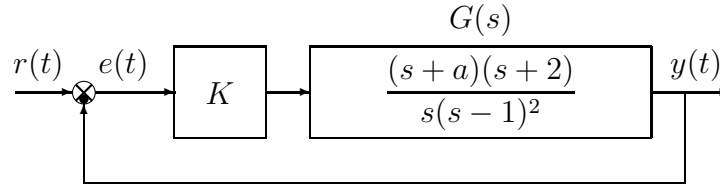


Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



a.1) Posto $a = 1$, tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione “solo in modo qualitativo”. Nota: non è richiesto il calcolo delle intersezioni del luogo delle radici con l’asse immaginario.

Sol. L’equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1 G_1(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + K \frac{(s+1)(s+2)}{s(s-1)^2} = 0$$

dove $K_1 = K$. L’andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ per $K > 0$ è mostrato in Fig. 1.

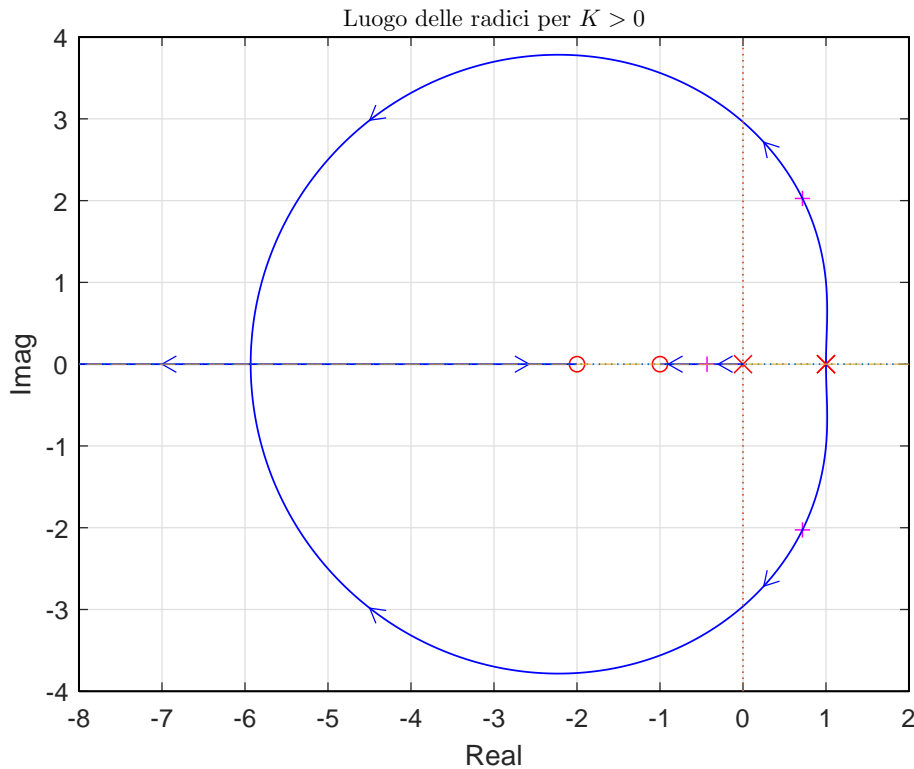


Figura 1: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ per $K > 0$

Il luogo delle radici ha un solo asintoto orizzontale che coincide con il semiasse reale negativo.

a.2) Posto $K = 6$, tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $a > 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti. Determinare inoltre per quale valore del parametro a il sistema retroazionato presenta il minimo tempo di assestamento. Determinare la posizione degli eventuali punti di diramazione “solo in modo qualitativo”.

Sol. Posto $K = 6$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato può essere riscritta nel seguente modo $1 + a G_1(s) = 0$:

$$s(s-1)^2 + 6(s+a)(s+2) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + a \frac{6(s+2)}{s(s^2+4s+13)} = 0$$

Mettendo in evidenza i poli della funzione $G_1(s)$ si ottiene:

$$1 + a \frac{6(s+2)}{s[(s+2)^2 + 3^2]} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $a > 0$ è mostrato in Fig. 2. Nel contorno delle

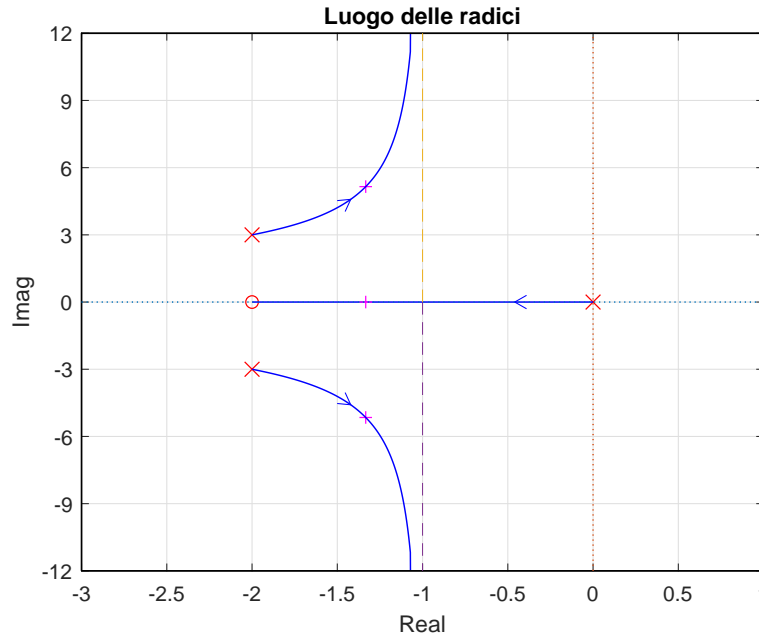


Figura 2: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

radici sono presenti due asintoti. Il centro degli asintoti é:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-4 + 2) = -1$$

Il sistema retroazionato presenta il minimo tempo di assestamento T_a quando i tre poli del sistema retroazionato sono allineati. In questo caso la condizione di allineamento si determina utilizzando il teorema del baricentro:

$$3\sigma_0 = -4 \quad \rightarrow \quad \sigma_0 = -\frac{4}{3} = -1.333.$$

Il corrispondente valore \bar{a} si determina nel seguente modo:

$$\bar{a} = - \frac{1}{G_1(s)} \Big|_{s=\sigma_0} = - \frac{s[(s+2)^2 + 3^2]}{6(s+2)} = 3.1481$$

- a.3) Sia data la seguente funzione di trasferimento $G_3(s)$ che descrive il legame tra la tensione $V(s)$ e la velocità angolare $\omega(s)$ di un motore elettrico in corrente continua:

$$G_3(s) = \frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{2}{(1+Ls)(2+s)+4}$$

Mostrare graficamente come si muovono sul piano complesso i poli della funzione di trasferimento $G_3(s)$ al variare del parametro $L > 0$. Determinare esattamente la posizione dei punti di diramazione.

Soluzione. I poli della funzione di trasferimento $G_3(s)$ coincidono con le radici del polinomio a denominatore:

$$(1+Ls)(s+2)+4=0$$

che, in modo equivalente, può essere riscritta nel seguente modo:

$$s + 6 + L s(s + 2) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + L \frac{s(s + 2)}{s + 6} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + L G_4(s) = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $L > 0$ è mostrato in Fig. 3. In questo caso il

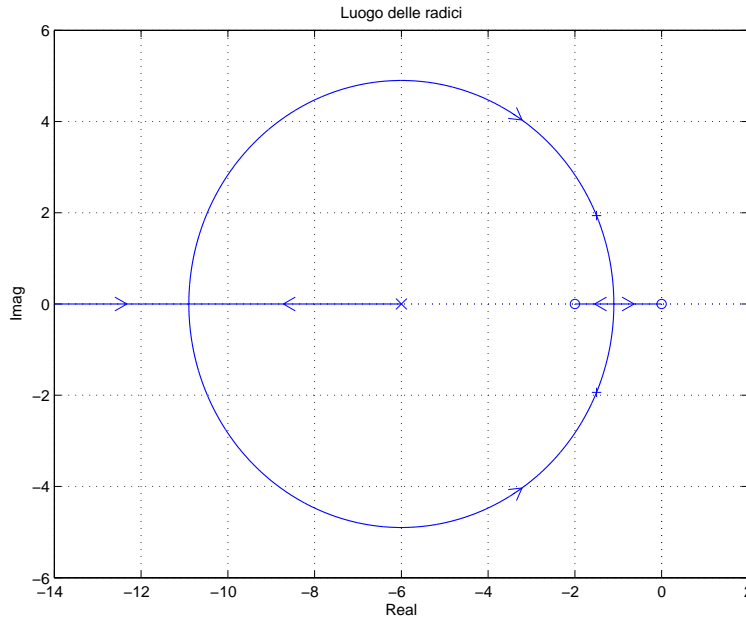


Figura 3: Contorno delle radici del sistema $G_4(s)$ al variare del parametro $L > 0$.

contorno delle radici si muove lungo una circonferenza centrata in $z = -6$. Il raggio R della circonferenza è il seguente:

$$R = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{24} = 4.899$$

I punti di diramazione σ_1 e σ_2 del contorno delle radici sono:

$$\sigma_1 = -6 - \sqrt{24} = -10.899, \quad \sigma_2 = -6 + \sqrt{24} = -1.101.$$

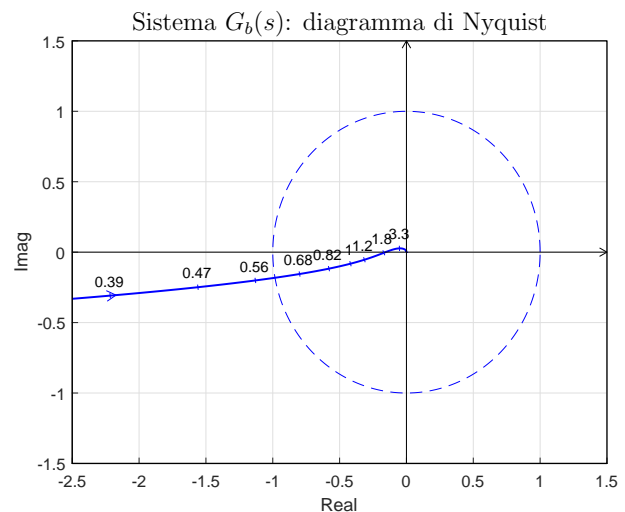
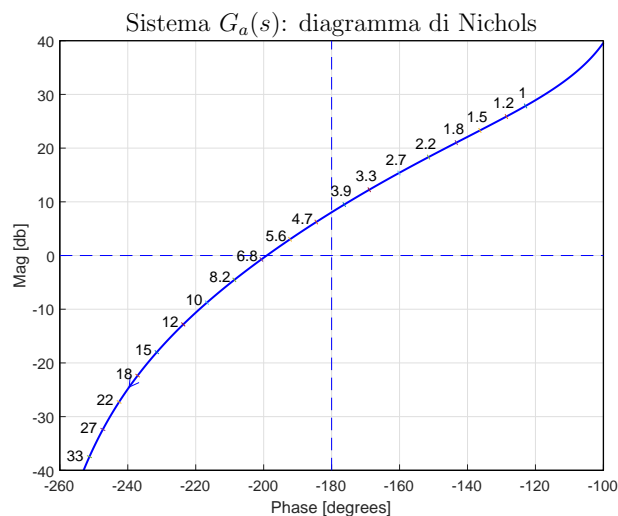
È possibile giungere allo stesso risultato nel seguente modo:

$$\frac{dG_4(s)}{ds} = 0 \quad \rightarrow \quad (2s + 2)(s + 6) - (s^2 + 2s) = s^2 + 12s + 12 = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{1,2} = -6 \pm \sqrt{24}.$$

La condizione di minimo tempo di assestamento di ha in corrispondenza del punto di diramazione $\sigma_1 = -10.899$ e quindi per il seguente valore del parametro L^* :

$$L^* = - \left. \frac{1}{G_4(s)} \right|_{s=\sigma_2} = - \left. \frac{s + 6}{s(s + 2)} \right|_{s=-10.899} = 0.0505.$$

b) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi $G_a(s)$ e $G_b(s)$:



b.1) Per il sistema $G_a(s)$, progettare una rete ritardatrice in grado di garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_a = 5$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.

Soluzione. La posizione del punto B è completamente determinata dalla specifica di progetto $B = M_B e^{j\varphi_B}$: $M_B = -13.98$ db = 0.2 e $\varphi_B = -180^\circ$. La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 4. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 3.3$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 12.25 \text{ db} = 4.096, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -168.9^\circ.$$

Sostituendo i valori di M , φ e ω all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 1.47$ e $\tau_2 = 30.74$ della rete correttiva $C_1(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.04883, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -11.08^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 1.47s)}{(1 + 30.74s)}.$$

Sintesi della rete correttiva $C_1(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A :

$\omega_A =$	1	1.2	1.5	1.8	2.2	2.7	3.3	3.9
$M_A =$	24.69	19.68	14.61	11.25	8.25	5.865	4.096	2.982
$\varphi_A =$	237.1	231.4	223.7	216.7	208.5	199.8	191.1	183.7
$M =$	0.0080	0.0101	0.0136	0.0177	0.0242	0.0341	0.0488	0.0670
$\varphi =$	-57.09	-51.44	-43.67	-36.7	-28.54	-19.83	-11.08	-3.721
$\tau_1 =$	0.6374	0.6534	0.6852	0.7287	0.8128	0.9898	1.47	3.678
$\tau_2 =$	146.4	104.2	69.85	51.53	38.41	30.99	30.74	54.97

I diagrammi di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

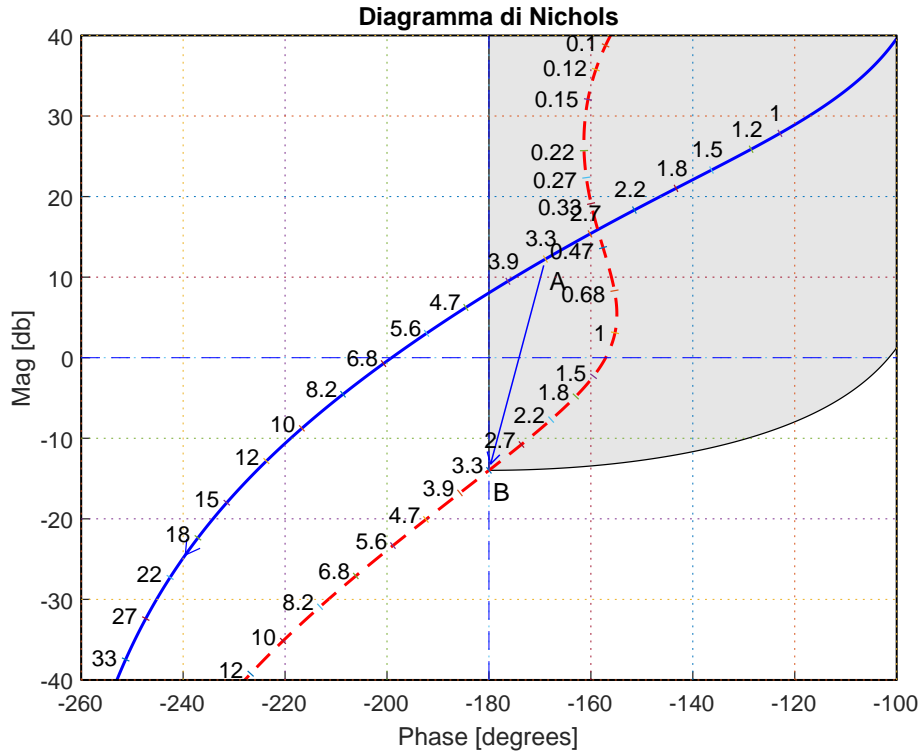


Figura 4: Diagrammi di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$.

b.2) Per il sistema $G_b(s)$, progettare una rete correttiva in modo da garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = 60^\circ$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.

Soluzione. La posizione del punto B è completamente determinata dalla specifica di progetto $B = M_B e^{j\varphi_B}$: $M_B = 1$ e $\varphi_B = 240^\circ$. La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 5. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 1.2$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.3192, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 189.7^\circ.$$

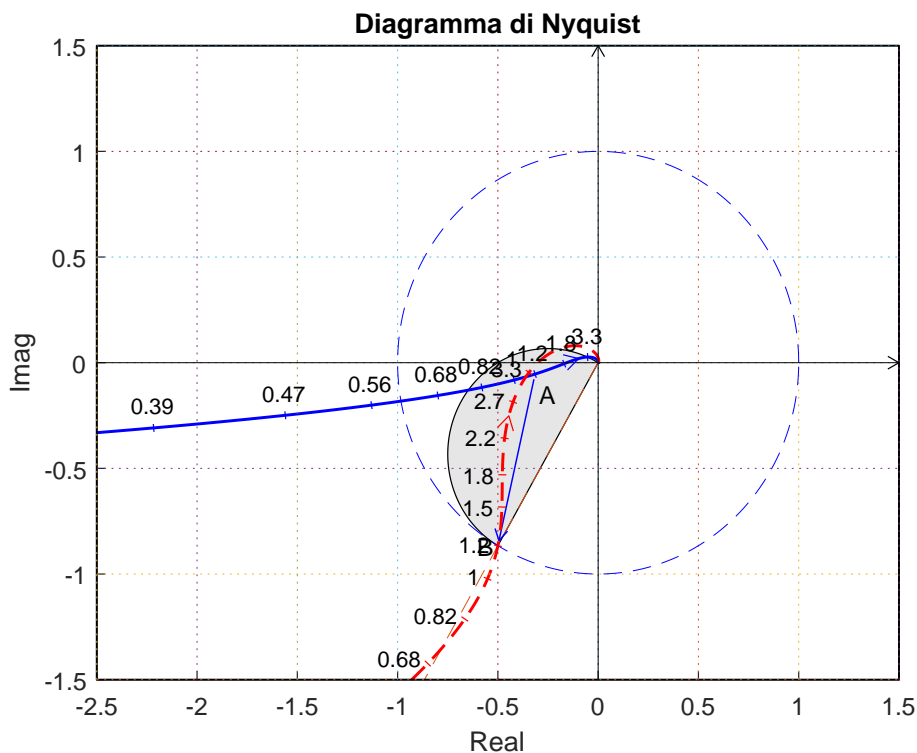
Sostituendo i valori di M , φ e ω all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 2.702$ e $\tau_2 = 0.3463$ della rete correttiva $C_1(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 3.133, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 50.29^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 2.702 s)}{(1 + 0.3463 s)}$$

Sintesi della rete correttiva $C_1(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A :

$\omega_A =$	0.82	1	1.2	1.8
$M_A =$	0.5914	0.4267	0.3192	0.1694
$\varphi_A =$	191.4	191.1	189.7	181.5
$M =$	1.691	2.344	3.133	5.903
$\varphi =$	48.59	48.93	50.29	58.45
$\tau_1 =$	1.674	2.237	2.702	3.507
$\tau_2 =$	0.1139	0.3055	0.3463	0.2307

I diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 5.



c.4) Discutere “qualitativamente” (in funzione anche dei parametri m_1, m_2, \dots) l’esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno $K > 0$. Calcolare la pulsazione ω^* degli eventuali cicli limite presenti nel sistema retroazionato.

Soluzione:

c.1) Il sistema $G_1(s)$ è di tipo 0. Posto $K = 1$, il valore dei guadagni statici è: $K_1 = 1$, $K_2 = 1$ e $K_3 = 1$. La retta di carico della parte lineare del sistema è la seguente:

$$x = K_1(r - K_2 K_3 y) \quad \rightarrow \quad x = (r - y)$$

Imponendo il passaggio per il punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$ si ottiene il valore $r_1 = 0$. Imponendo il passaggio per il punto $(x_1, y_1) = (-5, -5)$ si ottiene il valore .

$$-5 = (r + 5) \quad \rightarrow \quad r_2 = -10$$

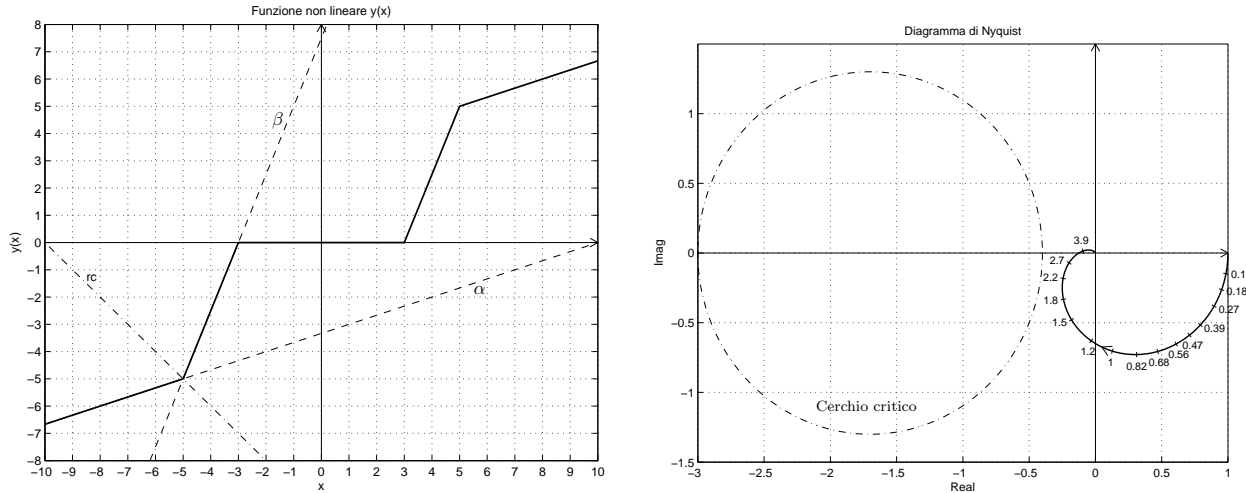


Figura 6: Settore che racchiude la non linearità e cerchio critico.

c.2) Le pendenze α e β di 2 rette che centrate in $(x_1, y_1) = (-5, -5)$ racchiudono a settore tutta la non linearità sono le seguenti:

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{5}{2}.$$

Il cerchio critico interseca il semiasse reale negativo nei punti:

$$-\frac{1}{\alpha} = -3, \quad -\frac{1}{\beta} = -\frac{2}{5}.$$

Il margine di ampiezza \bar{K}^* e la pulsazione ω^* della funzione $G_1(s)$ si determinano applicando il criterio di Routh alla seguente equazione caratteristica:

$$1 + \frac{8K}{(s+2)^3} = 0 \quad \leftrightarrow \quad s^3 + 6s^2 + 12s + 8 + 8K = 0.$$

La tabella di Routh assume la seguente forma:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 12 \\ 2 & 6 & 8 + 8K \\ 1 & 64 - 8K & \\ 0 & 8 + 8K & \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow K < 8 \\ \rightarrow K > -1 \end{array}$$

Si ottiene quindi che

$$\bar{K}^* = 8, \quad \omega^* = \sqrt{12} = 3.464.$$

Il valore di \bar{K}^* è maggiore sia di α che di β per cui in base al criterio del cerchio si può affermare che il punto $(x_1, y_1) = (-5, -5)$ è globalmente asintoticamente stabile. Il cerchio critico e il diagramma di Nyquist della funzione $G_1(s)$ sono mostrati in Fig. 7.

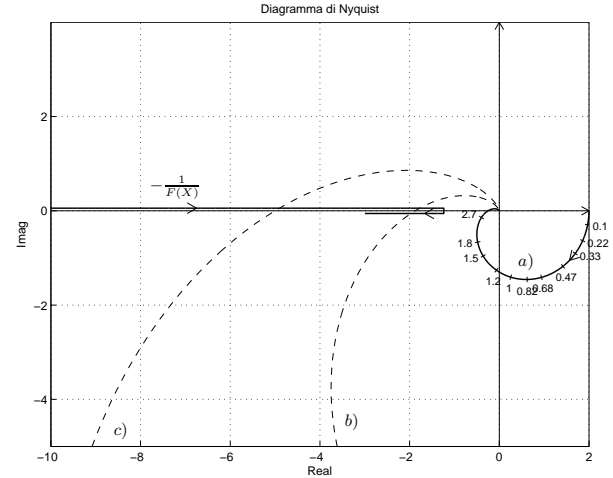
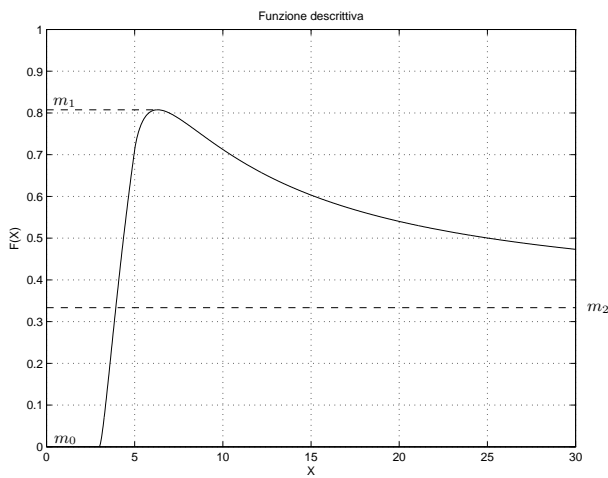
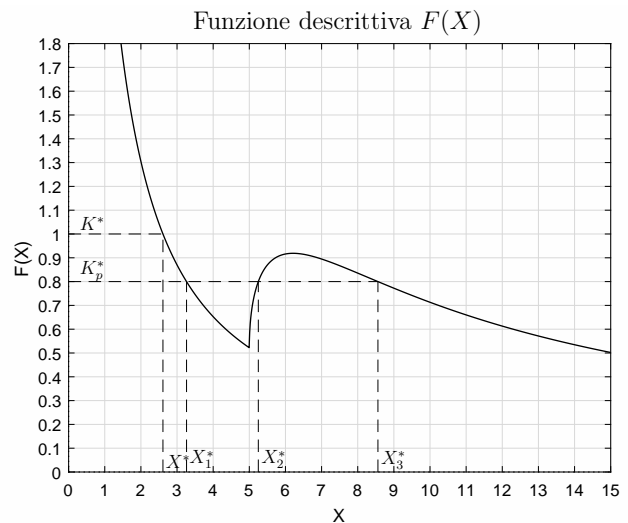
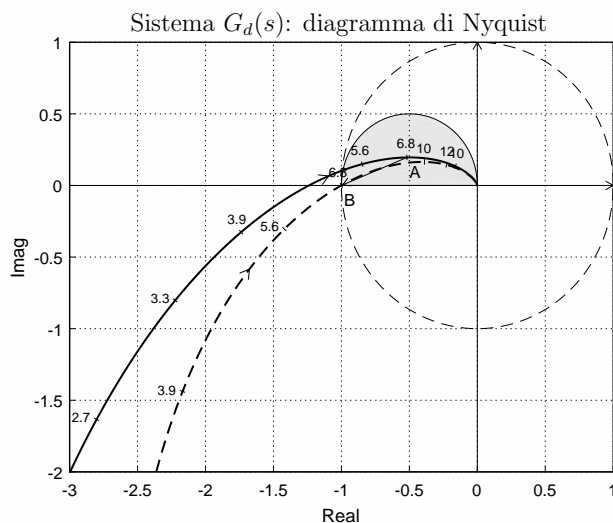


Figura 7: Funzione descrittiva $F(X)$ e discussione grafica.

- c.3) L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ è mostrato in Fig. 7. Il valore massimo m_1 dalla funzione descrittiva $F(X)$ è maggiore del valore finale $m_2 = 0.333$.
- c.4) Per $K = 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $G(s)$ è $K^* = 4$. Per $K \neq 0$ il margine di ampiezza K^* del sistema $K G(s)$ è $\bar{K}^* = \frac{K^*}{K}$. Al variare di \bar{K}^* si possono avere le seguenti condizioni di funzionamento:
- Per $\bar{K}^* > m_1$ la funzione $-1/F(X)$ è tutta esterna al diagramma completo della funzione $G(s)$ per cui non vi sono cicli limite e l'origine è un punto di lavoro globalmente asintoticamente stabile.
 - Per $m_1 < \bar{K}^* < m_2$ il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in 2 punti a cui corrispondono 2 cicli limite, uno stabile (quello uscente) e uno instabile (quello entrante).
 - Per $\bar{K}^* < m_2$ il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite instabile.

Una descrizione grafica delle varie condizioni operative è mostrata in Fig. 7.

- d) Sia dato il diagramma di Nyquist di un sistema $G_d(s)$ posto in retroazione negativa su di una non linearità $y = y(x)$ di cui viene fornita la funzione descrittiva $F(X)$.



- d.1) Nei limiti della precisione dei grafici forniti, determinare l'ampiezza X^* , la pulsazione ω^* e la stabilità degli eventuali cicli limite presenti nel sistema retroazionato.

Sol. Dal diagramma di Nyquist della funzione $G_d(s)$ si può leggere chiaramente il margine di ampiezza K_1^* del sistema e la pulsazione ω_1^* di attraversamento del semiasse reale negativo:

$$K_1^* \simeq -\frac{1}{-1.25} = 0.8, \quad \omega_1^* = 4.7.$$

Gli eventuali cicli limite si determinano imponendo $F(X) = K_1^*$. Utilizzando il grafico della funzione $F(X)$ si individuano tre cicli limite:

$$X_1^* \simeq 3.263, \quad X_2^* \simeq 5.249, \quad X_3^* \simeq 8.559$$

il primo e il terzo stabili e il secondo instabile. La pulsazione ω^* di tutti e tre i cicli limite è $\omega^* = \omega_1^* = 4.7$.

- d.2) Progettare i parametri τ_1 e τ_2 di una rete correttiva $C_d(s) = \frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$ da mettere in cascata al sistema $G_d(s)$ in modo che il sistema retroazionato abbia un ciclo limite stabile di ampiezza $X^* = 2.61$ in corrispondenza della pulsazione $\omega^* = 6.8$.

Sol. Dal grafico della funzione $F(X)$ si ricava che nel sistema retroazionato sarà presente un ciclo limite stabile con ampiezza $X^* = 2.61$ solo se il margine di ampiezza del sistema $C_d(s)G_d(s)$ vale $K^* = F(X)|_{X=2.61} = 1$. Tale valore identifica completamente il modulo e la fase del punto $B = -\frac{1}{K^*} = -1$ da utilizzare nella sintesi della rete correttiva:

$$M_B = 1, \quad \varphi_B = 180^\circ$$

In punto A è completamente determinato dalla specifica sulla pulsazione $\omega^* = 6.8$. Il modulo e la fase del punto A si ricavano in modo approssimato dal grafico:

$$M_A = 0.5536, \quad \varphi_A = 159.31^\circ.$$

I parametri da utilizzare nelle formule di inversione sono:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 1.806, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 20.69^\circ$$

La rete ritardatrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi} = 0.3623, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi} = 0.1589 \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{1 + 0.3623 s}{1 + 0.1589 s}$$

- e) Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare, discretizzare la seguente rete correttiva:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = 3 \frac{s+1}{s+5}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.05$.

Soluzione. Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare si ottiene:

$$D(z) = D(s)|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = 3 \frac{2(1-z^{-1}) + T(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1}) + 5T(1+z^{-1})} = \frac{3[T+2+(T-2)z^{-1}]}{5T+2+(5T-2)z^{-1}}$$

Posto $T = 0.04$ si ottiene:

$$D(z) = \frac{6.15 - 5.86 z^{-1}}{2.25 - 1.75 z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione:

$$M(z)(2.25 - 1.75 z^{-1}) = E(z)(6.15 - 5.86 z^{-1})$$

ottenendo:

$$m(k) = \frac{1}{2.25} (1.75 m(k-1) + 6.15 e(k) - 5.86 e(k-1))$$

cioè :

$$m(k) = 0.78 m(k-1) + 2.73 e(k) - 2.60 e(k-1)$$

- f) Calcolare la risposta all'impulso unitario $x(n) = (1, 0, 0, \dots)$ del seguente sistema dinamico discreto, partendo da condizioni iniziali nulle:

$$y(n+2) - 0.36 y(n) = 6 x(n+1)$$

Soluzione. Applicando la Z-trasformata alla precedente equazione alle differenze si ottiene:

$$z^2 Y(z) - 0.36 Y(z) = 6 z X(z)$$

Esprimendo $Y(z)$ in funzione di $X(z)$ e tenendo presente che $X(z) = 1$ si ottiene:

$$Y(z) = \frac{6 z}{z^2 - 0.36} X(z) = \frac{6 z}{(z - 0.6)(z + 0.6)}$$

Scomponendo in fratti semplici si ottiene:

$$Y(z) = 6 z \left[\frac{1}{1.2(z - 0.6)} - \frac{1}{1.2(z + 0.6)} \right]$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(n) = 5 [(0.6)^n - (-0.6)^n]$$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono corrette.

1. Scrivere l'equazione alle differenze corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

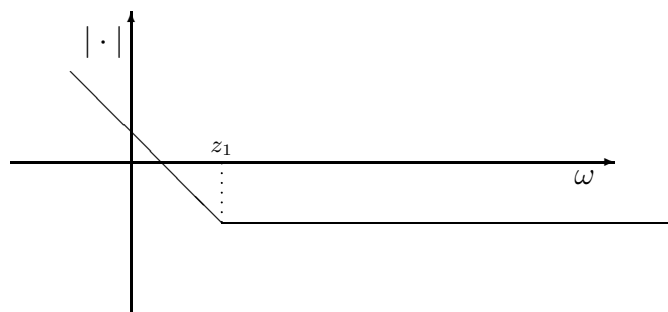
$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3z + 5}{4z^2 + 2z + 1 + 2z^{-2}} \quad \rightarrow \quad 4y_{k+2} + 2y_{k+1} + y_k + 2y_{k-2} = 3x_{k+1} + 2x_k$$

2. Calcolare le successioni discrete $x(k)$ corrispondenti alle seguenti funzioni complesse $X(z)$:

$$X(z) = \frac{2z}{(z - e^{-3T})} \quad \rightarrow \quad x(k) = 2e^{-3kT} \qquad X(z) = \frac{3Tz}{(z - 1)^2} \quad \rightarrow \quad x(k) = 3kT$$

3. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un regolatore standard PI e a fianco disegnare qualitativamente il corrispondente diagramma di Bode dei moduli:

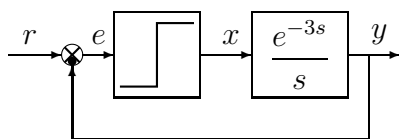
$$G(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_d s} \right)$$



4. Posto $T = 1$ e utilizzando la corrispondenza tra piano- s e piano- z , calcolare il tempo di assestamento T_a della risposta impulsiva $g(k)$ del sistema discreto $G(z) = \frac{z}{z-0.5}$:

$$T_a = \frac{3T}{|\ln(0.5)|} = 4.32 \text{ s.}$$

5. Sia dato il seguente sistema retroazionato. Per la presenza del relé ideale il sistema sicuramente oscilla. Fornire il valore della pulsazione ω^* di oscillazione:



$$\omega^* = \frac{\pi}{6} = 0.524.$$

6. Calcolare la soluzione $y(n)$ della seguente equazione alle differenze a partire dalla condizione iniziale $y(0) = 2$:

$$y(n + 1) - 0.3y(n) = 0 \quad \rightarrow \quad y(n) = 2(0.3)^n.$$

7. In un sistema discreto a segnali campionati, qual è il legame che lega la variabile discreta z e la variabile s di Laplace?

$$z = e^{sT}.$$

8. Sia $G(z)$ la \mathcal{Z} -trasformata della successione numerica $g(k)$. Scrivere gli enunciati dei teoremi del valore iniziale e del valore finale:

$$g(0) = g(k)|_{k=0} = \lim_{z \rightarrow \infty} G(z), \qquad g(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})G(z).$$

9. 1) Disegnare qualitativamente il luogo delle radici associato al seguente sistema:

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{(s+2)^2 + 2^2}$$

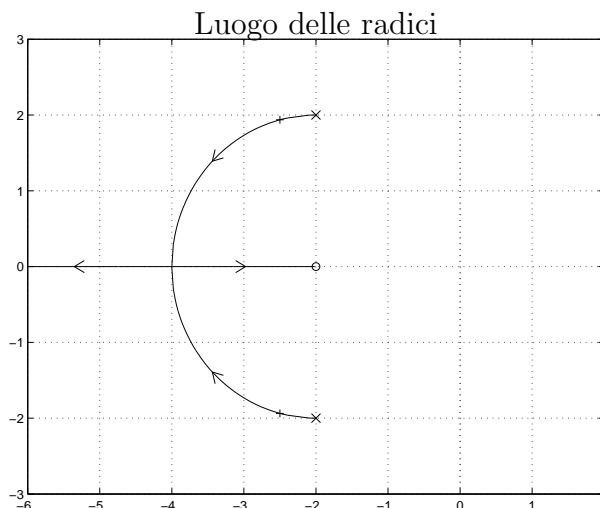
al variare del parametro $K > 0$.

- 2) Determinare esattamente la posizione del punto di diramazione σ_0 sull'asse reale:

$$\sigma_0 = -4.$$

- 3) Determinare il valore \bar{K} corrispondente alla condizione di minimo tempo di assestamento per il sistema retroazionato:

$$\bar{K} = - \left. \frac{1}{G(s)} \right|_{s=\sigma_0} = 4$$



10. Sia $Y(X) \sin(\omega t + \varphi(X))$ la fondamentale del segnale periodico $y(t)$ presente all'uscita della nonlinearity algebrica $y(t) = f[x(t)]$ in risposta all'ingresso $x(t) = X \sin(\omega t)$. La funzione descrittiva $F(X)$ è definita nel modo seguente:

$$F(X) = \frac{Y(X)}{X} e^{j\varphi(X)}.$$

11. Il metodo di Ziegler-Nichols per determinare i valori di primo tentativo dei parametri di un regolatore standard PID

- richiede la conoscenza esatta del modello del sistema da controllare
- richiede la conoscenza della risposta impulsiva del sistema da controllare
- richiede la conoscenza della risposta al gradino del sistema da controllare
- è applicabile in modo approssimato anche al controllo di sistemi non lineari

12. Scrivere la funzione di trasferimento $H_0(s)$ del ricostruttore di ordine 0:

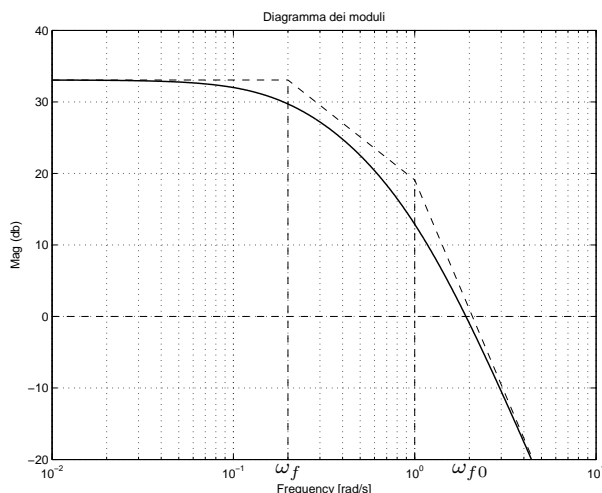
$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}.$$

13. Fornire una stima della larghezza di banda ω_f e del tempo di salita t_r del sistema $G_1(s)$ di cui a fianco è riportato il diagramma di Bode dei moduli:

$$\omega_f \simeq 0.2 \quad t_r \simeq \frac{1}{\omega_f} = 5 \text{ s}$$

Fornire inoltre una stima della larghezza di banda ω_{f0} e del tempo di salita t_{r0} del corrispondente sistema retroazionato:

$$\omega_{f0} \simeq 2 \quad t_{r0} \simeq \frac{1}{\omega_{f0}} = 0.5 \text{ s}$$



14. Calcolare la \mathcal{Z} -trasformata $X(z)$ delle seguenti due successioni numeriche $x(k)$:

$$x(k) = 3k \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{3z}{(z-1)^2},$$

$$x(k) = e^{2kT} \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{z}{z - e^{2T}}.$$