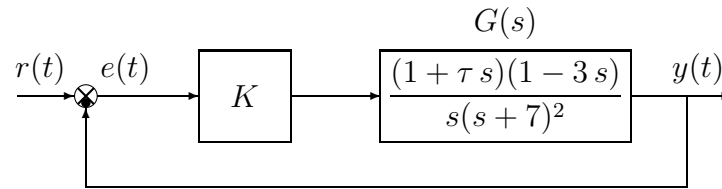


Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a.1) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



Posto $\tau = 0$ tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Attenzione: il segno di K è diverso dal segno di K_1 . Determinare esattamente la posizione degli asintoti. Determinare la posizione dei punti di diramazione “solo in modo qualitativo”.

Sol. Posto $\tau = 0$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato diventa:

$$1 + K \frac{(1 - 3s)}{s(s + 7)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + K_1 \frac{(s - 0.333)}{s(s + 7)^2} = 0$$

dove $K_1 = -3K$. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$, cioè $K_1 < 0$, è mostrato in Fig. 1. Sono presenti due asintoti che coincidono

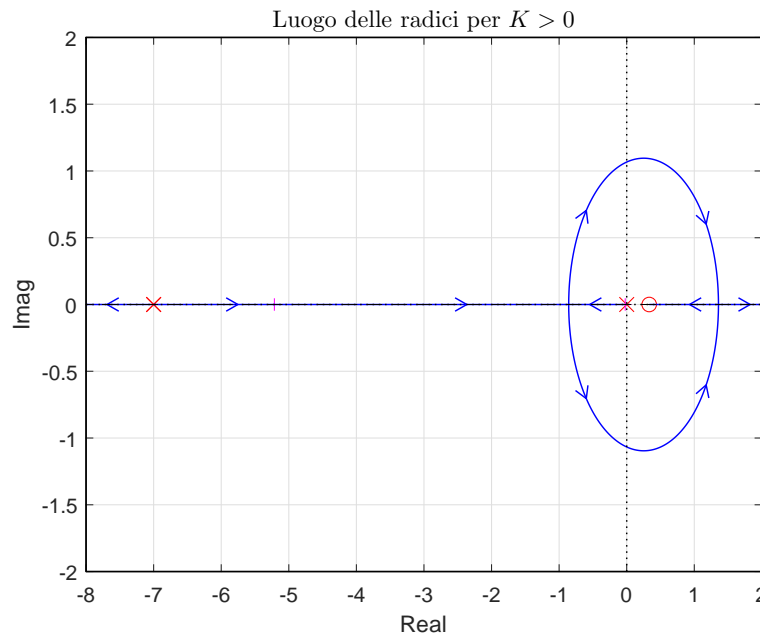


Figura 1: Luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$.

con i semiassi reali (positivo e negativo) quando $K > 0$. Il centro degli asintoti σ_a è il seguente:

$$\sigma_a = \frac{1}{2} \left(-14 - \frac{1}{3} \right) \quad \rightarrow \quad \sigma_a = -\frac{43}{6} = -7.16$$

a.2) Posto $K = 1.25$ nel sistema retroazionato sopra definito, tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\tau > 0$. Attenzione: il segno di τ è diverso dal segno di τ_1 . Nella graficazione del contorno si tenga conto che: i) per $\tau = 0$ i poli del contorno sono posizionati in $p_1 = -0.5$, $p_2 = -0.5$ e $p_3 = -5$; ii) il sistema retroazionato è stabile per $\tau < \tau^*$. Determinare la posizione dei punti di diramazione “solo in modo qualitativo”. Il calcolo di τ^* non è necessario.

Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente

$$1 + \frac{K(1 + \tau s)(1 - 3s)}{s(s + 7)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad s(s + 7)^2 + K(1 + \tau s)(1 - 3s) = 0$$

da cui si ricava l'equazione caratteristica $1 + \tau G_1(s) = 0$:

$$s(s+7)^2 + K(1-3s) + \tau K s(1-3s) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{\tau K s(1-3s)}{s(s+7)^2 + K(1-3s)} = 0$$

In base alle indicazioni fornite nel testo della domanda, l'equazione caratteristica può essere riscritta nel modo seguente: $1 + \tau_1 G_2(s) = 0$:

$$1 + \frac{-3\tau K s(s-0.3333)}{(s+0.5)^2(s+5)} = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + \frac{\tau_1 s(s-0.3333)}{(s+0.5)^2(s+5)} = 0$$

dove $\tau_1 = -3\tau K$. Il contorno delle radici al variare del parametro $\tau > 0$, cioè $\tau_1 < 0$, è mostrato in Fig. 2.

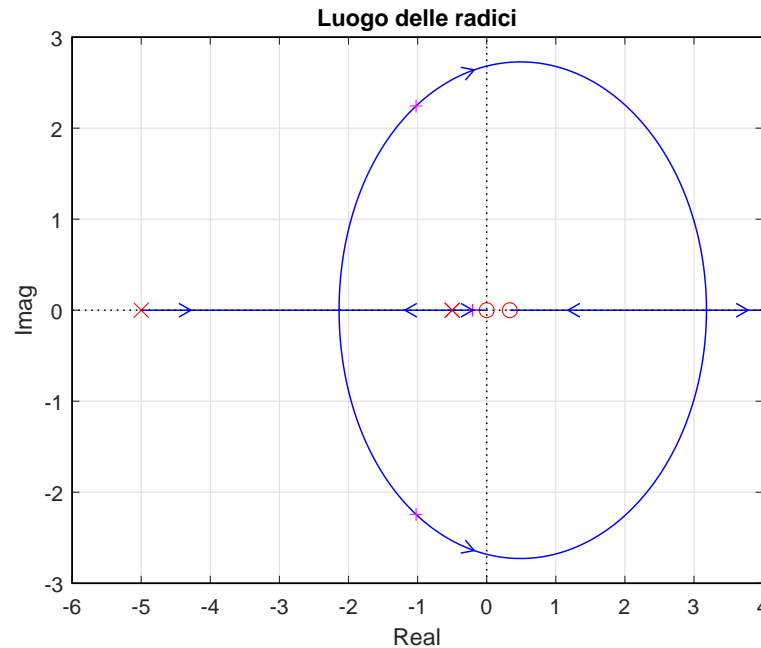


Figura 2: Contorno delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare del parametro $\tau > 0$.

a.3) Sia data la funzione $G(s)$ che descrive la dinamica del sistema mostrato in figura:

$$G(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{C s}{C L s^2 + R C s + 1}$$

Posto $C = 1$ e $R = 1$, calcolare il valore dell'induttanza L a cui corrisponde il minimo tempo di assestamento della risposta al gradino del sistema $G(s)$.

Sol. I poli della funzione $G(s)$ sono le soluzioni dell'equazione:

$$L s^2 + s + 1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + L \frac{s^2}{s+1} = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + L G_1(s) = 0$$

Il contorno delle radici della funzione $G_1(s)$ al variare del parametro $L > 0$ è mostrato in Fig. 3.

Nel contorno delle radici è presente un solo asintoto coincidente con il semiasse reale negativo, percorso dall'infinito a finito.

Il minimo tempo di assestamento della risposta al gradino del sistema $G(s)$ si ottiene quando i poli del sistema $G(s)$ sono alla massima distanza dall'asse immaginario. Questa condizione si ha quando i due poli del sistema si trovano nel punto di diramazione $\sigma_0 = -2$ del contorno delle radici mostrato in Fig. 3. Il corrispondente valore di L si calcola nel seguente modo:

$$L = - \left. \frac{1}{G_1(s)} \right|_{s=-2} = \frac{1}{4}$$

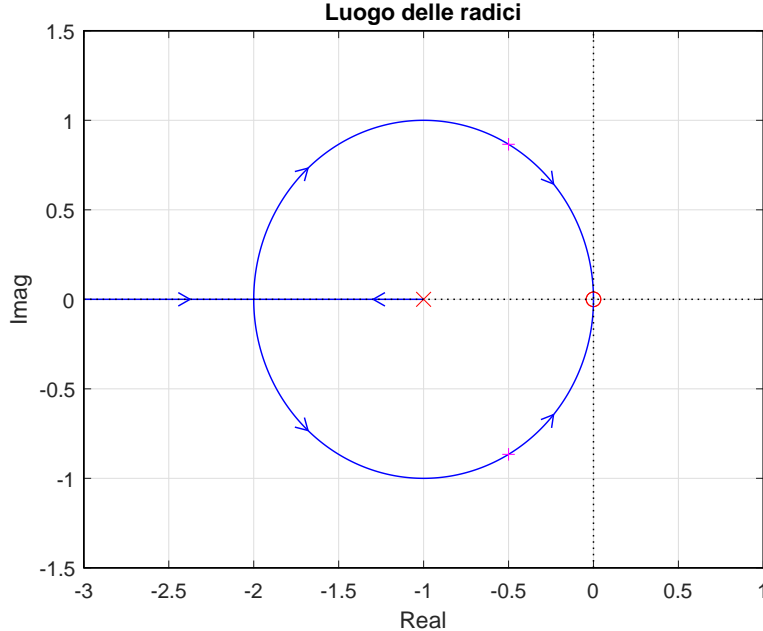
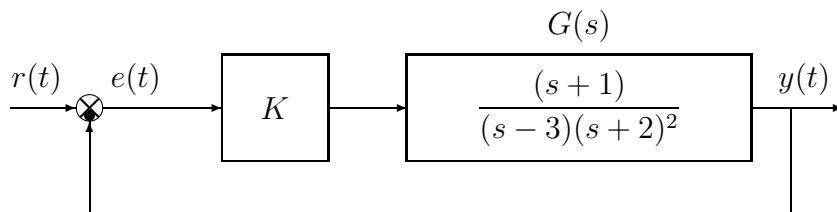


Figura 3: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare del parametro $m > 0$.

b) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



b.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Determinare inoltre la posizione degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K^* . Determinare per quale valore di K il sistema retroazionato presenta il minimo tempo di assestamento.

Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K \frac{(s+1)}{(s-3)(s+2)^2} = 0$$

L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$ è mostrato in Fig. 4. Il luogo delle radici ha due asintoti verticali. La posizione σ_a del centro degli asintoti è:

$$\sigma_a = \frac{1}{2} (-4 + 1 + 3) = 0.$$

Dal luogo delle radici risulta chiaro che il sistema retroazionato è stabile per:

$$K > K^* = - \frac{1}{G(s)} \Big|_{s=0} = 12$$

e che l'unica intersezione con l'asse immaginario si ha in corrispondenza della pulsazione: $\omega^* = 0$. Lo stesso risultato può essere ottenuto utilizzando il criterio di Routh:

$$1 + K \frac{(s+1)}{(s-3)(s+2)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + s^2 + (K-8)s + (K-12) = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & K-8 \\ 2 & 1 & K-12 \\ 1 & 4 & \\ 0 & K-12 & \end{array}$$

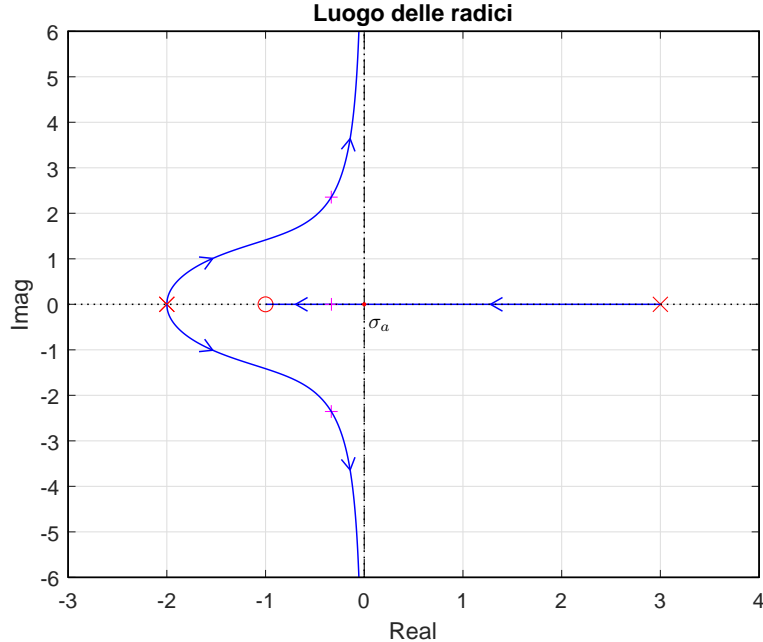


Figura 4: Luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$.

Dalla riga 0 si ottiene:

$$K - 12 > 0 \quad \rightarrow \quad K > 12 = K^*$$

Siccome K^* annulla la riga 0, la corrispondente pulsazione è $\omega^* = 0$. Il sistema retroazionato presenta il minimo tempo di assestamento alla risposta al gradino quando è massima la distanza dei poli della $G(s)$ dall'asse immaginario. In questo caso tale distanza è massima quando i poli sono allineati. L'ascissa σ_0 della condizione di allineamento può essere calcolata utilizzando il teorema del baricentro:

$$3\sigma_0 = \sum_{i=1}^3 p_i = -1 \quad \rightarrow \quad \sigma_0 = -\frac{1}{3} = -0.3333$$

Il valore K_0 a cui corrisponde minimo tempo di assestamento è il seguente:

$$K_0 = - \left. \frac{1}{G_1(s)} \right|_{s=\sigma_0} = 13.888.$$

b.2) Sia data la seguente funzione di trasferimento $G_3(s)$:

$$G_3(s) = \frac{s + 2}{s^2 + (\alpha + 2)s + 2\alpha + 1}$$

Mostrare graficamente come si muovono sul piano complesso i poli della funzione di trasferimento $G_3(s)$ al variare del parametro $\alpha > 0$. Calcolare il valore α^* a cui corrisponde il minimo tempo di assestamento del sistema $G_3(s)$ alla risposta al gradino.

Soluzione. I poli della funzione di trasferimento $G_3(s)$ coincidono con le radici del polinomio a denominatore:

$$s^2 + (\alpha + 2)s + 2\alpha + 1 = 0$$

che può essere riscritto nel seguente modo equivalente:

$$s^2 + 2s + 1 + \alpha(s + 2) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \alpha \frac{(s + 2)}{(s + 1)^2} = 0 \rightarrow \quad 1 + \alpha G_4(s) = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\alpha > 0$ è mostrato in Fig. 5. In questo caso il contorno delle radici si muove lungo una circonferenza centrata in $z = -2$. Il raggio R della circonferenza è il seguente:

$$R = 1$$

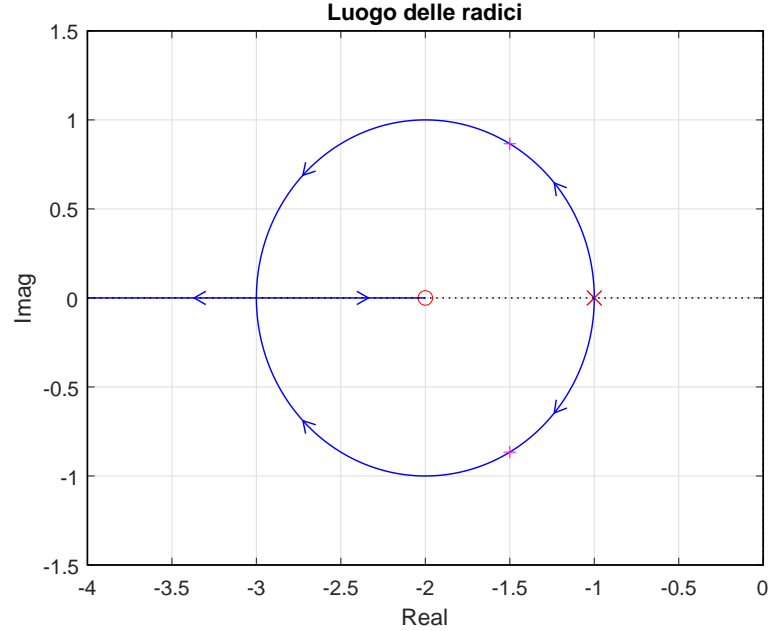


Figura 5: Contorno delle radici del sistema $G_4(s)$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

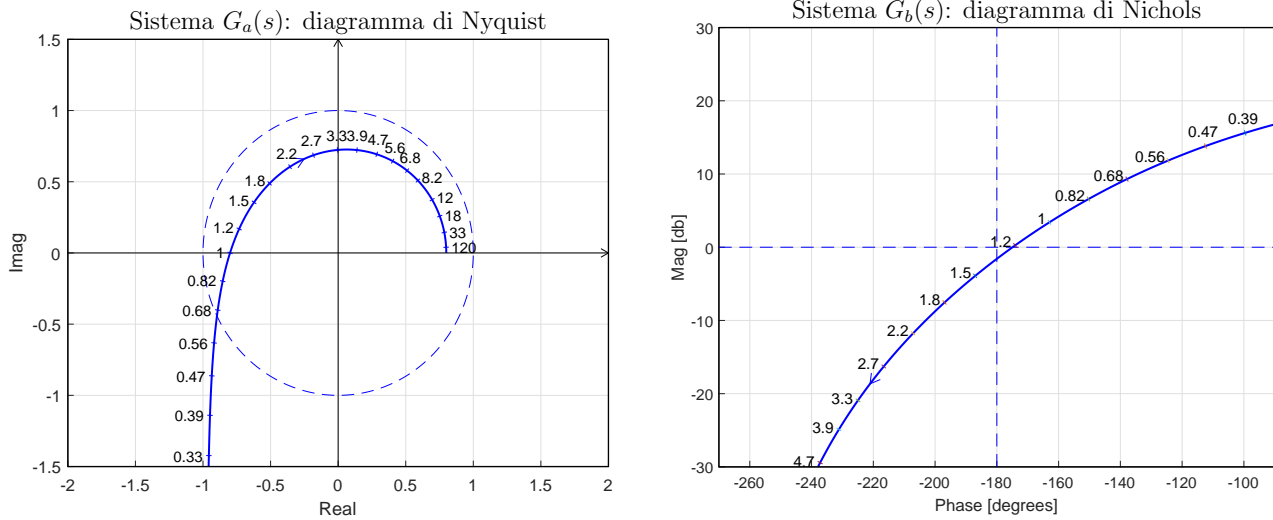
I punti di diramazione σ_1 e σ_2 del contorno delle radici sono:

$$\sigma_1 = -1, \quad \sigma_2 = -3.$$

La condizione di minimo tempo di assestamento si ha in corrispondenza del punto di diramazione $\sigma_1 = -1$ e quindi per il seguente valore del parametro α^* :

$$\alpha^* = - \left. \frac{1}{G_4(s)} \right|_{s=\sigma_2} = - \left. \frac{(s+1)^2}{(s+2)} \right|_{s=-3} = 4.$$

c) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi $G_a(s)$ e $G_b(s)$:



c.1) Per il sistema $G_a(s)$, progettare una rete correttiva in grado di garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_a = 5$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. La specifica sul margine di ampiezza $M_a = 5$ definisce completamente la posizione del punto $B = M_B e^{j\varphi_B}$: $M_B = 0.2$ e $\varphi_B = 180^\circ$. La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 6.

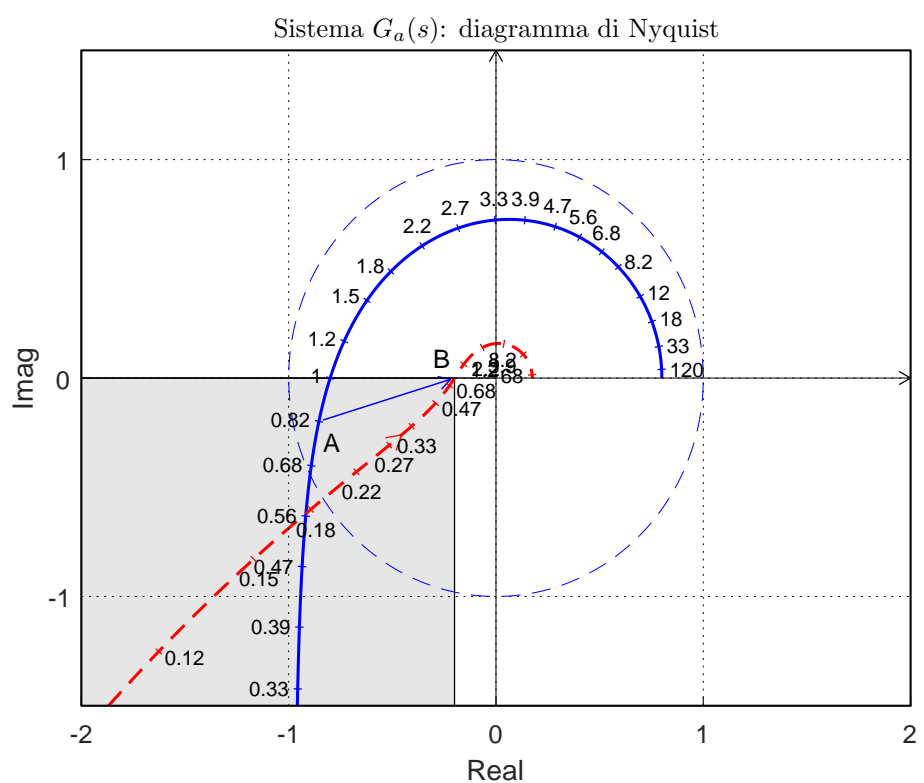


Figura 6: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$.

Il punto $A = G_b(j\omega_A)$ scelto per la sintesi della rete correttiva è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 0.82$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.8769, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 193.1^\circ.$$

Sostituendo i valori di M , φ e $\omega = \omega_A$ all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 4.024$ e $\tau_2 = 10.44$ della rete correttiva $C(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.22808, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -13.07^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 4.024 s)}{(1 + 18.4 s)}.$$

Il diagramma di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 6. Sintesi della rete corretttrice $C_1(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A :

$$\begin{aligned}\omega_A &= [0.82 & 0.68 & 0.56 & 0.47 & 0.39 & 0.33] \\ M_A &= [0.8769 & 0.977 & 1.114 & 1.272 & 1.483 & 1.715] \\ \varphi_A &= [-166.9 & -155.8 & -145.5 & -137.3 & -129.7 & -123.9] \\ M &= [0.2281 & 0.2047 & 0.1795 & 0.1572 & 0.1349 & 0.1166] \\ \varphi &= [-13.07 & -24.24 & -34.54 & -42.7 & -50.25 & -56.09] \\ \tau_1 &= [4.024 & 2.533 & 2.029 & 1.813 & 1.683 & 1.611] \\ \tau_2 &= [18.4 & 14.23 & 14.95 & 17.66 & 22.6 & 29.27]\end{aligned}$$

c.2) Sempre per il sistema $G_b(s)$, progettare una rete ritardatrice in modo che la funzione di risposta armonica del sistema compensato passi per il punto $B = (-160^\circ, -10 \text{ db})$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.

Soluzione. La specifica di progetto definisce completamente la posizione del punto $B = M_B e^{j\varphi_B}$: $M_B = -10 \text{ db} = 0.3162$ e $\varphi_B = -160^\circ$. La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 7.

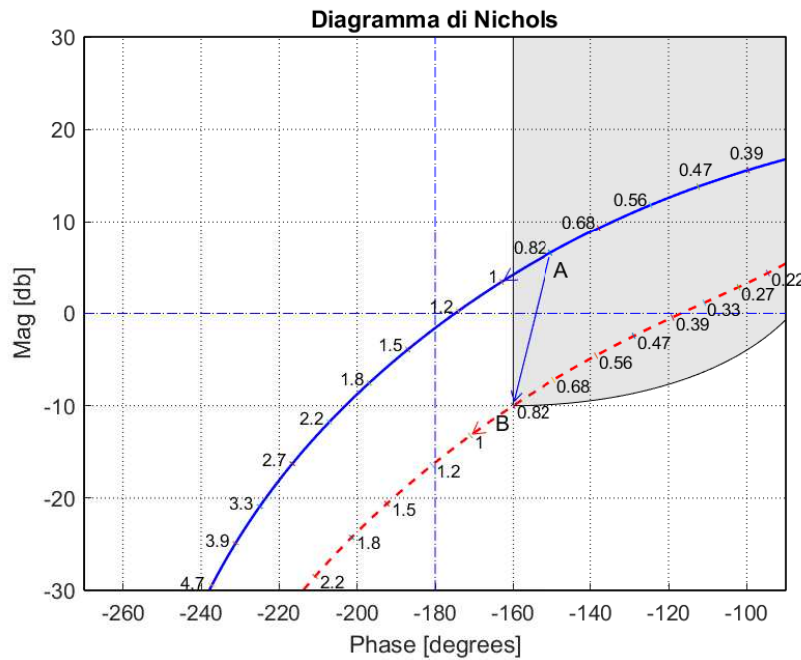


Figura 7: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_3(s)G_b(s)$.

Il punto $A = G(j\omega_A)$ scelto per essere portato in B è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 0.82$:

$$M_A = 2.134, \quad \varphi_A = -150.28^\circ.$$

I valori di M e φ da usare nelle formule di inversione sono i seguenti:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.1481, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -9.713^\circ \quad \rightarrow \quad C_3(s) = \frac{(1 + 6.054s)}{(1 + 41.66s)}.$$

I diagrammi di Nichols delle funzioni $G_b(s)$ e $C_3(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 7.

Sintesi della rete corretttrice $C_3(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A :

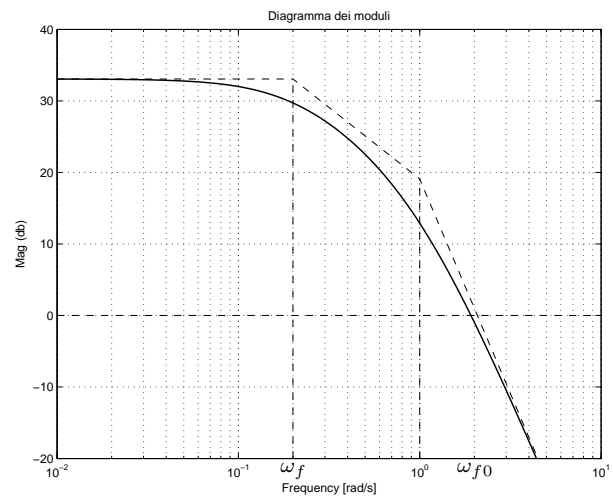
$$\begin{aligned}\omega_A &= [0.82 & 0.68 & 0.56 & 0.47 & 0.39] \\ M_A &= [2.134 & 2.921 & 3.904 & 4.907 & 6.038] \\ \varphi_A &= [-150.3 & -137.8 & -124.6 & -112.4 & -99.58] \\ M &= [0.1482 & 0.1083 & 0.081 & 0.0644 & 0.0523] \\ \varphi &= [-9.713 & -22.15 & -35.43 & -47.58 & -60.42] \\ \tau_1 &= [6.054 & 3.19 & 2.26 & 1.759 & 1.301] \\ \tau_2 &= [41.66 & 32.41 & 35.52 & 42.79 & 54.85]\end{aligned}$$

- d) Fornire una stima della larghezza di banda ω_f e del tempo di salita t_r del sistema $G_1(s)$ di cui a fianco è riportato il diagramma di Bode dei moduli:

$$\omega_f \simeq 0.2 \quad t_r \simeq \frac{1}{\omega_f} = 5 \text{ s}$$

Fornire inoltre una stima della larghezza di banda ω_{f0} e del tempo di salita t_{r0} del corrispondente sistema retroazionato:

$$\omega_{f0} \simeq 2 \quad t_{r0} \simeq \frac{1}{\omega_{f0}} = 0.5 \text{ s}$$



- e) Partendo dalla condizione iniziale nulla $y(0) = 0$, calcolare la risposta $y(n)$ del seguente sistema dinamico discreto:

$$y(n+1) = 0.5y(n) + 3x(n)$$

quando in ingresso è presente il gradino unitario $x(n) = 1$.

Sol. Applicando la \mathcal{Z} -trasformata alla precedente equazione alle differenze si ottiene:

$$zY(z) = 0.5Y(z) + 3X(z)$$

Esprimendo $Y(z)$ in funzione di $X(z)$ si ottiene:

$$Y(z) = \frac{3}{z-0.5} X(z) = \frac{3z}{(z-0.5)(z-1)}$$

Scomponendo in fratti semplici si ottiene:

$$Y(z) = z \left[\frac{6}{z-1} - \frac{6}{z-0.5} \right] = \left[\frac{6z}{z-1} - \frac{6z}{z-0.5} \right]$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(n) = 6 - 6(0.5)^n.$$

- f) Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare la seguente rete correttiva:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s+1)}{(s+2)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

Sol. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(z) = D(s)|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{(1+T-z^{-1})}{(1+2T-z^{-1})} = \frac{1.1-z^{-1}}{1.2-z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la seguente forma:

$$\begin{aligned} m_k &= \frac{1}{1.2} (m_{k-1} + 1.1e_k - e_{k-1}) \\ &= 0.8333 m_{k-1} + 0.9167 e_k - 0.8333 e_{k-1} \end{aligned}$$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono corrette.

1. Scrivere la funzione di trasferimento discreta $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ corrispondente alla seguente equazione alle differenze:

$$y_{k+2} + 3y_{k+1} + 5y_k + 2y_{k-1} = 4x_{k+1} + 6x_k \quad \rightarrow \quad G(z) = \frac{4z + 6}{z^2 + 3z + 5 + 2z^{-1}}$$

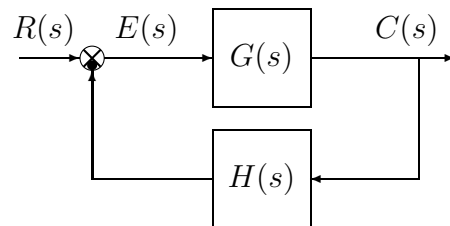
2. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{k \rightarrow 0} y(k)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} y(k)$ del segnale $y(k)$ corrispondente alla seguente funzione $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{z(3+z)}{(1-z)(2z+1)} \quad \rightarrow \quad y_0 = -\frac{1}{2}, \quad y_\infty = -\frac{4}{3}$$

3. Posto $T = 0.2$, calcolare il tempo di assestamento T_a della risposta impulsiva $g(k)$ del sistema discreto $G(z) = \frac{z}{z-0.5}$:

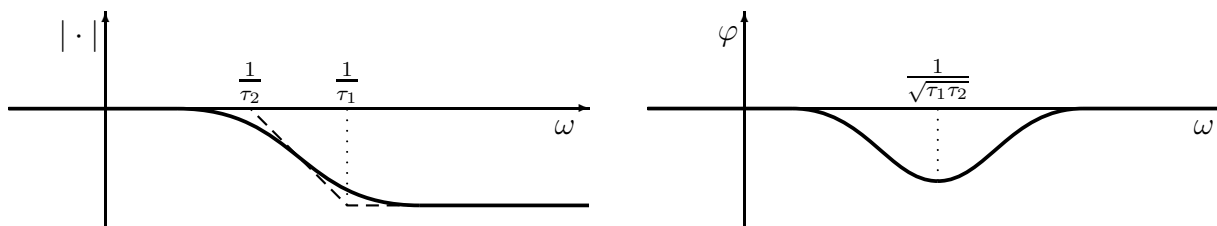
$$T_a = \frac{3}{\frac{1}{T} |\ln(0.5)|} = \frac{0.6}{|\ln(0.5)|} = 0.8656$$

4. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere il legame che lega la variazione relativa del sistema $G(s)$ alla variazione relativa del sistema retroazionato $G_0(s)$ quando varia un parametro α interno alla funzione di trasferimento $G(s)$:



$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

5. Tracciare i diagrammi di bode (moduli e fasi) di una rete ritardatrice $C(s) = \frac{(1+\tau_1 s)}{(1+\tau_2 s)}$, ($\tau_1 < \tau_2$):



6. La trasformazione bilineare è definita come segue:

$$\bigcirc \quad s = \frac{2}{T} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad \otimes \quad s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad \bigcirc \quad s = \frac{2}{T} \frac{z+1}{z-1} \quad \otimes \quad s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

7. Calcolare la \mathcal{Z} -trasformata $X(z)$ dei seguenti segnali tempo continui $x(t)$ quando $t = kT$:

$$x(t) = 3^{-2t} \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{z}{(z - 3^{-2T})} \quad x(t) = 4t \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{4Tz}{(z-1)^2}$$

8. Calcolare la soluzione $y(n)$ della seguente equazione alle differenze a partire dalla condizione iniziale $y(0) = 2$:

$$y(n+1) - 0.7y(n) = 0 \quad \rightarrow \quad y(n) = 2(0.7)^n.$$

9. Sia $X(z) = \mathcal{Z}[x(k)]$. Enunciare il teorema della traslazione “in anticipo” nel tempo:

$$\mathcal{Z}[x(t + nT)] = z^n [X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}]$$

10. La funzione di risposta armonica $F(\omega)$ di un sistema discreto $G(z)$ si determina nel seguente modo:

$F(\omega) = G(e^{j\omega})$
 $F(\omega) = G(e^{j\omega T})$
 $F(\omega) = G(j\omega)$
 $F(\omega) = G(j\omega T)$

11. Il teorema del baricentro del luogo delle radici può essere applicato

- anche a funzioni $G(s)$ trascendenti
- solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r > 2$
- solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r \geq 2$
- anche a funzioni $G(s)$ razionali fratte e instabili

12. Si consideri il sistema

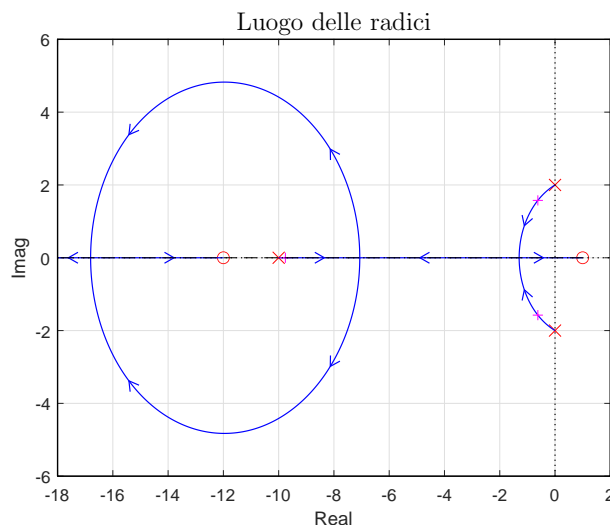
$$G(s) = \frac{(s - 1)(s + 12)}{(s^2 + 4)(s + 10)}$$

e il corrispondente luogo delle radici rappresentato in figura.

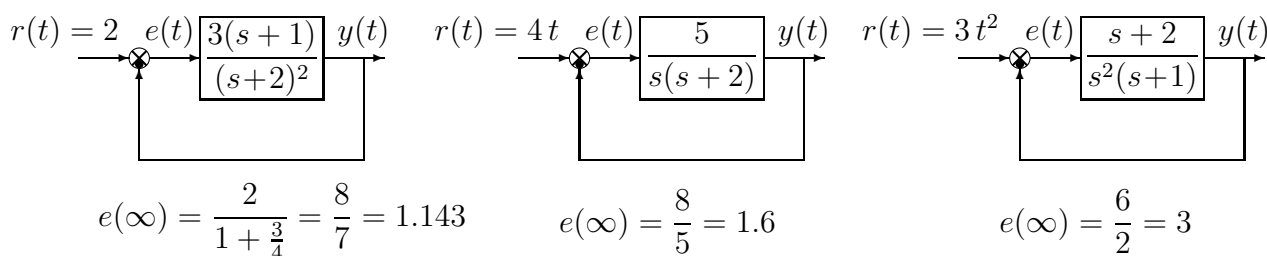
Nei limiti della precisione consentita dal grafico riportato sopra, calcolare il minimo tempo di assestamento ottenibile al variare di $K > 0$.

$$\sigma_1 = -1.298, \quad T_a = \frac{3}{|\sigma_1|} = 2.31$$

essendo σ_1 il punto di diramazione più vicino all'asse immaginario.



13. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



14. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un regolatore standard PID e a fianco disegnare qualitativamente il corrispondente diagramma di Bode dei moduli:

$$G(s) = K \left(1 + T_s s + \frac{1}{T_i s} \right)$$

