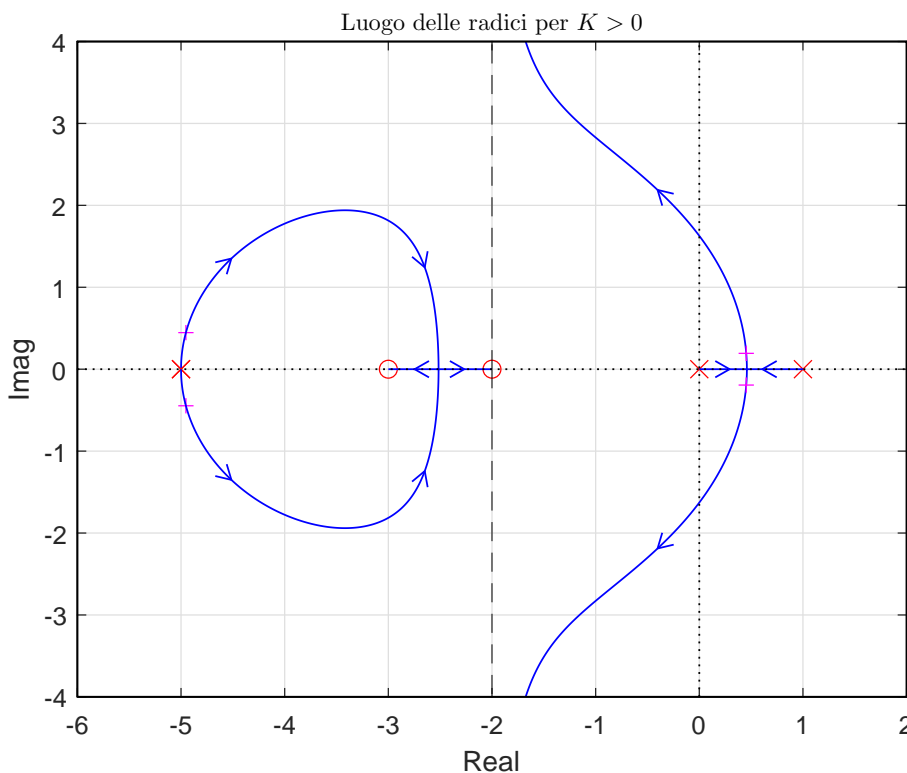


Figura 1: Luogo delle radici del sistema  $G_1(s)$  al variare di  $K > 0$

due asintoti sono verticali e si incontrano nel seguente punto  $\sigma_a$ :

$$\sigma_a = \frac{1}{2} (1 - 5 - 5 + 2 + 3) = -2.$$

L’equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K \frac{(s+2)(s+3)}{s(s-1)(s+5)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 + 9s^3 + (K+15)s^2 + (5K-25)s + 6K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & K + 15 & 6K \\ 3 & 9 & 5K - 25 & \\ 2 & 4K + 160 & 54K & \\ 1 & 214K + 20K^2 - 4000 & & \\ 0 & 54K & & \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano positivi si ricavano i seguenti vincoli:

$$4K + 160 > 0, \quad 214K + 20K^2 - 4000 > 0, \quad 54K > 0,$$

dai quali si ricava:

$$K > -40, \quad (K < -20.4703) \cup (K > 9.7703), \quad K > 0.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 9.7703 = K_1.$$

La pulsazione  $\omega_1$  corrispondente al valore limite  $K_1$  è:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{54K_1}{4K_1 + 160}} = \sqrt{\frac{5K_1 - 25}{9}} = 1.6279.$$

- a.2) Posto  $K = 30$ , tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro  $\alpha > 0$ . Nella graficazione si tenga conto che: a) la posizione dei poli del sistema retroazionato quando  $K = 30$  e  $\alpha = 0$  è:  $p_{1,2} \simeq -2.5 \pm 1.5j$ , e  $p_{3,4} \simeq -2.5 \pm 4j$ ; b) il sistema retroazionato è stabile per  $0 < \alpha < \alpha^*$  (il valore di  $\alpha^*$  non deve essere determinato). Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

*Soluzione.* Posto  $K = 30$ , l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente:

$$1 + 30 \frac{(s+2)(s+3)}{s(s-\alpha)(s+5)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad s(s-\alpha)(s+5)^2 + 30(s+2)(s+3) = 0$$

da cui si ottiene la seguente equazione:

$$1 - \frac{\alpha s(s+5)^2}{s^2(s+5)^2 + 30(s+2)(s+3)} = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + K_1 G_2(s) = 0$$

dove  $K_1 = -\alpha$ . I poli della funzione  $G_2(s)$  sono i seguenti:

$$1 + \frac{K_1 s(s+5)^2}{[(s+2.5)^2 + 1.5^2][(s+2.5)^2 + 4^2]} = 0$$

I poli indicati nel testo dell'esercizio sono "approssimati". Il contorno delle radici al variare del parametro  $\alpha > 0$ , cioè per  $K_1 < 0$  è mostrato in Fig. 2.

Il contorno delle radici ha un solo asintoto che coincide con il semiasse reale positivo.

- a.3) Sia data la seguente funzione di trasferimento  $G_3(s)$  che descrive il legame tra la tensione in ingresso  $V(s)$  e la velocità angolare in uscita  $\omega(s)$  di un motore elettrico in corrente continua:

$$G_3(s) = \frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{K_e}{(R + Ls)(b + Js) + K_e^2}$$

Posto  $R = 1$ ,  $b = 1$ ,  $L = 1$  e  $K_e = 1$ , mostrare graficamente come si muovono sul piano complesso i poli della funzione  $G_3(s)$  al variare del parametro  $J > 0$ . Calcolare il valore  $J^*$  a cui corrisponde il minimo tempo di assestamento del sistema  $G_3(s)$  alla risposta al gradino.

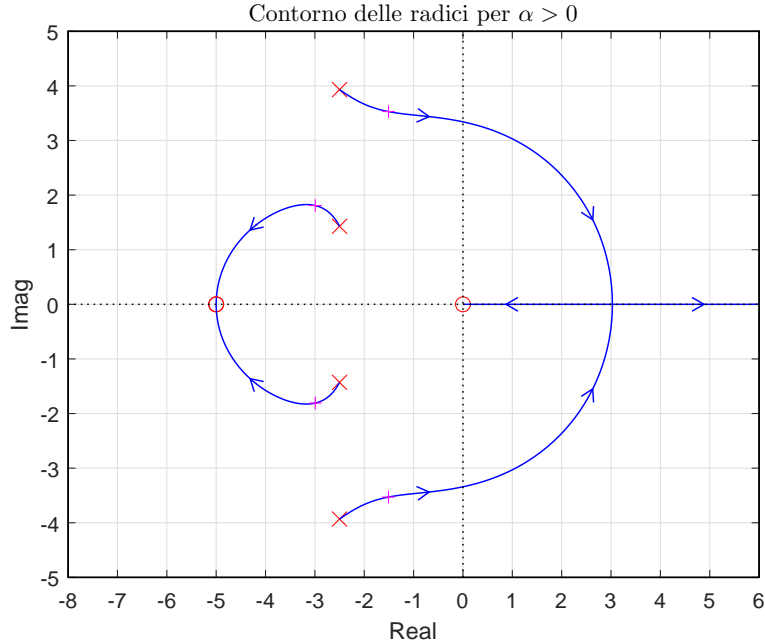


Figura 2: Contorno delle radici del sistema  $G_2(s)$  al variare del parametro  $\alpha > 0$ .

*Soluzione.* I poli della funzione di trasferimento  $G_3(s)$  coincidono con le radici del polinomio a denominatore:

$$(R + Ls)(b + Js) + K_e^2 = 0$$

Posto  $R = 1$ ,  $b = 1$ ,  $L = 1$  e  $K_e = 1$  si ottiene la seguente equazione:

$$(1 + s)(1 + Js) + 1 = 0$$

che, in modo equivalente, può essere riscritta nel seguente modo:

$$s + 2 + Js(1 + s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{Js(s+1)}{s+2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + JG_4(s) = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro  $J > 0$  è mostrato in Fig. 3. In questo caso il

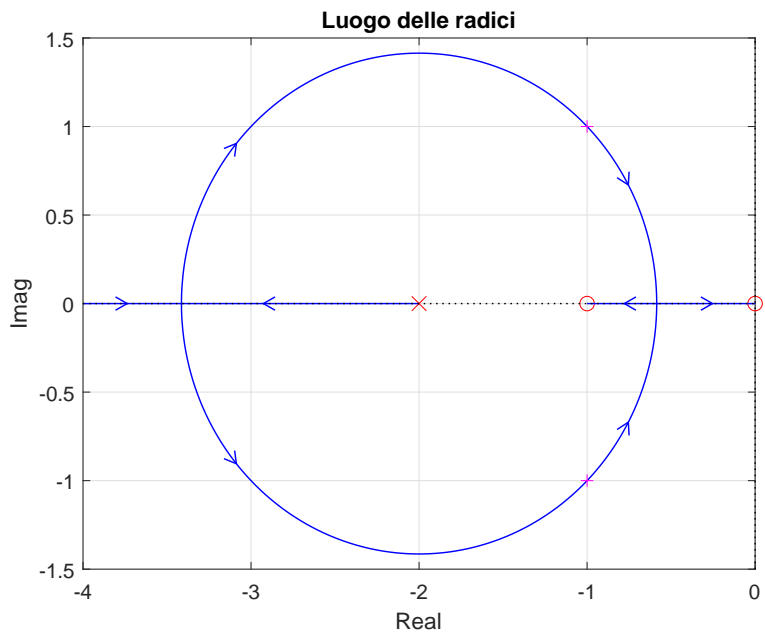


Figura 3: Contorno delle radici del sistema  $G_4(s)$  al variare del parametro  $J > 0$ .

contorno delle radici si muove lungo una circonferenza centrata in  $p = -2$ . Il raggio  $R_c$  della circonferenza è:

$$R_c = \sqrt{d_1 \cdot d_2} = \sqrt{1 \cdot 2} = \sqrt{2} \simeq 1.41$$

I due punti di diramazione  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  del contorno delle radici sono i seguenti:

$$\sigma_1 = -2 - \sqrt{2} \simeq -3.41, \quad \sigma_2 = -2 + \sqrt{2} \simeq -0.59,$$

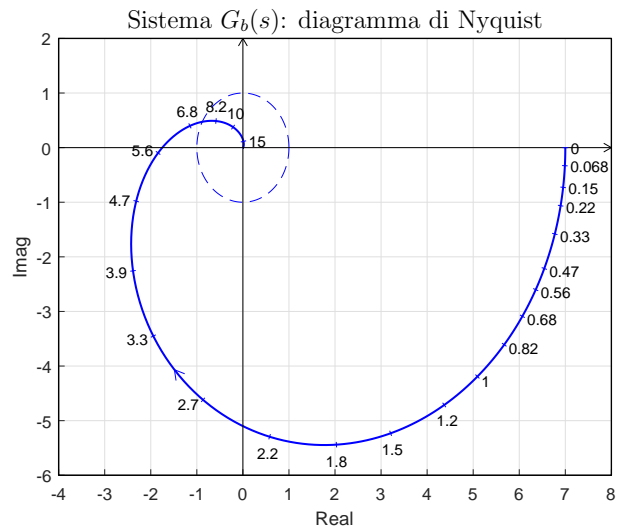
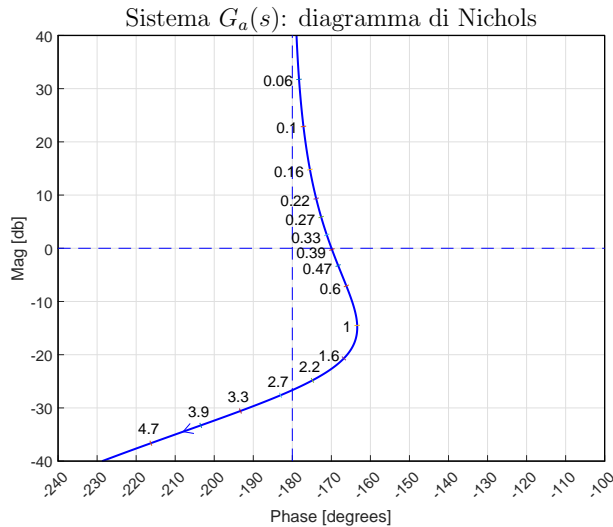
I punti di diramazione potevano essere calcolati anche nel seguente modo:

$$\frac{dG_4(s)}{ds} = 0 \quad \rightarrow \quad (2s+1)(s+2) - s(s+1) = s^2 + 4s + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}.$$

La condizione di minimo tempo di assestamento del sistema  $G_1(s)$  alla risposta al gradino si ha in corrispondenza del punto di diramazione  $\sigma_1 = -2 - \sqrt{2}$  e quindi in corrispondenza del seguente valore del parametro  $J^*$ :

$$J^* = - \left. \frac{1}{G_4(s)} \right|_{s=\sigma_1} = - \left. \frac{s+2}{s(s+1)} \right|_{s=-2-\sqrt{2}} = 0.1716.$$

b) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi  $G_a(s)$  e  $G_b(s)$ :



b.1) Per il sistema  $G_a(s)$ , progettare una rete correttiva in modo da garantire al sistema compensato un margine di fase  $M_\varphi = 50^\circ$ . Scegliere il valore della pulsazione  $\omega$  che si ritiene più opportuno.

**Soluzione.** La posizione del punto  $B$  è completamente determinata dalla specifica di progetto  $B = M_B e^{j\varphi_B}$ :  $M_B = 0 \text{ db} = 1$  e  $\varphi_B = -130^\circ$ . La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 4. Il punto  $A = G_a(j\omega_A)$  scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione  $\omega_A = 1$ :

$$M_A = |G(j\omega_A)| = -14.49 \text{ db} = 0.1885, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -163.4^\circ.$$

Sostituendo i valori di  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega$  all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri  $\tau_1 = 8.123$  e  $\tau_2 = 1.175$  della rete correttiva  $C_1(s)$ :

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 5.305, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 33.39^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 8.123 s)}{(1 + 1.175 s)}.$$

Sintesi della rete correttiva  $C_1(s)$  con altri valori della pulsazione  $\omega_A$ :

$$\begin{aligned} \omega_A &= [ 0.6 \quad 1 \quad 1.6 \quad 2.2 \quad 2.7 \quad 3.3 \quad 3.9 ] \\ M_A &= [ 0.4433 \quad 0.1885 \quad 0.0923 \quad 0.0573 \quad 0.0416 \quad 0.0295 \quad 0.0216 ] \\ \varphi_A &= [ 193.8 \quad 196.6 \quad 193.2 \quad 185.1 \quad 177 \quad 166.7 \quad 156.5 ] \\ M &= [ 2.256 \quad 5.305 \quad 10.83 \quad 17.42 \quad 24.04 \quad 33.8 \quad 46.15 ] \\ \varphi &= [ 36.17 \quad 33.39 \quad 36.8 \quad 44.85 \quad 53.01 \quad 63.29 \quad 73.45 ] \\ \tau_1 &= [ 4.091 \quad 8.123 \quad 10.46 \quad 10.77 \quad 10.87 \quad 11.31 \quad 12.27 ] \\ \tau_2 &= [ 1.028 \quad 1.175 \quad 0.7391 \quad 0.4199 \quad 0.2597 \quad 0.1424 \quad 0.0703 ] \end{aligned}$$

I diagrammi di Nichols delle funzioni  $G_a(s)$  e  $C_1(s)G_a(s)$  sono mostrati in Fig. 4.

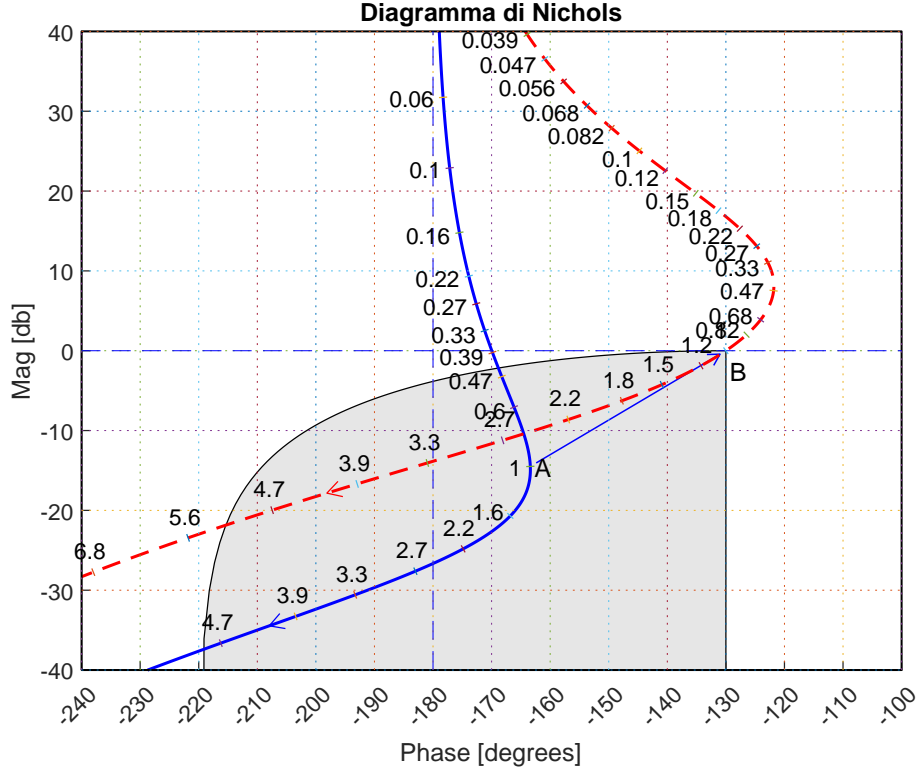


Figura 4: Diagrammi di Nichols delle funzioni  $G_a(s)$  e  $C_1(s)G_a(s)$ .

b.2) Per il sistema  $G_b(s)$ , progettare una rete correttrice in grado di garantire che il sistema compensato passi per il punto  $B = (-0.5, -0.5)$ . Scegliere il valore della pulsazione  $\omega$  che si ritiene più opportuno;

Soluzione. La posizione del punto  $B$  è completamente determinata dalla specifica di progetto  $B = M_B e^{j\varphi_B}$ :  $M_B = 0.7071$  e  $\varphi_B = 225^\circ$ . La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 5. Il punto  $A = G_a(j\omega_A)$  scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione  $\omega_A = 3.3$ :

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 3.961, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 240.6^\circ.$$

Sostituendo i valori di  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega$  all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri  $\tau_1 = 0.8847$  e  $\tau_2 = 5.23$  della rete correttrice  $C_1(s)$ :

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.1785, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -15.59^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 0.8847 s)}{(1 + 5.23 s)}.$$

Sintesi della rete correttrice  $C_1(s)$  con altri valori della pulsazione  $\omega_A$ :

$\omega_A =$	1.5	1.8	2.2	2.7	3.3
$M_A =$	6.136	5.806	5.326	4.699	3.961
$\varphi_A =$	301.5	290.5	276.3	259.4	240.6
$M =$	0.1152	0.1218	0.1328	0.1505	0.1785
$\varphi =$	-76.52	-65.47	-51.25	-34.39	-15.59
$\tau_1 =$	0.0808	0.1792	0.2874	0.4425	0.8847
$\tau_2 =$	5.79	4.761	4.025	3.817	5.23

I diagrammi di Nyquist delle funzioni  $G_a(s)$  e  $C_1(s)G_a(s)$  sono mostrati in Fig. 5.

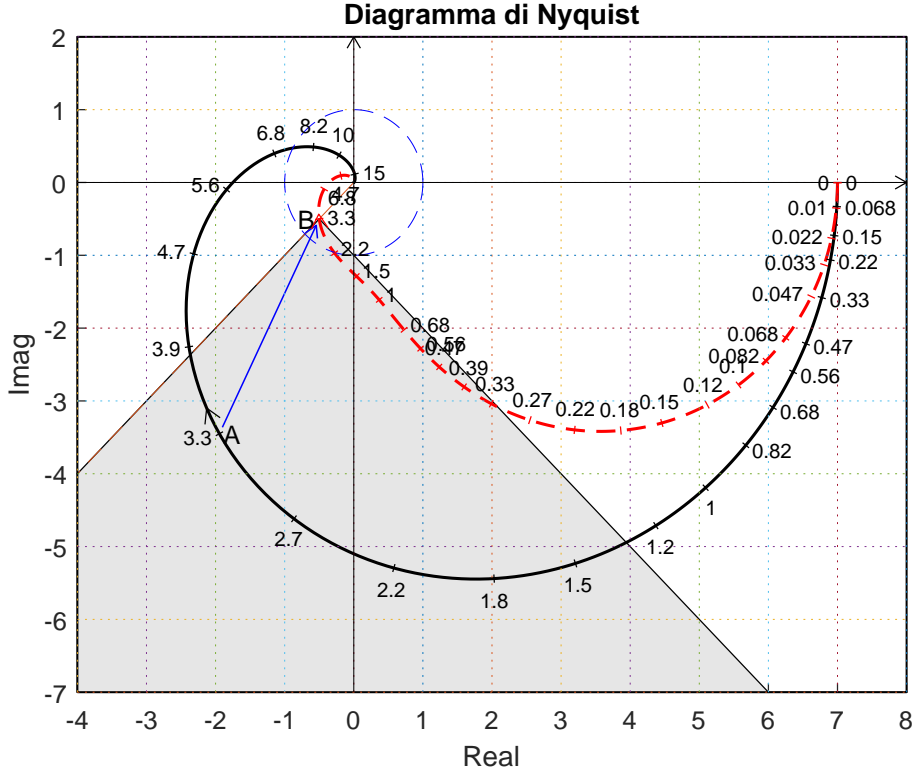
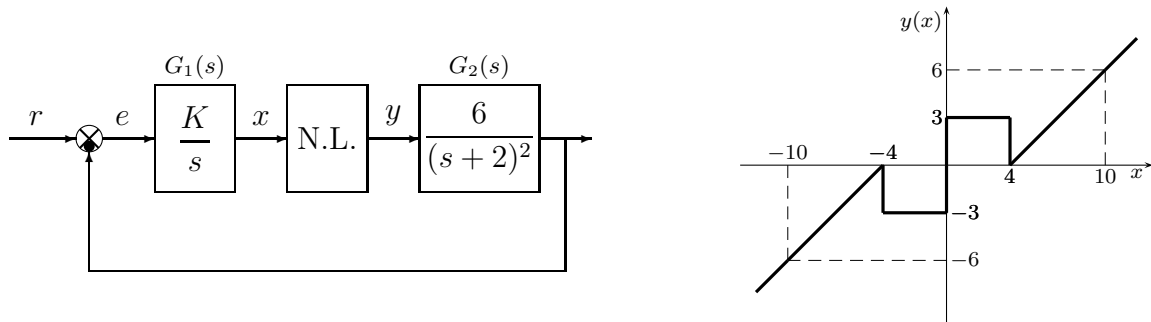


Figura 5: Diagrammi di Nyquist delle funzioni  $G_b(s)$  e  $C_2(s)G_b(s)$ .

c) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:



c.1) Posto  $K = 1$ , determinare per quale valore  $r_1$  dell'ingresso  $r$  il punto di lavoro del sistema retroazionato è posizionato in  $(x_1, y_1) = (10, 6)$ .

*Soluzione.* Il sistema  $G_1(s)$  è di tipo 1 per cui si ha:  $K_1 = \infty$ ,  $K_2 = 1.5$  e  $K_3 = 1$ . La retta di carico della parte lineare del sistema è una retta orizzontale di ordinata:

$$y = \frac{r}{K_2 K_3} = \frac{r}{1.5} \quad \rightarrow \quad r_1 = 9.$$

c.2) Posto  $K = 1$  ed utilizzando il criterio del cerchio, dire se il sistema retroazionato è stabile o meno nell'intorno del punto  $(x_1, y_1) = (10, 6)$ .

*Soluzione.* Le pendenze  $\alpha$  e  $\beta$  delle due rette che centrate nel punto  $(x_1, y_1) = (10, 6)$  racchiudono a settore tutta la non linearità sono le seguenti:

$$\alpha = \frac{3}{10} = 0.3, \quad \beta = 1.$$

Il cerchio critico interseca il semiasse reale negativo nei punti:

$$-\frac{1}{\alpha} = -3.33, \quad -\frac{1}{\beta} = -1.$$

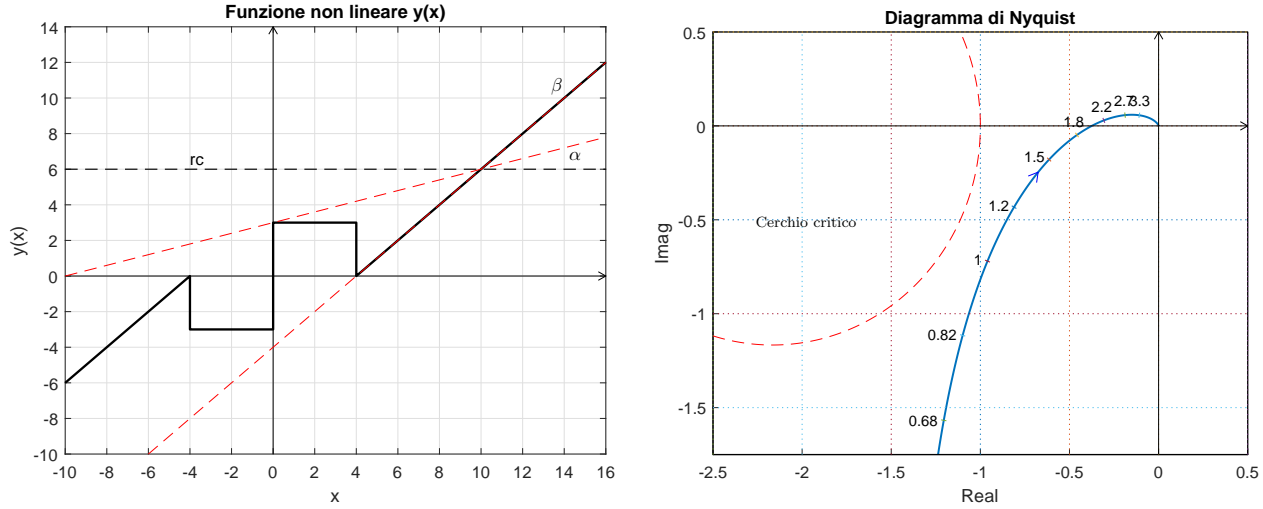


Figura 6: Settore che racchiude la non linearità e cerchio critico.

Il margine di ampiezza  $K_1^*$  e la pulsazione  $\omega_1^*$  della funzione  $G_1(s)$  si determinano utilizzando il criterio di Routh:

$$G_1(s) = \frac{6}{s(s+2)(s+2)} \quad \rightarrow \quad K_1^* = \frac{2 \cdot 2 \cdot (2+2)}{6} = \frac{8}{3} = 2.666, \quad \omega_1^* = \sqrt{4} = 2.$$

Essendo  $K_1^* > \beta$ , il diagramma di Nyquist della funzione  $G(s)$  non interseca il cerchio critico e quindi, in base al criterio del cerchio, si può affermare che il sistema retroazionato è globalmente asintoticamente stabile nell'intorno del punto  $(x_1, y_1) = (10, 6)$ .

- c.3) Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva  $F(X)$  per  $X > 0$ . Utilizzare le variabili  $m_1, m_2, \dots$  per rappresentare gli eventuali valori minimi e massimi "non noti" della funzione  $F(X)$ .

*Soluzione.* L'espressione esatta della funzione descrittiva  $F(X)$  della non linearità  $y(x)$  nell'intorno del punto  $(0, 0)$  per  $X \leq 4$  è la seguente:

$$F(X) = \frac{12}{\pi X}$$

L'andamento qualitativo della funzione descrittiva  $F(X)$  è mostrato in Fig. 7. Indichiamo con  $m_1 = 0.38$  il minimo assoluto della funzione  $F(X)$  nel punto  $X = 5.75$ : Indichiamo inoltre con  $m_2$  il valore finale a cui tende la funzione  $F(X)$  per  $X \rightarrow \infty$ :

$$m_2 = F(X)|_{X \rightarrow \infty} = 1.$$

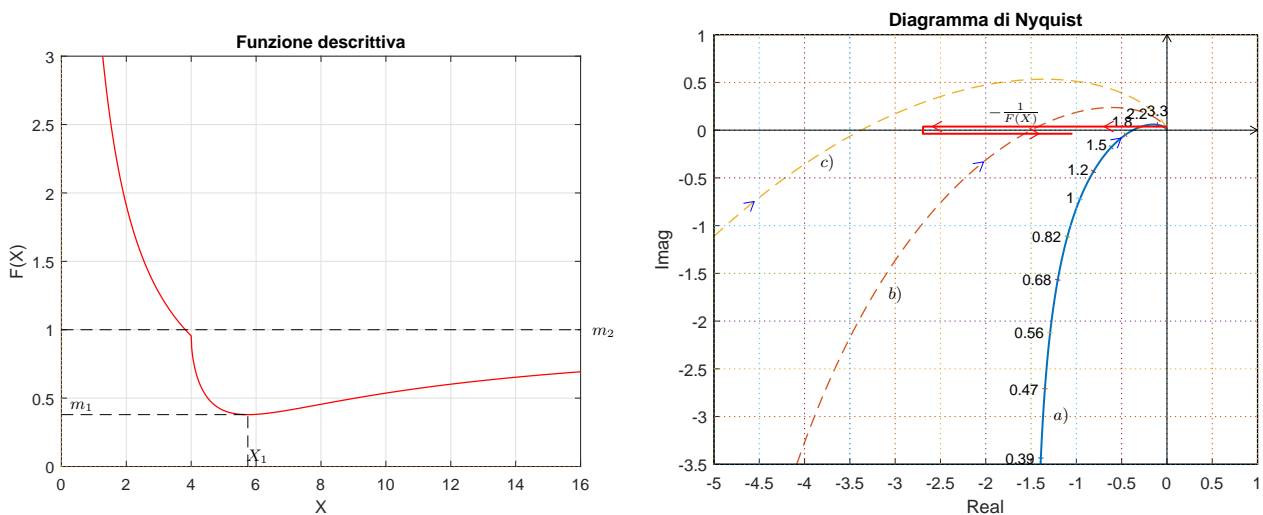


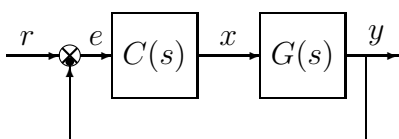
Figura 7: Funzione descrittiva  $F(X)$  e discussione grafica.

c.4) Discutere “qualitativamente”, in funzione dei parametri  $m_1, m_2 \dots$ , l’esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno  $K > 0$ .

*Soluzione.* Per  $K = 1$ , il margine di ampiezza  $K_1^*$  del sistema  $G_1(s)$  è  $K_1^* = 2.666$ . Per  $K \neq 1$ , il margine di ampiezza  $K^*$  del sistema  $K G_1(s)$  è  $K^* = \frac{2.666}{K}$ . Al variare di  $K^*$  si possono avere le seguenti condizioni dinamiche per sistema retroazionato:

- a) Per  $K^* > m_2$  il diagramma di Nyquist della funzione  $G_1(s)$  interseca la funzione  $-1/F(X)$  in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile.
- b) Per  $m_1 < K^* < m_2$ , il diagramma di Nyquist della funzione  $G_1(s)$  interseca la funzione  $-1/F(X)$  in due punti a cui corrispondono un ciclo limite stabile (il primo) e un ciclo limite instabile (il secondo).
- c) Per  $K^* < m_1$ , la funzione  $-1/F(X)$  è tutta interna al diagramma polare completo della funzione  $G(s)$  per cui non vi sono cicli limite e il sistema retroazionato è instabile.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato e i diagrammi di Bode della funzione  $G(s)$  riportati a fianco.

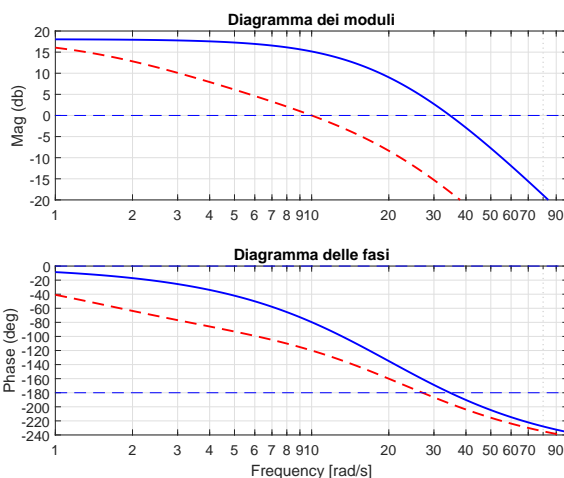


d.1) Posto  $C(s) = 1$ , determinare la larghezza di banda  $\omega_f$  del sistema  $G(s)$  e il corrispondente tempo di salita  $T_r$ :

$$\omega_f \simeq 10 \quad T_r \simeq \frac{1}{10} \simeq 0.1$$

d.2) Posto  $C(s) = 1$ , determinare la larghezza di banda  $\omega_{f0}$  del sistema retroazionato  $G_0(s)$  e il corrispondente tempo di salita  $T_{r0}$ :

$$\omega_{f0} \simeq 33 \quad T_{r0} = \frac{1}{33} \simeq 0.03$$



d.3) Progettare una rete correttiva  $C(s)$  in modo da garantire al sistema compensato un margine di fase  $M_\varphi = 60^\circ$  in corrispondenza della pulsazione  $\omega_A = 10$ . (Nota: leggere il modulo e la fase del punto A sui diagrammi di Bode.)

*Sol.* d.3) Il modulo e fase del punto B sono univocamente determinati dalla specifica sul margine di fase  $M_\varphi = 50^\circ$ :

$$M_B = 1, \quad \varphi_B = 240^\circ = -120^\circ$$

Il modulo e la fase del punto A alla pulsazione  $\omega_A = 10$  si leggono direttamente dai diagrammi di Bode della funzione  $G(s)$ :

$$M_A = 5.72, \quad \varphi_A = -79.7^\circ \quad \longrightarrow \quad M = \frac{M_B}{M_A} = 0.1747, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -40.3^\circ$$

La rete correttiva  $C(s)$  si ottiene utilizzando le formule di inversione:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi} = 0.0909, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi} = 0.7671 \quad \longrightarrow \quad C(s) = \frac{1 + 0.0909 s}{1 + 0.7671 s}$$

e) Utilizzando il metodo della corrispondenza poli-zeri, discretizzare il seguente sistema tempo-continuo:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s + 3)}{(s + 2)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento  $T = 0.1$ .

*Soluzione.* Utilizzando il metodo della corrispondenza poli-zeri si ottiene:

$$D(z) = K \frac{(1 - e^{-3T} z^{-1})}{(1 - e^{-2T} z^{-1})} = K \frac{(1 - 0.7408z^{-1})}{(1 - 0.8187z^{-1})}$$

Il valore di  $K$  si determina imponendo l'uguaglianza dei guadagni alle basse frequenze:

$$\lim_{s \rightarrow 0} D(s) = \lim_{z \rightarrow 1} D(z) \quad \rightarrow \quad 1.5 = K \cdot 1.43 \quad \rightarrow \quad K = 1.049$$

Sostituendo in  $D(z)$  si ottiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1.05 - 0.777 z^{-1}}{1 - 0.819 z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m_k = 0.819 m_{k-1} + 1.05 e_k - 0.777 e_{k-1}$$

f) Partendo da condizioni iniziali nulle, calcolare la risposta  $y(n)$  della seguente equazione alle differenze:

$$y(n+1) = -0.6 y(n) + 4x(n)$$

quando in ingresso è presente il gradino unitario  $x(n) = 1$ .

*Soluzione.* L'equazione alle differenze genera la seguente funzione discreta  $G(z)$ :

$$y(n+1) + 0.6 y(n) = 4x(n) \quad \leftrightarrow \quad G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{4}{z + 0.6}.$$

La  $\mathcal{Z}$ -trasformata del segnale di ingresso  $x(n) = 1$  è:

$$X(z) = \frac{z}{z - 1}.$$

La  $\mathcal{Z}$ -trasformata  $Y(z)$  del segnale di uscita è quindi la seguente:

$$Y(z) = G(z)X(z) = \frac{4z}{(z + 0.6)(z - 1)}.$$

Mediante il metodo della scomposizione in fratti semplici si ricava:

$$Y(z) = z \left[ \frac{4}{(z - 1)(z + 0.6)} \right] = z \left[ \frac{2.5}{(z - 1)} - \frac{2.5}{(z + 0.6)} \right]$$

e quindi:

$$Y(z) = \frac{2.5z}{(z - 1)} - \frac{2.5z}{(z + 0.6)} \quad \rightarrow \quad y(n) = 2.5 [1 - (-0.6)^n].$$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono corrette.

1. Scrivere l'equazione alle differenze corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 5z^{-1} + 3z^{-2}}{2 + 4z^{-1} + 6z^{-2} + z^{-3}} \quad \rightarrow \quad 2y_k + 4y_{k-1} + 6y_{k-2} + y_{k-3} = x_k + 5x_{k-1} + 3x_{k-2}$$

2. Calcolare le successioni discrete  $x(k)$  corrispondenti alle seguenti funzioni complesse  $X(z)$ :

$$X(z) = \frac{2z}{(z - e^{-3T})} \quad \rightarrow \quad x(k) = 2e^{-3kT} \qquad X(z) = \frac{5Tz}{(z - 1)^2} \quad \rightarrow \quad x(k) = 5kT$$

3. A fianco è riportato il luogo delle radici del sistema  $G(s) = \frac{-10}{(s+5.5)(s^2+4.75)}$  al variare del parametro  $K > 0$ . Calcolare:

4.1) La posizione  $\sigma_0$  dei due poli dominanti nella condizione di minimo tempo di assestamento:

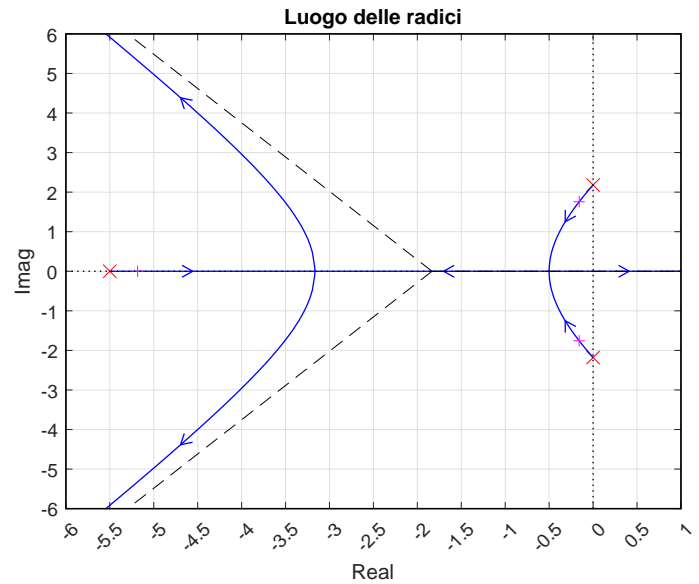
$$\sigma_0 = -0.5$$

4.2) Il valore  $K_0$  corrispondente alla condizione di minimo tempo di assestamento:

$$K_0 = -\frac{1}{G(s)} \Big|_{s=-0.5} = \frac{(-0.5+5.5) \cdot (0.5^2+4.75)}{10} = 2.5$$

4.3) Per quali valori di  $K$  il sistema retroazionato è stabile:

$$0 < K < K^* = -\frac{1}{G(s)} \Big|_{s=0} = \frac{5.5 \cdot 4.75}{10} = 2.61$$



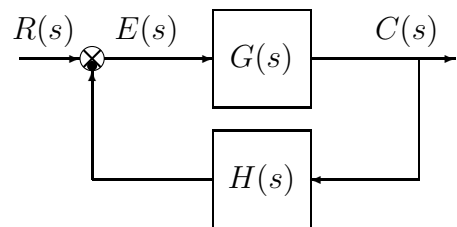
4. Il valore a regime  $x(\infty)$  della sequenza  $x(k)$  corrispondente alla funzione  $X(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)(z-0.5)}$  è:

- $x(\infty) = 0$                      
  $x(\infty) = 1$                      
  $x(\infty) = 2$                      
  $x(\infty) = 4$

5. Per poter applicare il criterio del cerchio, la caratteristica non lineare  $y(x)$  deve:

- passare per l'origine                     
 essere ad un sol valore  
 essere contenuta nel I e III quadrante                     
 essere simmetrica rispetto all'origine

6. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere il legame che lega la variazione relativa del sistema  $H(s)$  alla variazione relativa del sistema retroazionato  $G_0(s)$  quando varia un parametro  $\beta$  interno alla funzione di trasferimento  $H(s)$ :

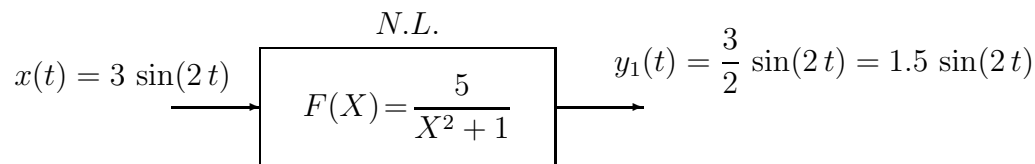


$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{-G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \frac{\Delta H(s)}{H(s)}$$

7. Indicare, tra i seguenti sistemi discreti  $G(z)$ , quello che ha la risposta impulsiva che tende a zero "più rapidamente":

$G(z) = \frac{1}{z(z+0.5)}$      
  $G(z) = \frac{1}{z(3z-1)}$      
  $G(z) = \frac{1}{z(3z+2)}$      
  $G(z) = \frac{1}{z(z-0.3)}$

8. Sia  $x(t) = 3 \sin(2t)$  un segnale periodico posto in ingresso ad un elemento non lineare N.L. caratterizzato da una funzione descrittiva  $F(X) = \frac{5}{X^2+1}$ . Indicare qual è l'andamento temporale  $y_1(t)$  della fondamentale del segnale periodico che si ha all'uscita del blocco non lineare:



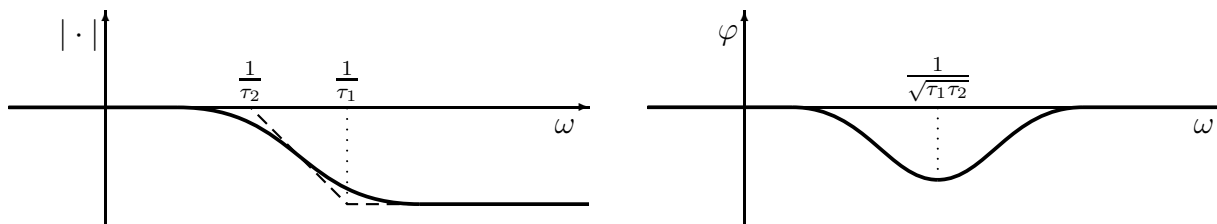
9. Scrivere la funzione di trasferimento  $H_0(s)$  del ricostruttore di ordine 0:

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

10. Scrivere il margine di ampiezza  $K^*$  e la pulsazione  $\omega^*$  di attraversamento del semiasse reale negativo del seguente sistema a ritardo finito:

$$G(s) = \frac{\alpha e^{-t_0 s}}{s} \quad \rightarrow \quad K^* = \frac{\pi}{2 \alpha t_0} \quad \omega^* = \frac{\pi}{2 t_0}$$

11. Tracciare i diagrammi di bode (moduli e fasi) di una rete ritardatrice  $C(s) = \frac{(1+\tau_1 s)}{(1+\tau_2 s)}$ , ( $\tau_1 < \tau_2$ ):



12. La trasformazione bilineare è definita come segue:

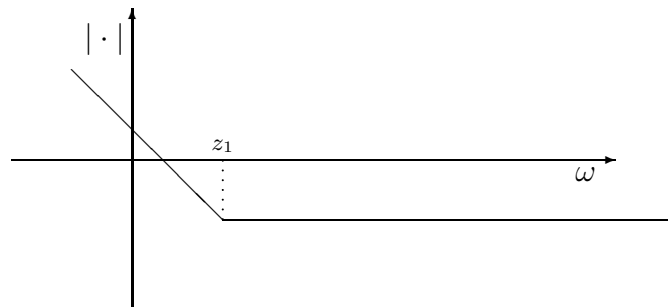
$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$      
  $s = \frac{2}{T} \frac{z+1}{z-1}$      
  $s = \frac{2}{T} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$      
  $s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$

13. Come si determina la funzione di risposta armonica  $F(\omega)$  di un sistema discreto  $G(z)$ ?

$F(\omega) = G(e^{j\omega})$      
  $F(\omega) = G(e^{j\omega T})$      
  $F(\omega) = G(j\omega)$      
  $F(\omega) = G(j\omega T)$

14. Scrivere la funzione di trasferimento  $G(s)$  di un regolatore standard PI e a fianco disegnare qualitativamente il corrispondente diagramma di Bode dei moduli:

$$G(s) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$



15. Sia  $X(z) = \mathcal{Z}[x(k)]$ . Enunciare il teorema della traslazione "in anticipo" nel tempo:

$$\mathcal{Z}[x(t + nT)] = z^n [X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}]$$