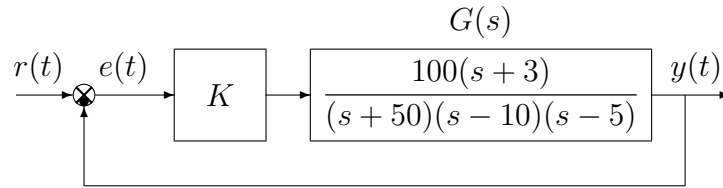


## Controlli Automatici B

### 10 Giugno 2013 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

- a1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del seguente sistema retroazionato al variare del parametro  $K > 0$ .



Determinare esattamente la posizione degli asintoti, le intersezioni  $\omega^*$  con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno  $K^*$ . Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

*Sol.* L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema  $G(s)$  al variare del parametro  $K > 0$  è mostrato in Fig. 1. Il centro degli asintoti  $\sigma_a$  è il seguente:

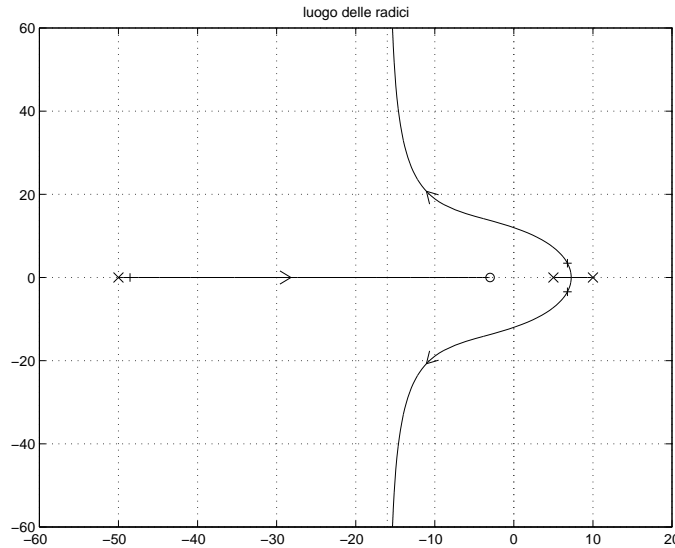


Figura 1: Luogo delle radici del sistema  $G(s)$  al variare del parametro  $K > 0$ .

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-50 + 10 + 5 + 3) \quad \longrightarrow \quad \sigma_a = -16$$

L'intersezione con l'asse immaginario si calcola utilizzando il criterio di Routh:

$$1 + KG(s) = 0 \quad \longrightarrow \quad (s + 50)(s - 10)(s - 5) + 100K(s + 3) = 0$$

$$s^3 + 35s^2 + (100K - 700)s + 300K + 2500 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 100K - 700 & \\ 2 & 35 & 300K + 2500 & \\ 1 & 35(100K - 700) - (300K + 2500) & & \\ 0 & 300K + 2500 & & \end{array}$$

Dalla riga 1 si ricava il vincolo:

$$35(K - 7) - (3K + 25) > 0 \quad \longrightarrow \quad K > K^* = \frac{135}{16} = 8.44$$

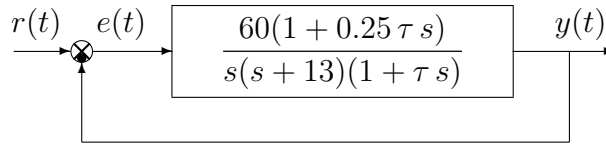
Dalla riga 0 si ricava il vincolo:

$$3K + 25 > 0 \quad \longrightarrow \quad K > -\frac{25}{3} = -8.33$$

Il sistema risulta essere stabile per  $K > K^* = 8.44$ . L'intersezione con l'asse immaginario si ha alla pulsazione:

$$\omega^* = \sqrt{100K^* - 700} \quad \longrightarrow \quad \omega^* = 11.9896$$

- a2) Tracciare qualitativamente il contorno delle radici del seguente sistema retroazionato al variare del parametro  $\tau > 0$ . Determinare la posizione dei punti di diramazione “solo in modo qualitativo”.



Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente

$$s(s + 13)(1 + \tau s) + 60(1 + 0.25 \tau s) = 0$$

da cui si ricava l'equazione caratteristica  $1 + \tau G_1(s) = 0$ :

$$s(s + 13) + 60 + \tau s[s(s + 13) + 15] = 0 \quad \longrightarrow \quad 1 + \frac{\tau s(s^2 + 13s + 15)}{s^2 + 13s + 60} = 0$$

Calcolando i poli e gli zeri della funzione  $G_1(s)$  si ottiene:

$$1 + \frac{\tau s(s + 11.72)(s + 1.28)}{(s + 6.5)^2 + 4.213^2} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro  $\tau > 0$  è mostrato in Fig. 2.

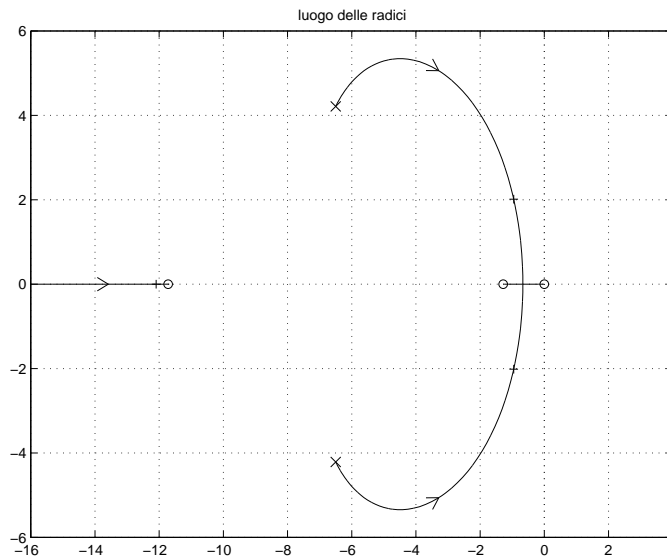
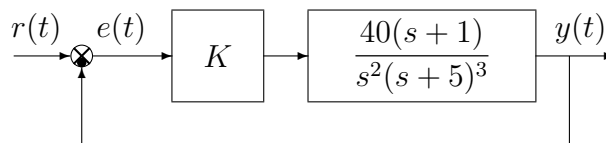


Figura 2: Contorno delle radici del sistema  $G_1(s)$  al variare del parametro  $\tau > 0$ .

- a3) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del seguente sistema retroazionato al variare del parametro  $K > 0$ . Determinare in modo esatto la posizione degli asintoti e in “modo qualitativo” tutti gli altri aspetti del luogo delle radici. Nel tracciamento del luogo delle radici si tenga presente che il sistema retroazionato è stabile per  $0 < K < 16.1$ .



Sol. Il centro dei 4 asintoti del luogo delle radici del sistema dato è:

$$\sigma_a = \frac{1}{4}(-15 + 1) = -\frac{7}{2} = -3.5$$

Il luogo delle radici al variare del parametro  $K > 0$  è mostrato in Fig. 3. In questo caso gli asintoti dividono il piano in 4 parti uguali.

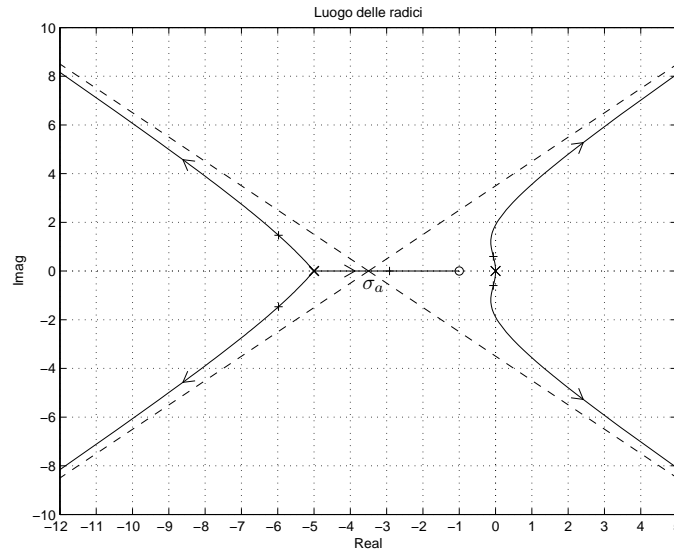
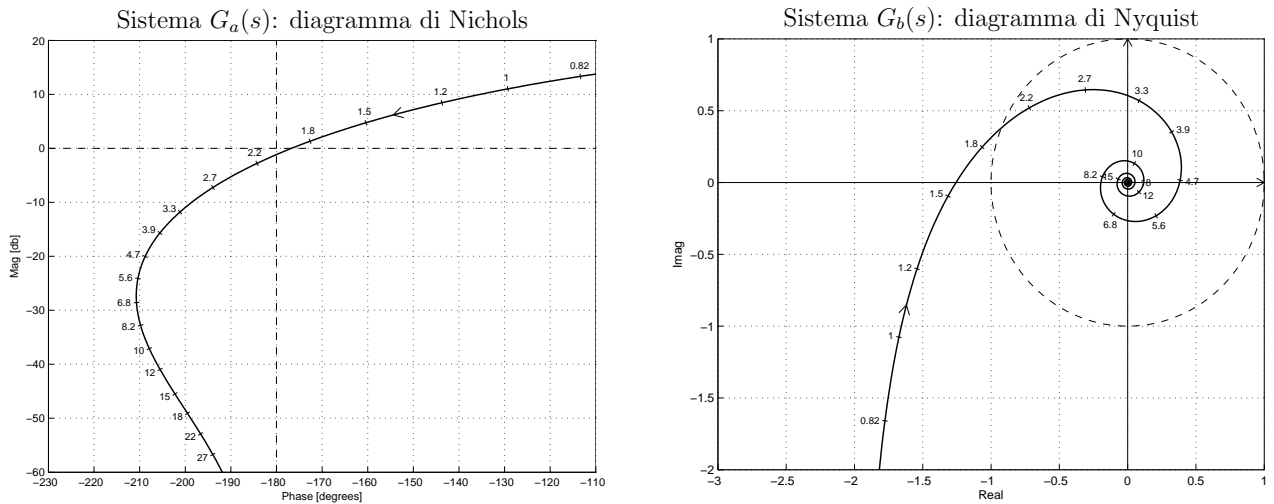


Figura 3: Luogo delle radici del sistema  $G(s)$  al variare del parametro  $K > 0$ .

b) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi  $G_a(s)$  e  $G_b(s)$ :



b.1) Per il sistema  $G_a(s)$  progettare una rete anticipatrice in modo da imporre al sistema retroazionato un margine di fase  $M_\varphi = 40^\circ$ . Scegliere il valore della pulsazione  $\omega$  che si ritiene più opportuno;

*Sol.* La posizione del punto  $B$  è completamente determinata dalla specifica di progetto  $B = M_B e^{j\varphi_B}$ :  $M_B = 1$  e  $\varphi_B = -140^\circ$ . La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 4. Il punto  $A = G_a(j\omega_A)$  scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione  $\omega_A = 10$ :

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.0139, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -207.86^\circ.$$

Sostituendo i valori di  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega$  all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri  $\tau_1 = 7.708$  e  $\tau_2 = 0.039$  della rete correttiva  $C_1(s)$ :

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 71.77, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 67.86^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 7.708 s)}{(1 + 0.039 s)}.$$

Il diagramma di Nichols delle funzioni  $G_a(s)$  e  $C_1(s)G_a(s)$  sono mostrati in Fig. 4.

Nel caso  $\omega_A = 18$  si ha:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.00351, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -199.5^\circ.$$

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 284.5, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 59.51^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 18.31 s)}{(1 + 0.0325 s)}.$$

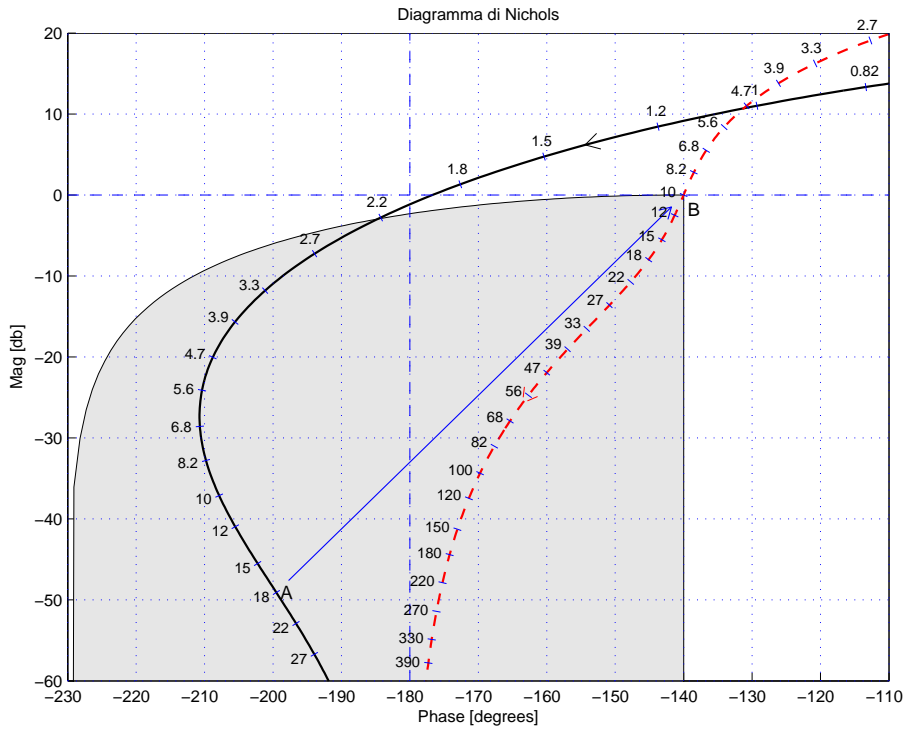


Figura 4: Diagrammi di Nichols delle funzioni  $G_a(s)$  e  $C_1(s)G_a(s)$ .

In corrispondenza delle seguenti pulsazioni:

$$\omega_A = [2.7 \ 3.3 \ 3.9 \ 4.7 \ 5.6 \ 6.8 \ 8.2 \ 10 \ 12 \ 15 \ 18 \ 22]$$

il modulo  $M_A$  della funzione  $G_a(j\omega_A)$  è:

$$M_A = [0.4340 \ 0.2568 \ 0.1645 \ 0.0996 \ 0.0623 \ 0.0372 \ 0.0229 \ 0.0139 \ 0.0089 \ 0.0053 \ 0.0035 \ 0.0023]$$

la fase  $\varphi_A$  della funzione  $G_a(j\omega_A)$  è:

$$\varphi_A = [166.07 \ 158.83 \ 154.45 \ 151.20 \ 149.62 \ 149.31 \ 150.21 \ 152.13 \ 154.48 \ 157.75 \ 160.48 \ 163.36]$$

Calcolata l'amplificazione  $M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{M_A}$ :

$$M = [2.30 \ 3.89 \ 6.08 \ 10.04 \ 16.06 \ 26.84 \ 43.59 \ 71.77 \ 111.77 \ 188.46 \ 284.53 \ 441.98]$$

e l'anticipo  $\varphi = \varphi_B - \varphi_A$ :

$$\varphi = [53.92 \ 61.16 \ 65.55 \ 68.79 \ 70.37 \ 70.68 \ 69.78 \ 67.86 \ 65.51 \ 62.24 \ 59.51 \ 56.63]$$

si ricavano i seguenti valori di  $\tau_1$ :

$$\tau_1 = [0.786 \ 1.18 \ 1.59 \ 2.21 \ 2.98 \ 4.13 \ 5.62 \ 7.70 \ 10.19 \ 14.16 \ 18.31 \ 24.02]$$

e i seguenti valori di  $\tau_2$ :

$$\tau_2 = [0.071 \ 0.078 \ 0.0703 \ 0.059 \ 0.052 \ 0.0457 \ 0.0419 \ 0.0392 \ 0.0371 \ 0.0347 \ 0.0325 \ 0.0298]$$

- b.2) Per il sistema  $G_b(s)$  progettare una rete ritardatrice in grado da garantire al sistema compensato un margine di ampiezza  $M_\alpha = 5$ . Scegliere il valore della pulsazione  $\omega$  che si ritiene più opportuno;

*Sol.* La specifica sul margine di ampiezza  $M_\alpha = 5$  definisce completamente la posizione del punto  $B = M_B e^{j\varphi_B}$ :  $M_B = 0.2$  e  $\varphi_B = 180^\circ$ . La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 5. Il punto  $A = G_b(j\omega_A)$  scelto per la sintesi della rete correttiva è quello corrispondente alla pulsazione  $\omega_A = 1.2$ :

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 1.655, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 201.28^\circ.$$

Sostituendo i valori di  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega = \omega_A$  all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri  $\tau_1 = 1.862$  e  $\tau_2 = 16.86$  della rete correttiva  $C(s)$ :

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.121, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -21.28^\circ \quad \rightarrow \quad C_2(s) = \frac{(1 + 1.862 s)}{(1 + 16.86 s)}.$$

Il diagramma di Nyquist delle funzioni  $G_b(s)$  e  $C_2(s)G_b(s)$  sono mostrati in Fig. 5.

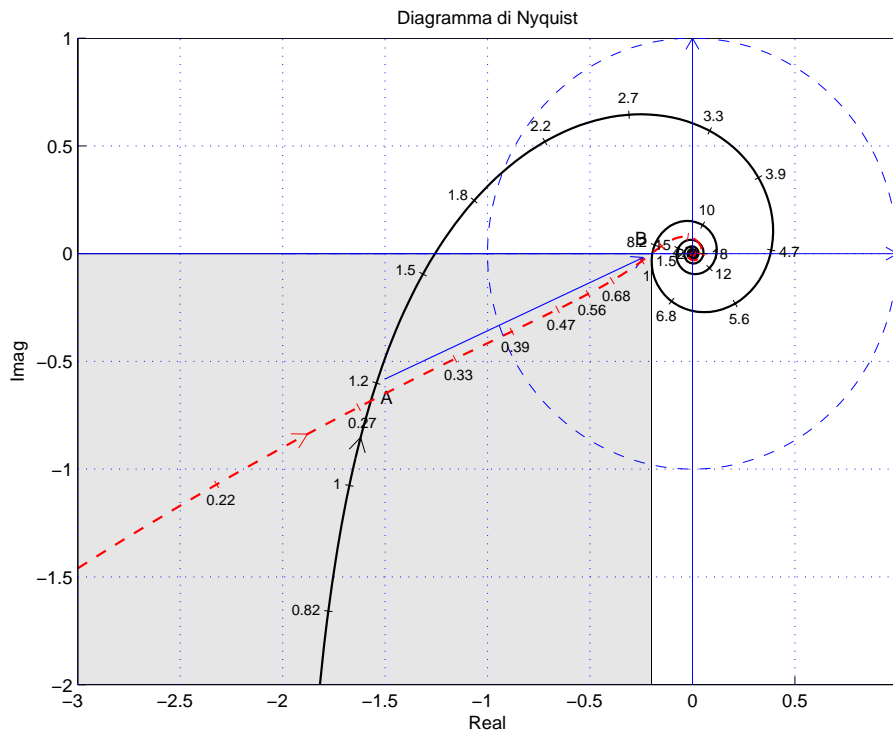


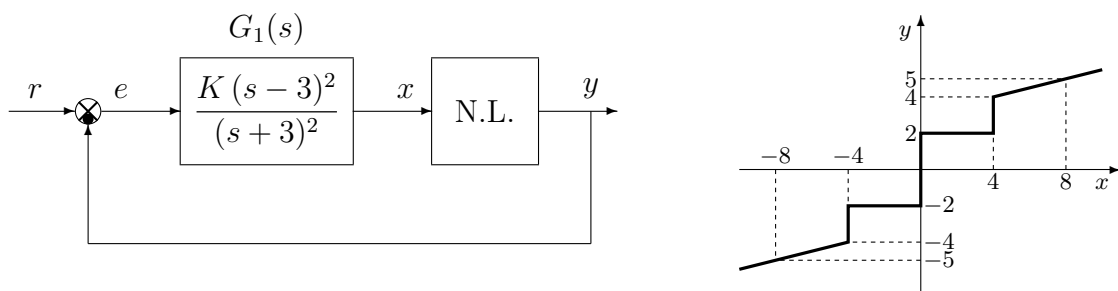
Figura 5: Diagrammi di Nyquist delle funzioni  $G_b(s)$  e  $C_2(s)G_b(s)$ .

Nel caso  $\omega_A = 1.5$ :

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 3.822, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 199.85^\circ.$$

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.0523, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -19.85^\circ \quad \rightarrow \quad C_2(s) = \frac{(1 + 0.7926 s)}{(1 + 16.21 s)}.$$

c) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:



c.1) Posto  $K = 1$ , determinare per quale valore  $r^*$  del riferimento  $r$  il punto di lavoro del sistema retroazionato coincide con il punto  $(x_0, y_0) = (2, 2)$ .

*Sol.* Essendo  $K_1 = 1$ , la retta di carico della parte lineare del sistema è:

$$x = r - y$$

Imponendo il passaggio della retta per il punto  $(x_0, y_0) = (2, 2)$  si ottiene la soluzione:

$$r^* = 4.$$

c.2) Posto  $K = 1$ ,  $r = r^*$  ed utilizzando il criterio del cerchio, dire se il sistema retroazionato è stabile nell'intorno del punto di lavoro  $(x_0, y_0) = (2, 2)$ .

*Sol.* Le pendenze  $\alpha$  e  $\beta$  di 2 rette centrate in  $(x_0, y_0) = (2, 2)$  che racchiudono a settore tutta la non linearità sono:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 2$$

Il cerchio critico (che in questo caso degenera in un semipiano) interseca il semiasse reale negativo nei punti:

$$-\frac{1}{\alpha} = -\infty, \quad -\frac{1}{\beta} = -\frac{1}{2}$$

Il settore che racchiude la non linearità, il diagramma di Nyquist della funzione  $G_1(s)$  e il cerchio critico sono mostrati in Fig. 6. L'intersezione con il semiasse reale negativo si

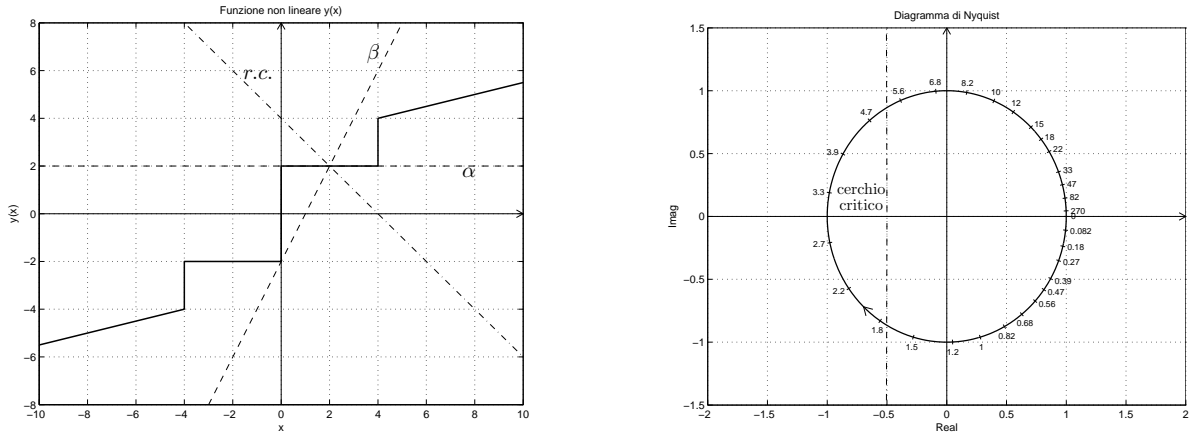


Figura 6: Diagramma di Nyquist della funzione  $G_1(s)$  e cerchio critico.

trova scrivendo l'equazione caratteristica del sistema retroazionato e applicando il criterio di Routh:

$$1 + \frac{K(s-3)^2}{(s+3)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad (s+3)^2 + K(s-3)^2 = 0$$

da cui si ricava:

$$(1+K)s^2 + 6(1-K)s + 9(1+K) = 0$$

Il sistema retroazionato è stabile per

$$-1 < K < 1 = K^* \quad \omega^* = 3$$

Ne segue che il diagramma di Nyquist della funzione  $G_1(s)$  interseca il cerchio critico e quindi utilizzando il criterio del cerchio non è possibile concludere niente per quanto riguarda la stabilità o meno del sistema non lineare retroazionato.

c.3) Posto  $r = 0$  il punto di lavoro coincide con l'origine. Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva  $F(X)$  della non linearità N.L. assegnata, prendendo l'origine come punto di lavoro. Utilizzare delle variabili (per esempio:  $m_1, m_2, \dots$ ) per rappresentare gli eventuali valori non noti minimi e massimi della funzione  $F(X)$ .

*Sol.* L'andamento qualitativo della funzione descrittiva  $F(X)$  è mostrato in Fig. 7. Per  $X < 4$  la funzione descrittiva  $F(X)$  coincide con quella di un relè:

$$F(X) = \frac{8}{\pi X}$$

Il valore  $m_1$  del primo minimo si ottiene calcolando la  $F(X)$  in corrispondenza di  $X = 4$ :

$$m_1 = F(X)|_{X=4} = \frac{2}{\pi} = 0.6366$$

Il valore  $m_2$  del massimo intermedio può essere calcolato solo conoscendo la  $F(X)$  per  $X > 4$ . Per  $X \rightarrow \infty$  la  $F(X)$  tende al valore finale minimo  $m_3 = 0.25$ .

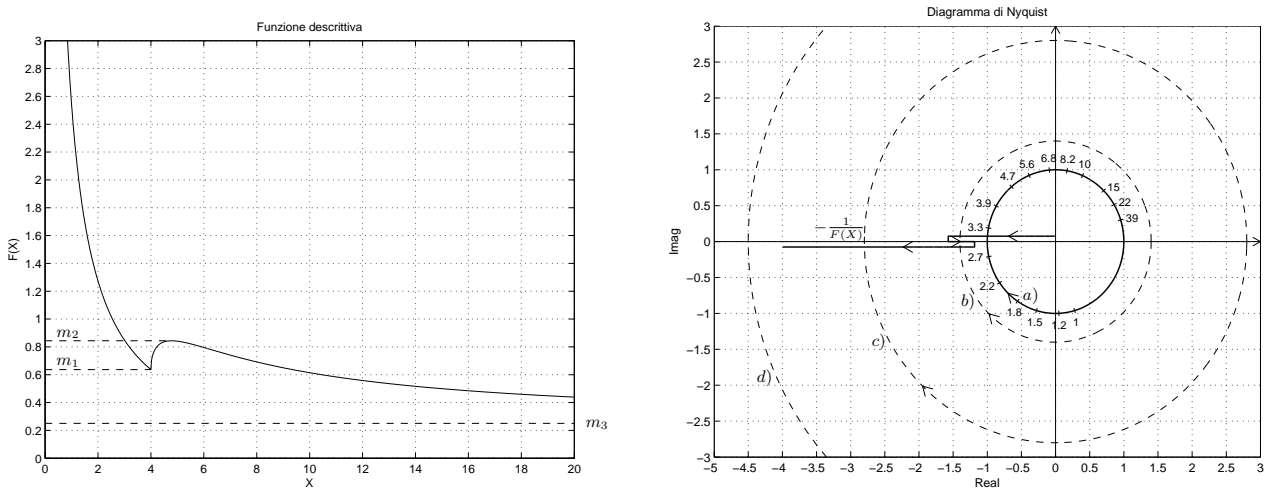


Figura 7: Andamento della funzione descrittiva  $F(X)$ .

c.4) Discutere “qualitativamente” (in funzione anche dei parametri  $m_1, m_2, \dots$ ) l’esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno  $K > 0$ .

*Sol.* Per  $K = 1$ , il margine di ampiezza  $\bar{K}^*$  del sistema  $G_1(s)$  è  $\bar{K}^* = 1$ . Per  $K \neq 1$ , il margine di ampiezza  $K^*$  del sistema  $K G_1(s)$  è  $K^* = \frac{1}{K}$ . Al variare di  $K^*$  si possono avere le seguenti condizioni di funzionamento:

a) Per  $K^* > m_2$ , il diagramma di Nyquist della  $G_1(s)$  interseca la funzione  $-1/F(X)$  in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile.

b) Per  $m_1 < K^* < m_2$ , il diagramma di Nyquist della  $G_1(s)$  interseca la funzione  $-1/F(X)$  in tre punti a cui corrispondono tre cicli limite di cui due stabili (quelli esterni) e uno instabile (quello intermedio).

c) Per  $m_3 < K^* < m_1$  il diagramma di Nyquist della  $G_1(s)$  interseca la funzione  $-1/F(X)$  in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile.

d) Per  $K^* < m_3$ , la funzione  $-1/F(X)$  è tutta interna al diagramma completo della funzione  $G_1(s)$  per cui non vi sono cicli limite e il sistema retroazionato è instabile.

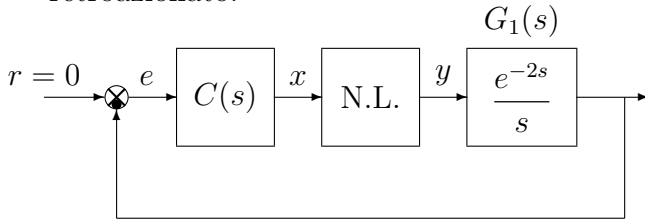
c.5) Posto  $K = 1$ , determinare l’ampiezza  $X^*$  e la pulsazione  $\omega^*$  di un eventuale ciclo limite stabile presente nel sistema retroazionato.

*Sol.* Posto  $K = 1$ , il margine di ampiezza  $K^*$  del sistema  $K G_1(s)$  è  $K^* = 1$ . Tale valore è maggiore di  $m_1$  per cui nel sistema retroazionato è presente almeno un ciclo limite stabile di cui è possibile calcolare l’ampiezza  $X^*$  utilizzando la  $F(X)$  del relè ideale:

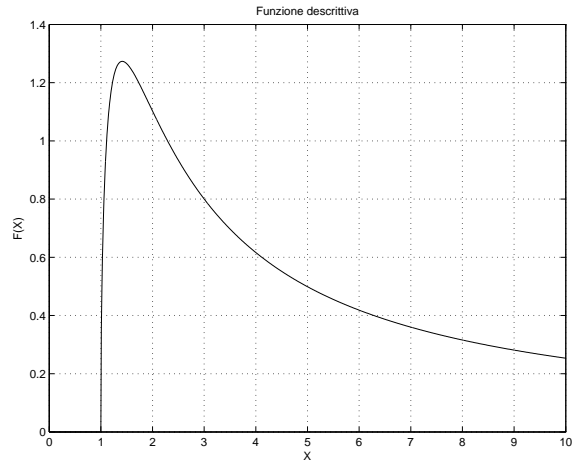
$$F(X^*) = K^* \quad \rightarrow \quad \frac{8}{\pi X^*} = 1 \quad \rightarrow \quad X^* = \frac{8}{\pi} = 2.55$$

La pulsazione  $\omega^*$  del ciclo limite coincide con quella del punto di intersezione della  $G_1(s)$  con il semiasse reale negativo:  $\omega^* = 3$ .

d) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:



dove la non linearità è caratterizzata dalla funzione descrittiva  $F(X)$  mostrata in figura.



d.1) Posto  $C(s) = 1$  determinare la pulsazione  $\omega$  e l'ampiezza  $X$  (approssimata) delle eventuali oscillazioni autosostenute presenti nel sistema retroazionato.

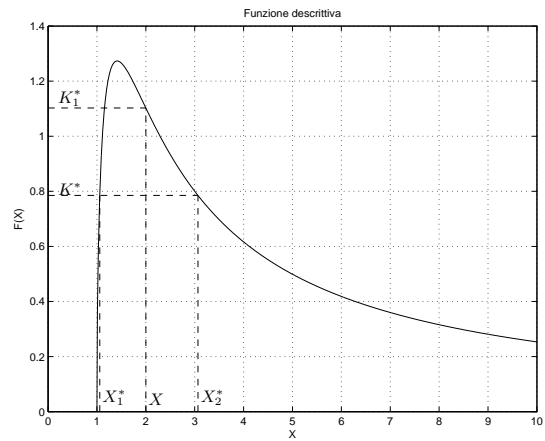
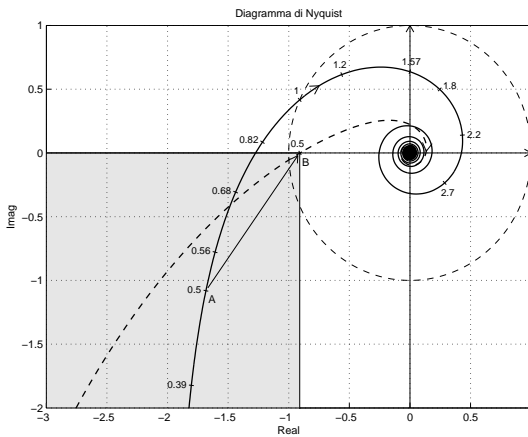
*Sol.* Posto  $C(s) = 1$ , il margine di ampiezza  $K^*$  del sistema  $G_1(s)$  coincide con la pulsazione  $\omega^*$  dell'eventuale oscillazione autosostenuta presente all'interno del sistema retroazionato:

$$K^* = \omega^* = \frac{\pi}{2t_0} = \frac{\pi}{4} = 0.785$$

Le ampiezze delle oscillazioni autosostenute presenti all'interno del sistema retroazionato si determinano imponendo che la funzione descrittiva  $F(X)$  assegnata sia uguale a  $K^*$ :

$$F(X^*) = K^* \quad \rightarrow \quad X_1^* = 1.06, \quad X_2^* = 3.07$$

L'oscillazione autosostenuta di ampiezza  $X_1^*$  è instabile, quella di ampiezza  $X_2^*$  è stabile.



d.2) Calcolare i parametri  $\tau_1$  e  $\tau_2$  di una rete ritardatrice  $C(s) = \frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$  in modo che all'interno del sistema retroazionato sia presente un'oscillazione autosostenuta di ampiezza  $X = 2$  e pulsazione  $\omega = 0.5$ .

*Sol.* Affinchè l'ampiezza  $X$  dell'oscillazione autosostenuta sia  $X = 2$ , il margine di ampiezza  $K_1^*$  del sistema deve essere  $K_1^* = F(2) = 1.1$ . Il punto  $B$  dove deve essere spostata la funzione di risposta armonica è quindi  $B = -\frac{1}{K_1^*}$ :

$$M_B = 0.907, \quad \varphi_B = -180^\circ$$

Il punto  $A$  che deve essere portato in  $B$  è quello caratterizzato dalla pulsazione  $\omega = 0.5$ :

$$M_A = G_1(j\omega)|_{\omega=0.5} = \frac{1}{0.5} = 2, \quad \varphi_A = -\frac{\pi}{2} - 2 \cdot 0.5 = -147.3^\circ$$

I parametri da utilizzare nelle formule di inversione sono:

$$M = \frac{0.907}{2} = 0.4534, \quad \varphi = -32.7^\circ$$

La rete anticipatrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi} = 1.432, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi} = 5.029 \quad \rightarrow \quad C(s) = \frac{1 + 1.432 s}{1 + 5.029 s}$$



- e) Partendo da condizione iniziale nulla  $y(0) = 0$ , calcolare la risposta  $y(n)$  del seguente sistema dinamico discreto:

$$y(n+1) = 2y(n) + 3x(n)$$

quando in ingresso è presente la successione di campioni  $x(n) = 0.5^n$ .

*Sol.* Applicando la  $\mathcal{Z}$ -trasformata alla precedente equazione alle differenze con condizione iniziale nulla  $y(0) = 0$  si ottiene:

$$Y(z) = \frac{3}{z-2} X(z) = \frac{3z}{(z-2)(z-0.5)} = 2 \left[ \frac{z}{(z-2)} - \frac{z}{(z-0.5)} \right]$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(n) = 2 [2^n - 0.5^n].$$

- f) Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare la seguente rete correttiva:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s+6)}{s(s+1)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento  $T = 0.1$ .

*Sol.* Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(z) = \frac{(s+6)}{s(s+1)} \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{T(1+6T-z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+T-z^{-1})} = \frac{T+6T^2-Tz^{-1}}{1+T-(2+T)z^{-1}+z^{-2}}$$

Per  $T = 0.1$  si ha:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{0.16 - 0.1 z^{-1}}{1.1 - 2.1 z^{-1} + z^{-2}}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m_k = \frac{1}{1.1} (2.1 m_{k-1} - m_{k-2} + 0.16 e_k - 0.1 e_{k-1})$$

cioè:

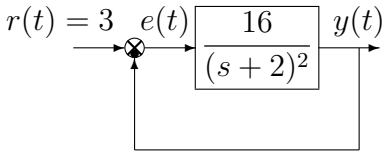
$$m_k = 1.9091 m_{k-1} - 0.9091 m_{k-2} + 0.1455 e_k - 0.0909 e_{k-1}$$

**Controlli Automatici B**  
**10 Giugno 2013 - Domande Teoriche**

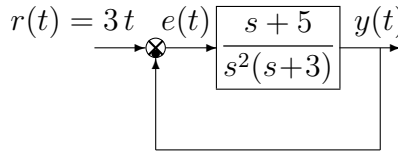
Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. La risposta al test è considerata corretta solo se tutte le affermazioni corrette sono state contrassegnate.

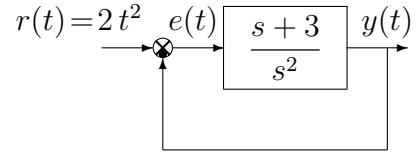
1. Calcolare l'errore a regime  $e(\infty)$  per i seguenti sistemi retroazionati:



$$e(\infty) = \frac{R_0}{1 + K_p} = \frac{3}{5}$$



$$e(\infty) = \frac{R_0}{K_v} = 0$$



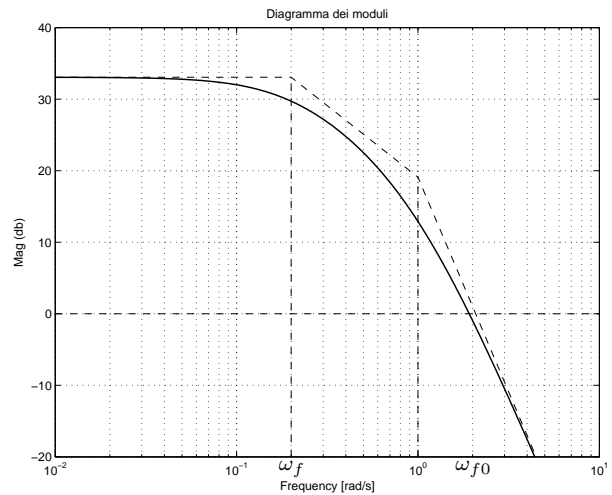
$$e(\infty) = \frac{R_0}{K_a} = \frac{4}{3}$$

2. Fornire una stima della larghezza di banda  $\omega_f$  e del tempo di salita  $t_r$  del sistema  $G_1(s)$  di cui a fianco è riportato il diagramma di Bode dei moduli:

$$\omega_f \simeq 0.2 \quad t_r \simeq \frac{1}{\omega_f} = 5 \text{ s}$$

Fornire inoltre una stima della larghezza di banda  $\omega_{f0}$  e del tempo di salita  $t_{r0}$  del corrispondente sistema retroazionato:

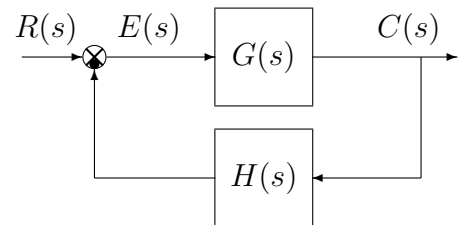
$$\omega_{f0} \simeq 2 \quad t_{r0} \simeq \frac{1}{\omega_{f0}} = 0.5 \text{ s}$$



3. Nel metodo di discretizzazione per “corrispondenza poli/zeri” applicato alla funzione  $D(s)$ , la compensazione del guadagno  $k$  alle alte frequenze prevede l'utilizzo della relazione

- $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{z \rightarrow -1} G(z)$         $\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$   
  $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{z \rightarrow \infty} G(z)$         $\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{z \rightarrow -1} G(z)$

4. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere il legame che lega la variazione relativa del sistema  $G(s)$  alla variazione relativa del sistema retroazionato  $G_0(s)$  quando varia un parametro  $\alpha$  interno alla funzione di trasferimento  $G(s)$ :



$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

5. Calcolare la funzione  $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$  corrispondente alla seguente equazione alle differenze:

$$y_k = 2y_{k-1} - 3y_{k-2} + 4x_k + 7x_{k-1} \quad \rightarrow \quad G(z) = \frac{4 + 7z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}}$$

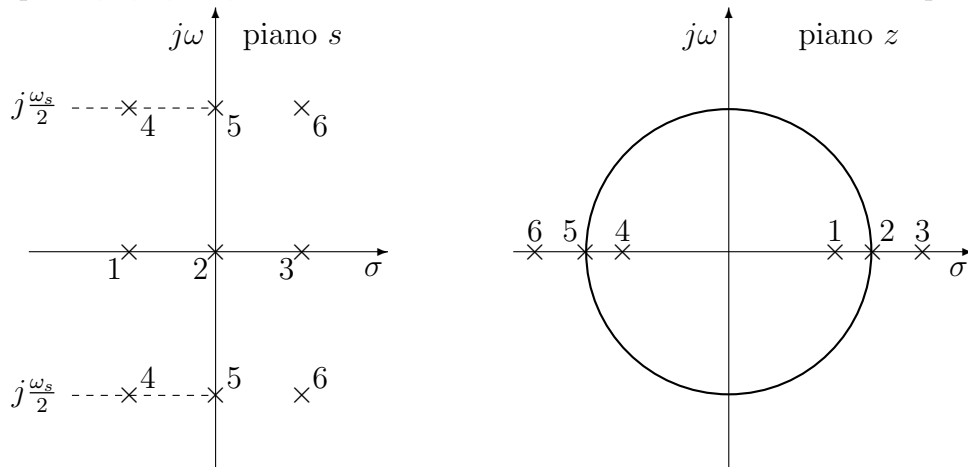
6. Il sistema dinamico discreto  $G(z) = \frac{1}{z^2(z^2-1)}$

- è asintoticamente stabile       è semplicemente stabile       è instabile

7. Calcolare l'evoluzione libera  $y(n)$  della seguente equazione alle differenze, essendo  $y(0) = 3$ :

$$y(n+1) + 0.5y(n) = 0 \quad \rightarrow \quad y(n) = 3(-0.5)^n$$

8. In base al legame teorico a tra il piano  $s$  e il piano  $z$ , tracciare qualitativamente sul piano  $z$  le posizioni dei poli 1, 2, 3, ..., 6 che sono stati evidenziati con delle crocette sul piano  $s$ :



9. Per poter applicare il criterio del cerchio, la caratteristica non lineare  $y(x)$  deve:

- passare per l'origine                       essere ad un sol valore  
 essere contenuta nel I e III quadrante       essere simmetrica rispetto all'origine

10. Tipicamente, quali delle seguenti reti correttive è bene utilizzare se si vuole stabilizzare in retroazione un sistema caratterizzato da un margine di fase fortemente negativo?

- una rete anticipatrice;                       un regolatore PD;  
 una rete ritardatrice;                       un regolatore PI;

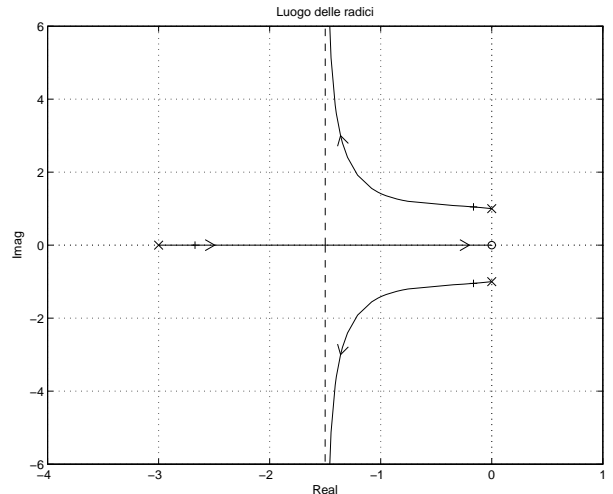
11. A fianco è riportato il luogo delle radici del sistema  $G(s) = \frac{s}{(s+3)(s^2+1)}$  al variare del parametro  $K > 0$ . Calcolare:

1) L'ascissa  $\sigma_0$  corrispondente alla condizione di allineamento dei tre poli:

$$\sigma_0 = -1$$

2) Il valore  $K^*$  corrispondente alla condizione di allineamento dei tre poli:

$$K^* = 4$$



12. Calcolare la  $\mathcal{Z}$ -trasformata  $X(z)$  dei seguenti segnali tempo continui  $x(t)$  quando  $t = kT$ :

$$x(t) = 3^{-t} \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{z}{(z - 3^{-T})} \quad x(t) = 2t \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{2Tz}{(z - 1)^2}$$

13. Il valore a regime  $x(\infty)$  della sequenza  $x(k)$  corrispondente alla funzione  $X(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z-0.5)}$  è:

- $x(\infty) = 0$                         $x(\infty) = 1$                         $x(\infty) = 2$                         $x(\infty) = 4$

14. Sia  $X(z) = \mathcal{Z}[x(k)]$ . Enunciare il teorema della traslazione "in anticipo" nel tempo:

$$\mathcal{Z}[x(t + nT)] = z^n [X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}]$$