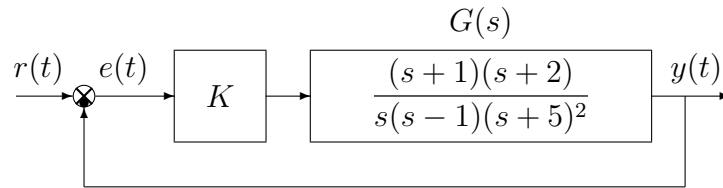


Controlli Automatici B

10 Giugno 2014 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



a.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K^* . Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1 G_1(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + K \frac{(s+1)(s+2)}{s(s-1)(s+5)^2} = 0$$

dove $K_1 = K$. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ per $K = K_1 > 0$ è mostrato in Fig. 1. Il luogo delle radici ha due asintoti verticali. Il centro degli

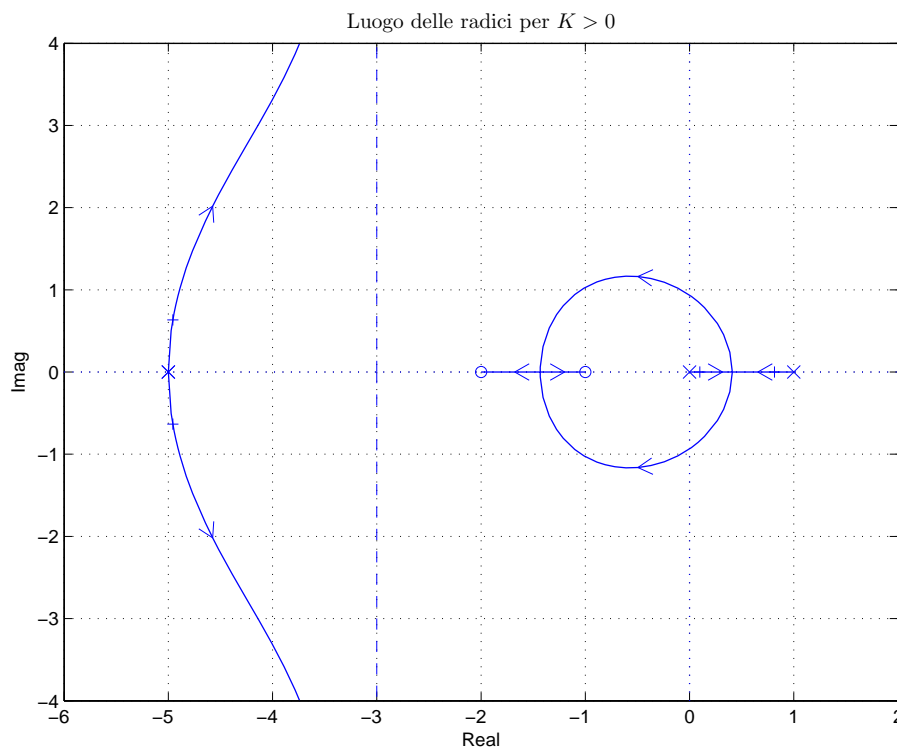


Figura 1: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ per $K = K_1 > 0$

asintoti è:

$$\sigma_a = \frac{1}{2} (-5 - 5 + 1 + 1 + 2) = -3.$$

L'intersezione con l'asse immaginario si calcola applicando il criterio di Routh alla seguente equazione caratteristica:

$$1 + K \frac{(s+1)(s+2)}{s(s-1)(s+5)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 + 9s^3 + (K+15)s^2 + (3K-25)s + 2K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & & 1 & K + 15 & 2K \\ 3 & & 9 & 3K - 25 & \\ 2 & & 6K + 160 & 18K & \\ 1 & (6K + 160)(3K - 25) - 162K & & & \\ 0 & & 18K & & \end{array}$$

Il sistema retroazionato é stabile se

$$K > -\frac{110}{6}, \quad 18K^2 + 168K - 4000 > 0, \quad K > 0.$$

Dalla seconda disequazione si ha che:

$$K < -\frac{14}{3} - 2\sqrt{61} = -20.28, \quad K > -\frac{14}{3} + 2\sqrt{61} = 10.95,$$

Quindi il sistema retroazionato é stabile se

$$K > -\frac{14}{3} + 2\sqrt{61} = 10.95 = K^*$$

L'intersezione con l'asse immaginario si ha in corrispondenza della pulsazione:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{3K^* - 25}{9}} = 0.934.$$

a.2) Sia la seguente funzione di trasferimento che descrive la dinamica di una frizione idraulica:

$$G(s) = \frac{K_m}{m_p s^3 + (1 + m_p)s^2 + (2 + K_m)s + K_m}$$

Utilizzando la metodologia del contorno delle radici mostrare come si spostano sul piano complesso i poli della funzione $G(s)$ al variare di $m_p > 0$ quando $K_m = 1$. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Sol. I poli della funzione $G(s)$ coincidono con gli zeri del polinomio a denominatore della funzione $G(s)$:

$$m_p s^3 + (1 + m_p)s^2 + (2 + K_m)s + K_m = 0$$

Posto $K_m = 1$, i poli della funzione $G(s)$ sono le soluzioni della seguente equazione:

$$m_p s^3 + (1 + m_p)s^2 + 3s + 1 = 0$$

che può essere riscritta nel seguente modo $1 + m_p G_1(s) = 0$:

$$s^2 + 3s + 1 + m_p s^2(s + 1) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + m_p \frac{s^2(s + 1)}{s^2 + 3s + 1} = 0$$

Mettendo in evidenza i poli della funzione $G_1(s)$ si ottiene:

$$1 + \frac{m_p s^2(s + 1)}{(s + 0.382)(s + 2.618)} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $m_p > 0$ è mostrato in Fig. 2. Nel contorno delle radici è presente un solo asintoto coincidente con il semiasse reale negativo, percorso dall'infinito a finito.

a.3) Facendo sempre riferimento alla funzione di trasferimento $G(s)$ definita al punto a.2, mostrare come si spostano sul piano complesso i poli della funzione $G(s)$ al variare di $K_m > 0$ quando $m_p = 1$. Determinare esattamente la posizione e il centro degli asintoti e determinare per quale valore \bar{K}_m del parametro K_m il sistema $G(s)$ presenta il minimo tempo di assestamento alla risposta al gradino.

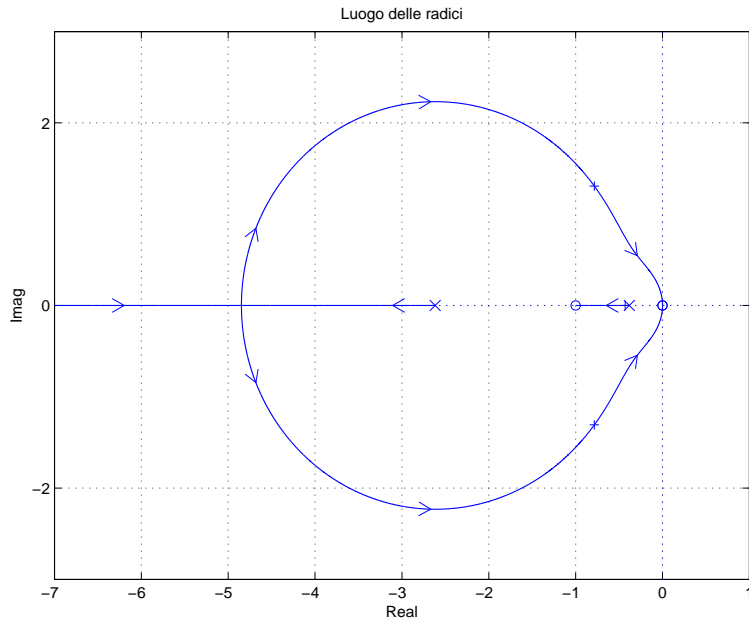


Figura 2: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare del parametro $m_p > 0$.

Sol. Posto $m_p = 1$, i poli della funzione $G(s)$ sono le soluzioni della seguente equazione:

$$s^3 + 2s^2 + (2 + K_m)s + K_m = 0$$

che può essere riscritta nel seguente modo $1 + K_m G_2(s) = 0$:

$$s^3 + 2s^2 + 2s + K_m(s + 1) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + K_m \frac{(s + 1)}{s(s^2 + 2s + 2)} = 0$$

Mettendo in evidenza i poli della funzione $G_2(s)$ si ha:

$$1 + \frac{K_m (s + 1)}{s[(s + 1)^2 + 1^2]} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $K_m > 0$ è mostrato in Fig. 3. Nel contorno

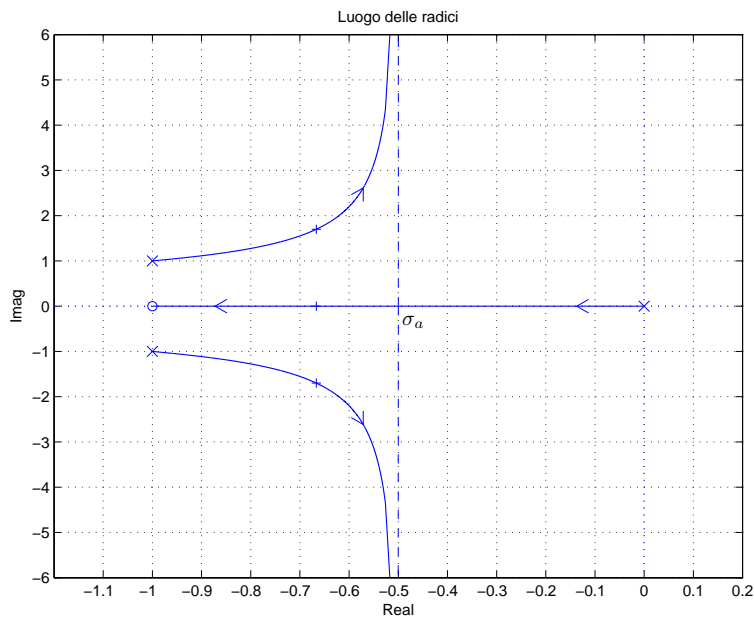


Figura 3: Luogo delle radici del sistema $G_2(s)$ al variare del parametro $K_m > 0$.

delle radici sono presenti 2 asintoti. Il centro degli asintoti è:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-2 + 1) = -0.5$$

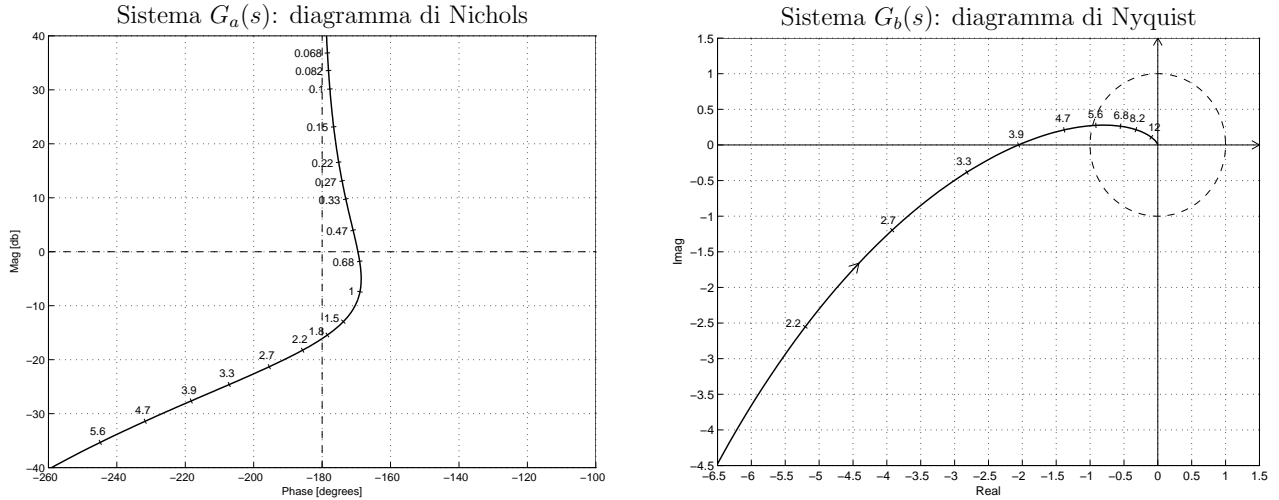
Il sistema G_s presenta il minimo tempo di assestamento alla risposta al gradino quando è massima la distanza dei poli della $G(s)$ dall'asse immaginario. Tale distanza è massima quando i poli sono allineati. In questo caso il sistema ha grado relativo $r = 2$ per cui l'ascissa σ_0 della condizione di allineamento può essere calcolata utilizzando il teorema del baricentro:

$$3\sigma_0 = \sum_{i=1}^3 p_i = -2 \quad \rightarrow \quad \sigma_0 = -\frac{2}{3} = -0.666$$

Il valore \bar{K}_m del parametro K_m per cui si ha l'allineamento dei poli si calcola nel seguente modo:

$$\bar{K}_m = - \left. \frac{1}{G_2(s)} \right|_{s=\sigma_0} = 2.222$$

b) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi $G_a(s)$ e $G_b(s)$:



b.1) Per il sistema $G_a(s)$, progettare una rete correttiva in modo da garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = 60^\circ$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.

Sol. La specifica sul margine di fase $M_\varphi = 60^\circ$ definisce completamente la posizione del punto $B = M_B e^{j\varphi_B}$: $M_B = 1$ e $\varphi_B = 240^\circ$. La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 4. Il punto $A = G_b(j\omega_A)$ scelto per la sintesi della rete correttiva è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 1.5$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.225, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 186.2^\circ.$$

Sostituendo i valori di M , φ e $\omega = \omega_A$ all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 3.179$ e $\tau_2 = 0.302$ della rete correttiva $C(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 4.438, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 53.78^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 3.179s)}{(1 + 0.302s)}.$$

Il diagramma di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 4. Sintesi della rete correttiva $C_1(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A :

$$\begin{aligned} \omega_A &= [\quad 1 \quad 1.5 \quad 1.8 \quad 2.2 \quad 2.7] \\ M_A &= [0.4267 \quad 0.2253 \quad 0.1694 \quad 0.1225 \quad 0.0861] \\ \varphi_A &= [-168.9 \quad -173.8 \quad -178.5 \quad 174.3 \quad 164.6] \\ M &= [2.344 \quad 4.438 \quad 5.903 \quad 8.162 \quad 11.61] \\ \varphi &= [48.93 \quad 53.79 \quad 58.45 \quad 65.70 \quad 75.4] \\ \tau_1 &= [2.237 \quad 3.179 \quad 3.507 \quad 3.865 \quad 4.348] \\ \tau_2 &= [0.3055 \quad 0.302 \quad 0.2307 \quad 0.1442 \quad 0.0633] \end{aligned}$$

b.2) Per il sistema $G_b(s)$, progettare una rete correttiva in grado di garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_a = 4$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.

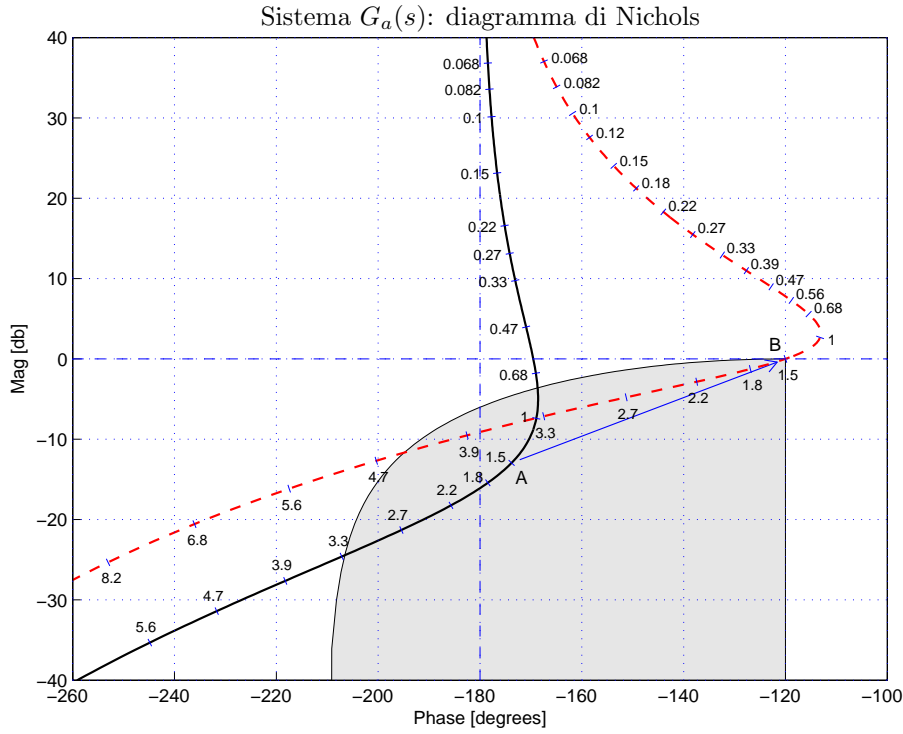


Figura 4: Diagrammi di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$.

Sol. La posizione del punto B è completamente determinata dalla specifica di progetto $B = M_B e^{j\varphi_B}$: $M_B = 0.25$ e $\varphi_B = -180^\circ$. La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 5. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 3.3$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 2.843, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 187.7^\circ.$$

Sostituendo i valori di M , φ e ω all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 2.03$ e $\tau_2 = 23.34$ della rete correttiva $C_1(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.0879, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -7.75^\circ \quad \rightarrow \quad C_2(s) = \frac{(1 + 2.03s)}{(1 + 23.34s)}.$$

Il diagramma di Nyquist delle funzioni $G_b(s)C_2(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 5. Sintesi della rete correttiva $C_2(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A :

$$\begin{aligned} \omega_A &= [\quad 3.3 \quad 2.7 \quad 2.2] \\ M_A &= [\quad 2.843 \quad 4.1 \quad 5.797] \\ \varphi_A &= [-172.3 \quad -163 \quad -153.9] \\ M &= [\quad 0.0879 \quad 0.0609 \quad 0.0431] \\ \varphi &= [-7.747 \quad -16.97 \quad -26.13] \\ \tau_1 &= [\quad 2.03 \quad 1.136 \quad 0.8821] \\ \tau_2 &= [\quad 23.34 \quad 19.6 \quad 23.01] \end{aligned}$$

b.3) Sempre per il sistema $G_b(s)$ progettare i parametri K , τ_1 e τ_2 di una rete anticipatrice $C(s) = K \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$ in modo da garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = 50^\circ$ in corrispondenza della pulsazione $\omega_A = 3.9$.

Soluzione. La specifica sul margine fase $M_\varphi = 50^\circ$ definisce completamente la posizione del punto $B = M_B e^{j\varphi_B}$: $M_B = 1$ e $\varphi_B = 230^\circ$. La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 6. Il punto $A = G(j\omega_A)$ che deve essere portato in B è quello assegnato corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 3.9$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 2.05, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 180^\circ.$$

Tale punto può essere portato in B usando la rete anticipatrice assegnata solamente se il parametro K viene scelto in modo che il punto $A' = K A$ appartenga alla regione di

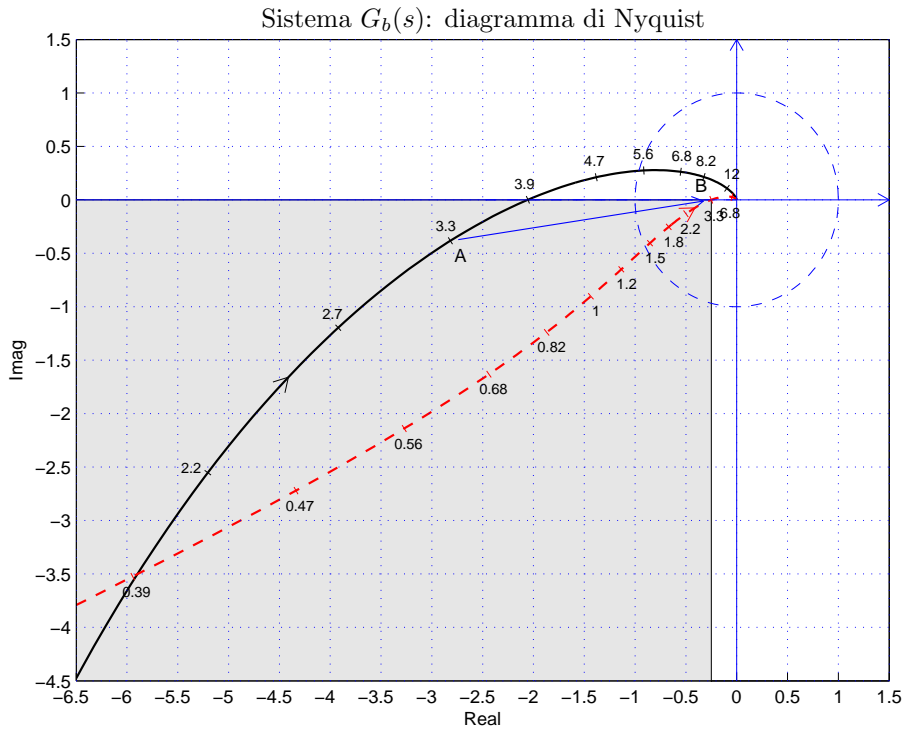


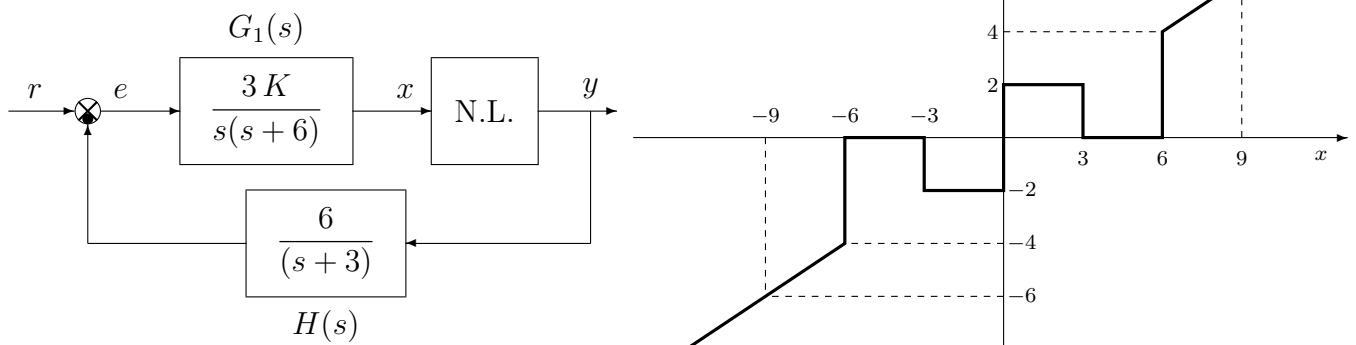
Figura 5: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)G_b(s)$.

ammissibilità. Se si sceglie per A' il valore $A' = -0.3$, si ottiene $K = \frac{|A'|}{|A|} = 0.146$. I valori di M e φ da usare nelle formule di inversione vanno ora calcolati utilizzando le coordinate polari dei punti A' e B :

$$M = \frac{M_B}{M_{A'}} = 3.333, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_{A'} = 50^\circ \quad \rightarrow \quad C_3(s) = \frac{(1 + 0.9005s)}{(1 + 0.1146s)}$$

Sostituendo tali valori all'interno delle formule di inversione si ottengono i parametri $\tau_1 = 0.9005$ e $\tau_2 = 0.1146$. I diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$, $K G_b(s)$ e $K C_3(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 6.

c) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:



c.1) Posto $K = 1$, calcolare i punti di lavoro (x_i, y_i) corrispondenti ai valori $r_1 = 2$ ed $r_2 = 12$ dell'ingresso r .

Sol. I guadagni statici delle funzioni $G_1(s)$, $G_2(s)$ e $H(s)$, rispettivamente, sono:

$$K_1 = \infty, \quad K_2 = 1, \quad K_3 = 2.$$

La retta di carico della parte lineare del sistema è una retta orizzontale di ordinata:

$$y = \frac{r}{K_2 K_3} = \frac{r}{2}.$$

Quando $r = r_1 = 2$ la retta di carico è $y = 1$ e il sistema presenta tre punti di lavoro:

$$(x_1, y_1) = (0, 1), \quad (x_2, y_2) = (3, 1), \quad (x_3, y_3) = (6, 1).$$

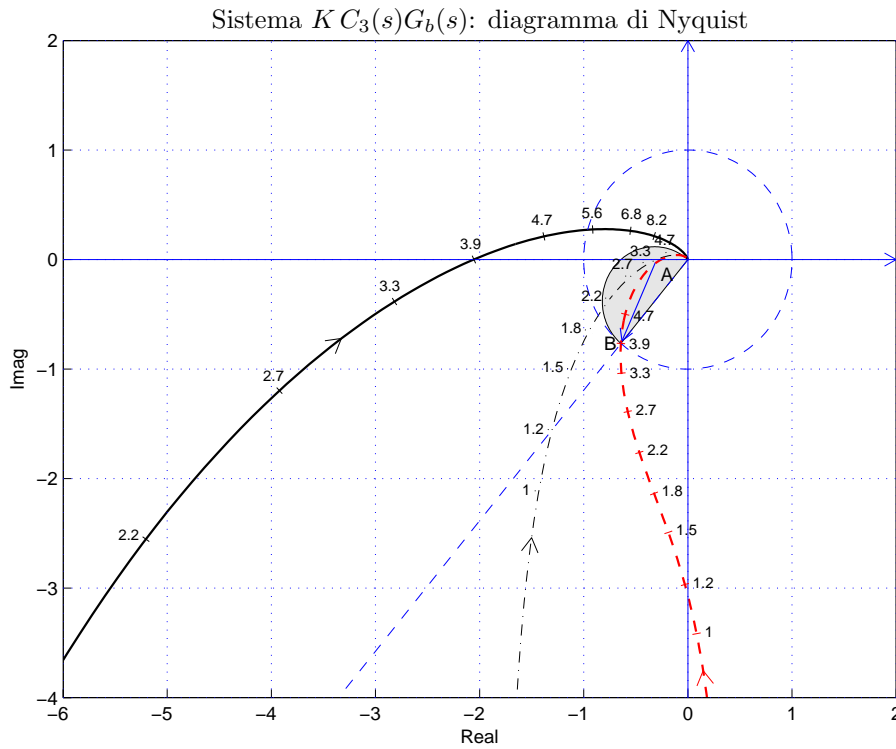


Figura 6: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $K C_3(s) G_b(s)$.

Quando $r = r_2 = 12$ la retta di carico è $y = 6$. In questo caso il punto di lavoro è:

$$(x_1, y_1) = (9, 6).$$

c.2) Posto $K = 1$, utilizzare il criterio del cerchio per verificare se il sistema retroazionato è stabile nell'intorno del punto $(x_0, y_0) = (9, 6)$.

Sol. Le pendenze α e β di 2 rette che centrate nel punto $(x_1, y_1) = (9, 6)$ racchiudono a settore tutta la non linearità sono le seguenti:

$$\alpha = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0.4, \quad \beta = 2.$$

Il cerchio critico interseca il semiasse reale negativo nei punti:

$$-\frac{1}{\alpha} = -\frac{15}{6} = -2.5, \quad -\frac{1}{\beta} = -\frac{1}{2}$$

Il margine di ampiezza K^* e la pulsazione ω^* della funzione $G(s) = G_1(s) G_2(s) H(s)$ si determinano utilizzando il criterio di Routh:

$$G(s) = \frac{18}{s(s+3)(s+6)} \quad \rightarrow \quad K^* = \frac{(3+6) \cdot 3 \cdot 6}{18} = 9, \quad \omega^* = \sqrt{18} = 4.24.$$

Il valore di K^* è maggiore di β :

$$K^* = 9 > \beta = 2$$

e il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ non interseca il cerchio critico. Quindi, in base al criterio del cerchio, si può affermare che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile nell'intorno del punto di lavoro. In Fig. 7 è mostrato il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ sovrapposto al cerchio critico.

c.3) Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità $y(x)$ nell'intorno del punto $(0, 0)$. Utilizzare le variabili m_1, m_2, m_3, \dots per rappresentare gli eventuali valori minimi e massimi "non noti" della funzione $F(X)$.

Sol. L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ è mostrato in Fig. 8. Indichiamo: a) con m_1 il valore della funzione $F(X)$ per $X = 3$; b) con m_1 il valore minimo della funzione

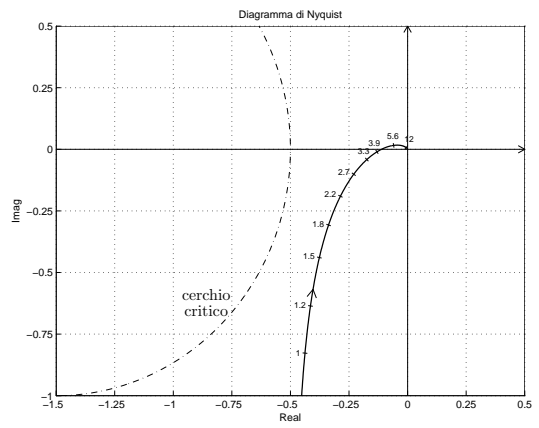
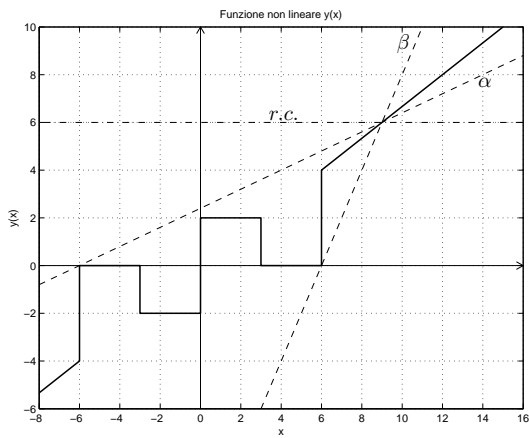


Figura 7: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ e cerchio critico.

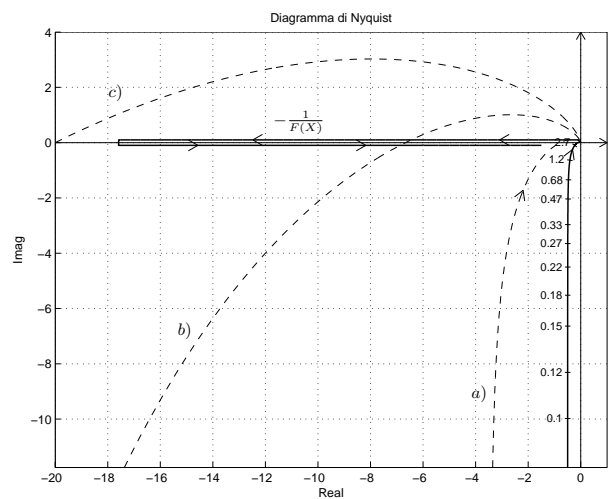
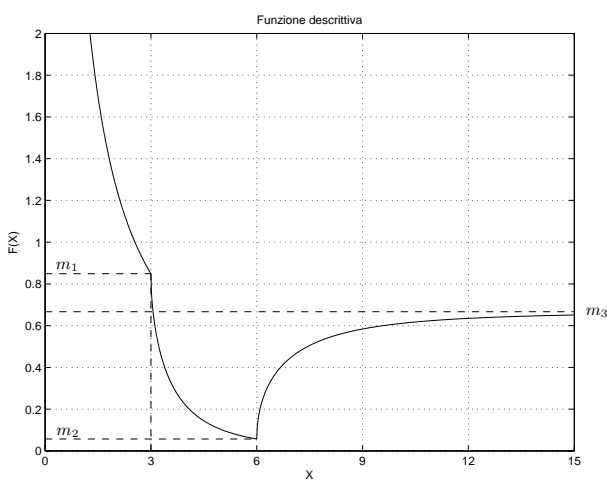


Figura 8: Andamento della funzione descrittiva $F(X)$.

$F(X)$ per $X = 6$; c) con $m_3 = \frac{2}{3}$ il valore finale a cui tende la funzione $F(X)$ per $X \rightarrow \infty$. Il valore m_2 può essere calcolato esattamente solo conoscendo con precisione la funzione $F(X)$. Il primo tratto della funzione descrittiva coincide con la funzione $F(X)$ di un relè ideale:

$$F(X) = \frac{8}{\pi X}$$

Utilizzando questa funzione si può calcolare il valore del parametro m_1 :

$$m_1 = F(X)|_{X=3} = \frac{8}{\pi X}|_{X=3} = \frac{8}{\pi 3} = 0.849.$$

c.4) Discutere “qualitativamente”, anche in funzione dei parametri m_1, m_2, m_3, \dots , l’esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno $K > 0$.

Sol. Per $K = 1$, il margine di ampiezza K_1^* del sistema $G_1(s)$ è $K_1^* = 9$. Per $K \neq 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $K G_1(s)$ è $K^* = \frac{K_1^*}{K} = \frac{9}{K}$. Al variare di K^* si possono avere le seguenti condizioni di funzionamento:

a) Per $K^* > m_3 = 0.666$ il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile.

b) Per $m_2 < K^* < m_3$, il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in due punti a cui corrispondono un ciclo limite stabile (il primo) e uno instabile (il secondo).

c) Per $K^* < m_2$, la funzione $-1/F(X)$ è tutta interna al diagramma completo della funzione $G(s)$ per cui non vi sono cicli limite e il sistema retroazionato è instabile.

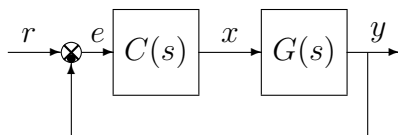
c.5) Posto $K = 1$, calcolare l’ampiezza X^* e la pulsazione ω^* del più piccolo ciclo limite stabile presente nel sistema retroazionato.

Sol. Posto $K = 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $K G(s)$ è $K^* = 9$. Tale valore è maggiore di m_1 per cui nel sistema retroazionato è presente un solo ciclo limite stabile di cui è possibile calcolare l’ampiezza X^* utilizzando la funzione $F(X)$:

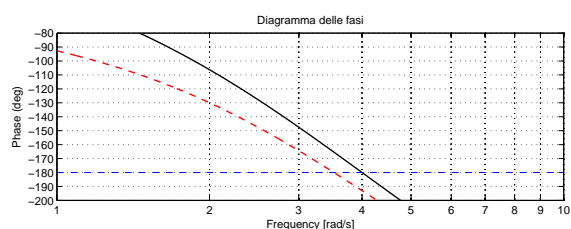
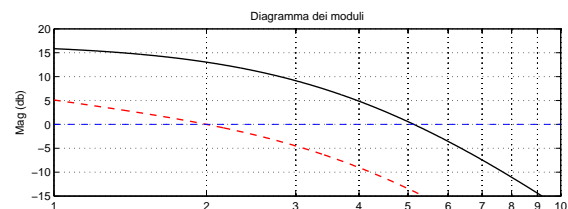
$$F(X^*) = K^* \quad \rightarrow \quad \frac{8}{\pi X^*} = 9 \quad \rightarrow \quad X^* = \frac{8}{9\pi} = 0.283.$$

La pulsazione ω^* del ciclo limite coincide con quella del punto di intersezione della $G(s)$ con il semiasse reale negativo $\omega^* = \sqrt{18} = 4.24$.

d) Sia dato il sistema retroazionato riportato sotto e i diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ riportati a fianco.



Progettare una rete correttiva $C(s)$ in modo da garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = 50^\circ$ in corrispondenza della pulsazione $\omega_A = 2$.



Sol. Il modulo e fase del punto B sono univocamente determinati dalla specifica sul margine di fase $M_\varphi = 50^\circ$:

$$M_B = 1, \quad \varphi_B = 230^\circ$$

Il modulo e la fase del punto A alla pulsazione $\omega_A = 2$ si leggono direttamente dai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$:

$$M_A = 4.48, \quad \varphi_A = 253.74^\circ \quad \longrightarrow \quad M = \frac{M_B}{M_A} = 0.2232, \quad \varphi = -23.74^\circ$$

La rete correttiva $C(s)$ si ottiene utilizzando le formule di inversione:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi} = 0.8597, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi} = 4.4272 \quad \rightarrow \quad C(s) = \frac{1 + 0.8597 s}{1 + 4.4272 s}$$

e) Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare la seguente rete correttiva:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s + 3)}{s(s + 1)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

Sol. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(z) = \left. \frac{(s + 3)}{s(s + 1)} \right|_{s = \frac{1 - z^{-1}}{T}} = \frac{T(1 + 3T - z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + T - z^{-1})} = \frac{T + 3T^2 - T z^{-1}}{1 + T - (2 + T)z^{-1} + z^{-2}}$$

Per $T = 0.1$ si ha:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{0.13 - 0.1 z^{-1}}{1.1 - 2.1 z^{-1} + z^{-2}}$$

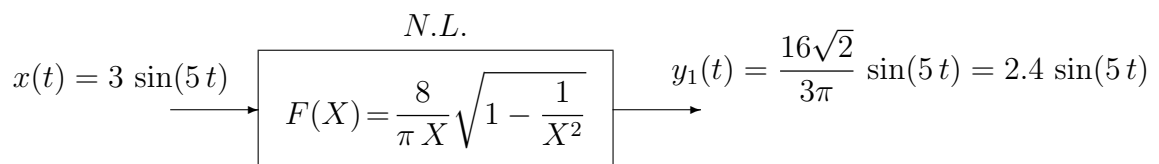
La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m(k) = \frac{1}{1.1} [2.1 m(k - 1) - m(k - 2) + 0.13 e(k) - 0.1 e(k - 1)]$$

da cui si ottiene:

$$m(k) = 1.9091 m(k - 1) - 0.9091 m(k - 2) + 0.1182 e(k) - 0.0909 e(k - 1)]$$

f) Sia $x(t)$ un segnale periodico posto in ingresso ad un elemento non lineare N.L. caratterizzato dalla funzione descrittiva $F(X)$ riportata sotto. Indicare qual è l'andamento temporale $y_1(t)$ della fondamentale del segnale periodico che si ha all'uscita del blocco non lineare:



L'ampiezza $Y_1(X)$ della fondamentale $y_1(t)$ del segnale periodico che si ha all'uscita del blocco non lineare si ottiene nel seguente modo:

$$Y_1(X) = F(X) X \Big|_{X=3} = \frac{8}{\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{X^2}} \Big|_{X=3} = \frac{8}{\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{16\sqrt{2}}{3\pi} \simeq 2.4.$$

Controlli Automatici B
10 Giugno 2014 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. La risposta al test è considerata corretta solo se tutte le affermazioni corrette sono state contrassegnate.

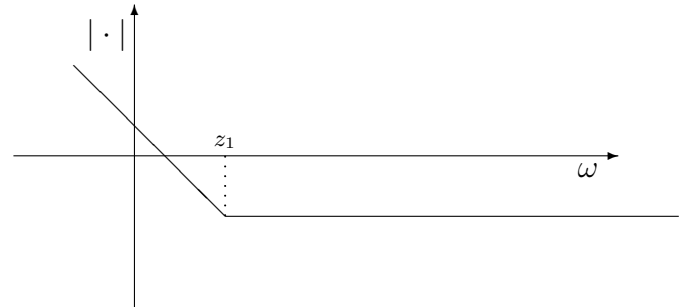
1. Calcolare le successioni discrete $x(k)$ corrispondenti alle seguenti funzioni complesse $X(z)$:

$$X(z) = \frac{2z}{(z - e^{-3T})} \rightarrow x(k) = 2e^{-3kT}$$

$$X(z) = \frac{3Tz}{(z - 1)^2} \rightarrow x(k) = 3kT$$

2. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un regolatore standard PI e a fianco disegnare qualitativamente il corrispondente diagramma di Bode dei moduli:

$$G(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_d s} \right)$$



3. Posto $T = 1$ e utilizzando la corrispondenza tra piano- s e piano- z , calcolare il tempo di assestamento T_a della risposta impulsiva $g(k)$ del sistema discreto $G(z) = \frac{z}{z-0.5}$:

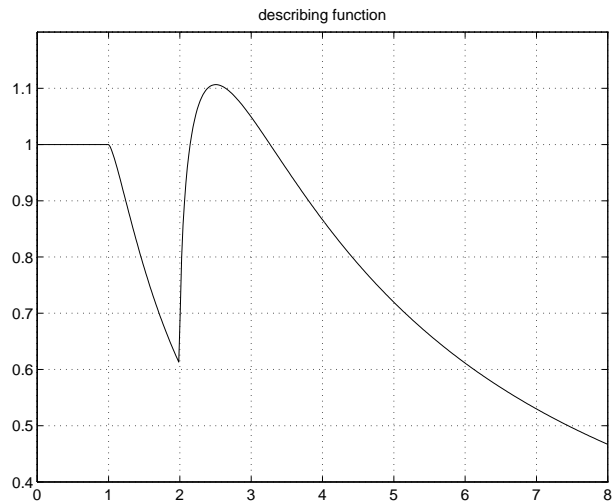
$$T_a = \frac{3}{|\ln(0.5)|} = 4.32 \text{ s.}$$

4. Quella riportata a fianco è la funzione descrittiva $F(X)$ di una non linearità posta in retroazione su di un sistema lineare $G(s)$ caratterizzato da un margine di ampiezza $M_\alpha = 0.8$. Fornire una stima dell'ampiezza X^* di ciascun ciclo limite (stabile e instabile) eventualmente presente all'interno del sistema retroazionato:

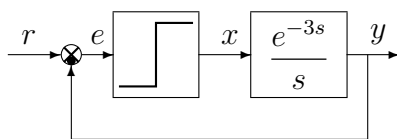
$X_1^* \simeq 1.5$ Stabile? si

$X_2^* \simeq 2$ Stabile? no

$X_3^* \simeq 4.4$ Stabile? si



5. Sia dato il seguente sistema retroazionato. Per la presenza del relé ideale il sistema sicuramente oscilla. Fornire il valore della pulsazione ω^* di oscillazione:



$$\omega^* = \frac{\pi}{6} = 0.524.$$

6. Calcolare la soluzione $y(n)$ della seguente equazione alle differenze a partire dalla condizione iniziale $y(0) = 2$:

$$y(n + 1) - 0.3y(n) = 0 \quad \rightarrow \quad y(n) = 2(0.3)^n.$$

7. Scrivere la funzione di trasferimento discreta $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ corrispondente alla seguente equazione alle differenze:

$$y_k = -3y_{k-1} - 2y_{k-2} - 4y_{k-3} + x_k + 5x_{k-2} \quad \rightarrow \quad G(z) = \frac{1 + 5z^{-2}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2} + 4z^{-3}}$$

8. 1) Disegnare qualitativamente il luogo delle radici del seguente sistema retroazionato:

$$G(s) = \frac{K}{(s+2)^3}$$

al variare del parametro $K > 0$.

- 2) Quando 2 dei 3 poli del sistema retroazionato si trovano sull'asse immaginario, $p_{1,2} = \pm j\omega^*$, il terzo polo p_3 dove si trova?

$$p_3 = -6$$

- 3) Determinare per quale valore \bar{K} di K i due poli $p_{1,2} = \pm j\omega^*$ del sistema retroazionato si trovano sull'asse immaginario e il terzo polo p_3 si trova nel punto calcolato in 2):

$$\bar{K} = - \left. \frac{1}{G(s)} \right|_{s=-6} = 64$$

9. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{k \rightarrow 0} y(k)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} y(k)$ del segnale $y(k)$ corrispondente alla seguente funzione $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{z(2z+4)}{(z-1)(z+0.5)} \quad \rightarrow \quad y_0 = 2, \quad y_\infty = 4$$

10. La funzione discreta $D(z)$ riportata sotto è stata ottenuta dalla funzione $D(s)$ utilizzando il metodo della corrispondenza poli-zeri. Calcolare il parametro k imponendo l'uguaglianza dei guadagni alle alte frequenze:

$$D(s) = \frac{s+1}{s} \quad \rightarrow \quad D(z) = k \frac{z - e^{-T}}{z-1} \quad \rightarrow \quad k = \frac{2}{1 + e^{-T}}$$

11. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione e con un elevato guadagno statico d'anello

- è poco sensibile alle variazioni parametriche di $H(s)$
- è poco sensibile alle variazioni parametriche di $G(s)$
- presenta una forte attenuazione dei disturbi costanti agenti sul sistema

12. Fornire una stima della larghezza di banda ω_f e del tempo di salita t_r del sistema $G_1(s)$ di cui a fianco è riportato il diagramma di Bode dei moduli:

$$\omega_f \simeq 0.4 \quad t_r \simeq 2.5$$

Fornire inoltre una stima della larghezza di banda ω_{f0} e del tempo di salita t_{r0} del corrispondente sistema retroazionato:

$$\omega_{f0} \simeq 7 \quad t_{r0} \simeq \frac{1}{7}$$

