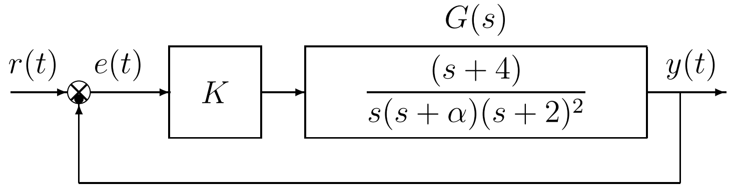
Nr.

Controlli Automatici B - INFO
9 gennaio 2026 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



a.1) Posto $\alpha = 1$, tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per $K > 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Sol. Posto $\alpha = 1$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1\, G(s) = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + \frac{K\,(s+4)}{s(s+1)(s+2)^2} = 0$$

dove $K_1 = K$. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G(s)$ per $K > 0$ é mostrato in Fig. 1. Il luogo delle radici ha tre asintoti. Il centro degli asintoti è:

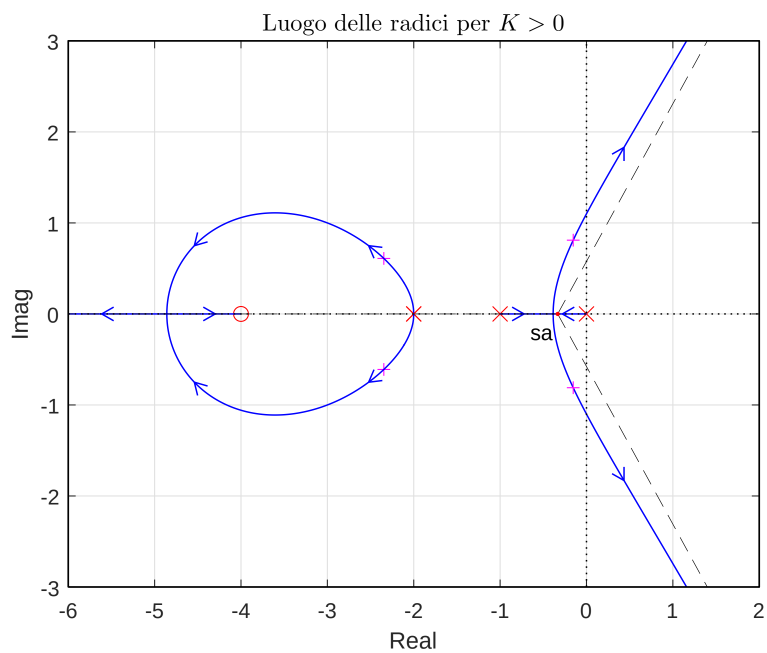


Figura 1: Luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$.

$$\sigma_a = \frac{1}{3}\,(-1-2-2+4) = -\frac{1}{3} = -0.333.$$

a.2) Posto $K = 81$, tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\alpha > 0$. Nella graficazione si tenga conto che: a) la posizione dei poli del sistema retroazionato quando $K = 81$ e $\alpha = 0$ è la seguente: $p_{1,1} \simeq -4 \pm 1.12\,j$, $p_{3,4} \simeq 2 \pm 3.84\,j$. Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Soluzione. Posto $K = 81$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente:

$$s(s+\alpha)(s+2)^2 + 81\,(s+4) = 0 \qquad \rightarrow \qquad 1 + \frac{\alpha\, s(s+2)^2}{s^2(s+2)^2 + \,81\,(s+4)} = 0$$

I poli della funzione $G_2(s)$ sono quelli indicati nel testo dell'esercizio:

$$1+\frac{\alpha\, s(s+2)^2}{((s+4)^2+1.12^2)((s-2)^2+3.84^2)}=0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1+\alpha\, G_2(s)=0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\alpha>0$ è mostrato in Fig. 2. Il contorno delle

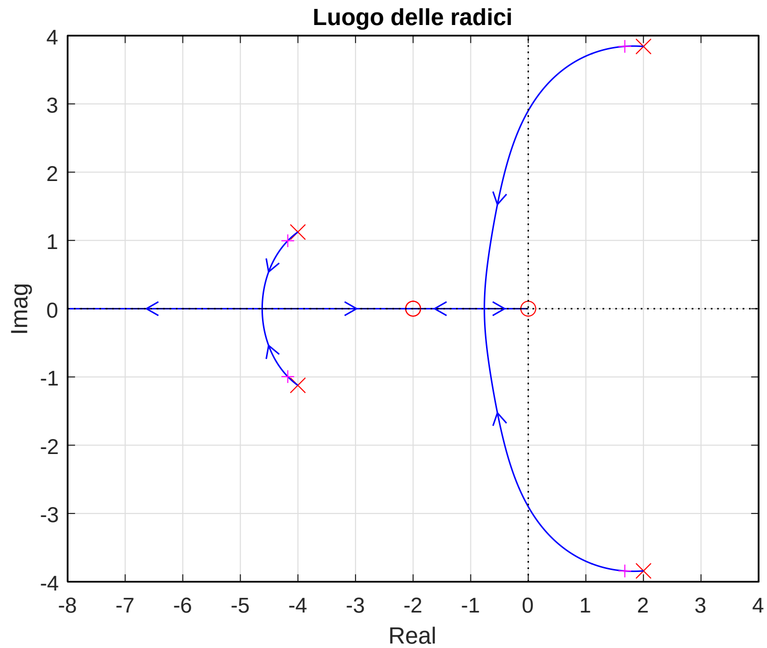


Figura 2: Contorno delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare del parametro $\tau>0$.

radici ha un solo asintoto coincidente con il semiasse reale negativo.

a.3) Sia data la seguente funzione di trasferimento che descrive la dinamica di un sistema fisico al variare di un parametro β:

$$G(s)=\frac{(s+3)}{s^3+13\,s^2+(42+\beta)\,s+5\,\beta}$$

Utilizzando la metodologia del contorno delle radici mostrare come si spostano sul piano complesso i poli della funzione $G(s)$ al variare del parametro $\beta>0$. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Sol. I poli della funzione $G(s)$ sono le soluzioni della seguente equazione:

$$s^3+13\,s^2+(42+\beta)\,s+5\,\beta=0$$

che puó essere riscritta nel seguente modo $1+\beta\, G_1(s)=0$:

$$s(s^2+13\,s+42)+\beta\,(s+5)=0 \qquad \rightarrow \qquad 1+\beta\,\frac{(s+5)}{s(s^2+13\,s+42)}=0$$

Mettendo in evidenza i poli e gli zeri della funzione $G_1(s)$ si ottiene:

$$1+\beta\,\frac{(s+5)}{s(s+6)(s+7)}=0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\beta>0$ è mostrato in Fig. 3.

Nel contorno delle radici sono presenti due asintoti verticali. Il centro degli asintoti σ_a è il seguente:

$$\sigma_a=\frac{1}{2}\,(-6-7+5)=-4$$

b) Sia dato il seguente sistema retroazionato:

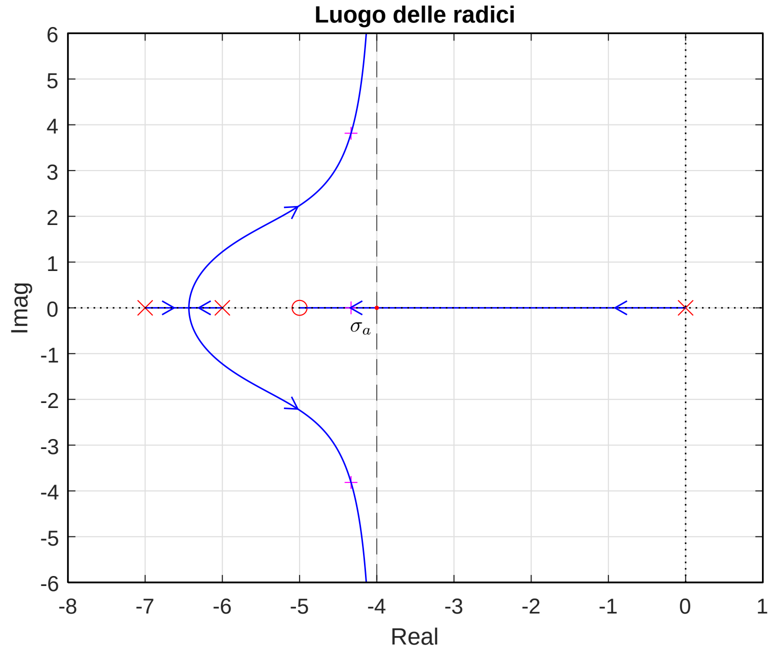
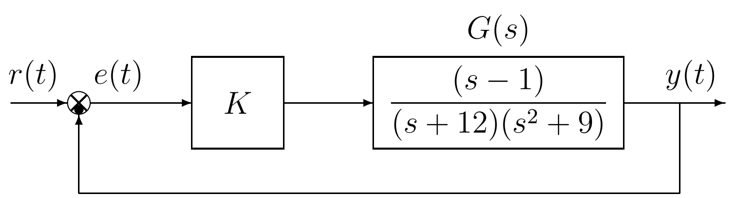


Figura 3: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare del parametro $m > 0$.



b.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare per quale valore di K il sistema retroazionato è stabile. Determinare per quale valore K_0 il sistema retroazionato presenta il minimo tempo di assestamento alla risposta al gradino.

Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K\frac{(s-1)}{(s+12)(s^2+9)} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 + K_1\, G(s) = 0$$

dove $K_1 = K$. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$ è mostrato in Fig. 4. La stabilità del sistema retroazionato si determina utilizzando il criterio di Routh:

$$1 + K\, G(s) = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 12\, s^2 + (K+9)s + 108 - K = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & K+9 \\ 2 & 12 & 108-K \\ 1 & 12(K+9) - 108 + K & \\ 0 & 108-K & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ottiene:

$$K > 0, \qquad K < 108$$

il sistema retroazionato è stabile per:

$$0 < K < K^* = 108$$

Il luogo delle radici ha due asintoti verticali. La posizione σ_a del centro degli asintoti è:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-12 - 1) = -6.5.$$

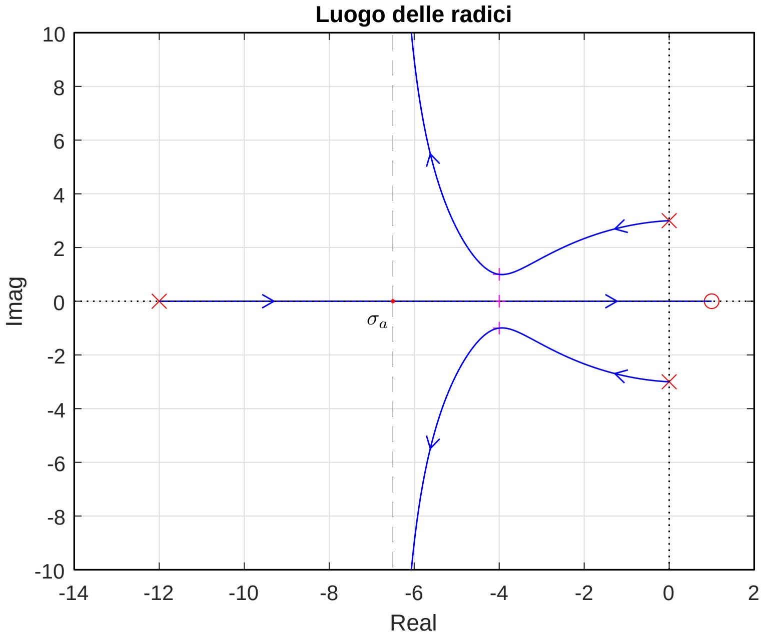


Figura 4: Luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$.

Il sistema retroazionato presenta il minimo tempo di assestamento alla risposta al gradino quando è massima la distanza dei poli della $G(s)$ dall'asse immaginario. Tale distanza è massima quando i poli sono allineati. In questo caso l'ascissa σ_0 della condizione di allineamento può essere calcolata utilizzando il teorema del baricentro:

$$3\,\sigma_0 = \sum_{i=1}^{3} p_i = -12 \qquad \rightarrow \qquad \sigma_0 = -\frac{12}{3} = -4$$

Il valore K_0 a cui corrisponde minimo tempo di assestamento é il seguente:

$$K_0 = -\left.\frac{1}{G_1(s)}\right|_{s=\sigma_0} = 40$$

b.2) Sia data la seguente funzione di trasferimento $G_3(s)$:

$$G_3(s) = \frac{s+2}{\alpha s^2 + (\alpha+1)s + 2}$$

Mostrare graficamente come si muovono sul piano complesso i poli della funzione di trasferimento $G_3(s)$ al variare del parametro $\alpha > 0$. Calcolare il valore α^* a cui corrisponde il minimo tempo di assestamento del sistema $G_3(s)$ alla risposta al gradino.

Soluzione. I poli della funzione di trasferimento $G_3(s)$ coincidono con le radici del polinomio a denominatore:

$$\alpha s^2 + (\alpha+1)s + 2 = 0$$

che può essere riscritta nel seguente modo equivalente:

$$s + 2 + \alpha s(s+1) = 0 \qquad \rightarrow \qquad 1 + \alpha\,\frac{s(s+1)}{(s+2)} = 0 \rightarrow \qquad 1 + \alpha\, G_4(s) = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\alpha > 0$ è mostrato in Fig. 5. In questo caso il contorno delle radici si muove lungo una circonferenza centrata in $p = -2$. Il raggio $\bar{R}$ della circonferenza è il seguente:

$$\bar{R} = \sqrt{d_1 \cdot d_2} = \sqrt{1 \cdot 2} = \sqrt{2} = 1.4142$$

I punti di diramazione σ_1 e σ_2 del contorno delle radici sono:

$$\sigma_1 = -2 - 1.4142 = -3.4142, \qquad\qquad \sigma_2 = -2 + 1.4142 = -0.5858,$$

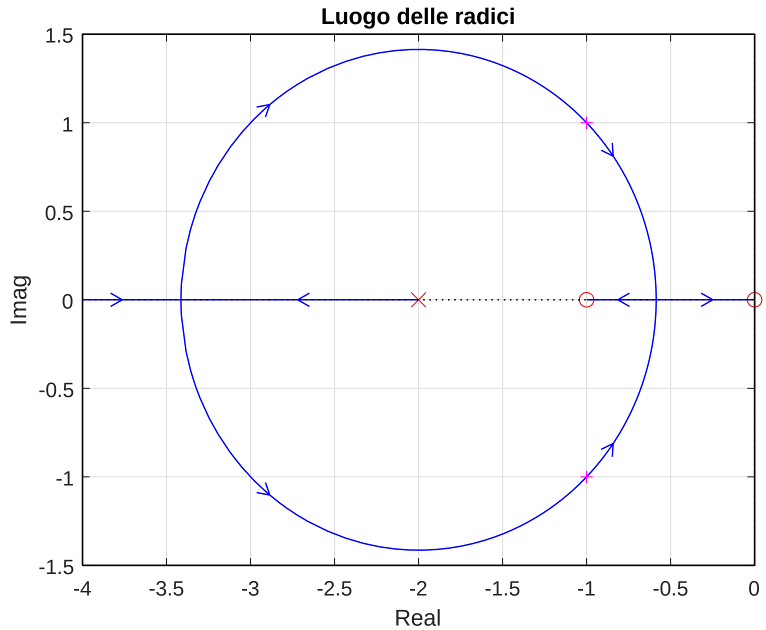


Figura 5: Contorno delle radici del sistema $G_4(s)$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

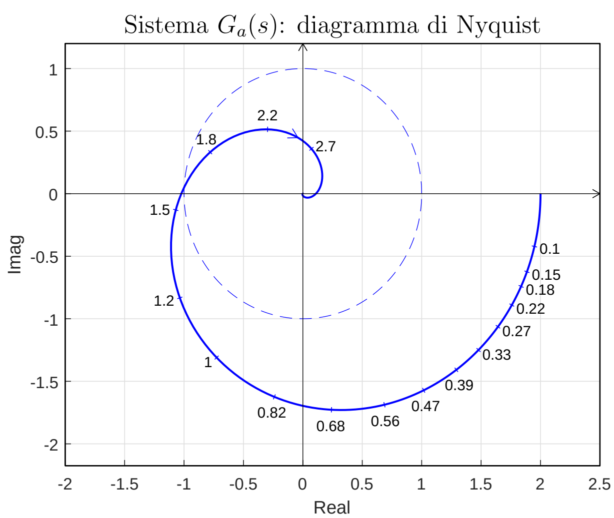
È possibile giungere allo stesso risultato nel seguente modo:

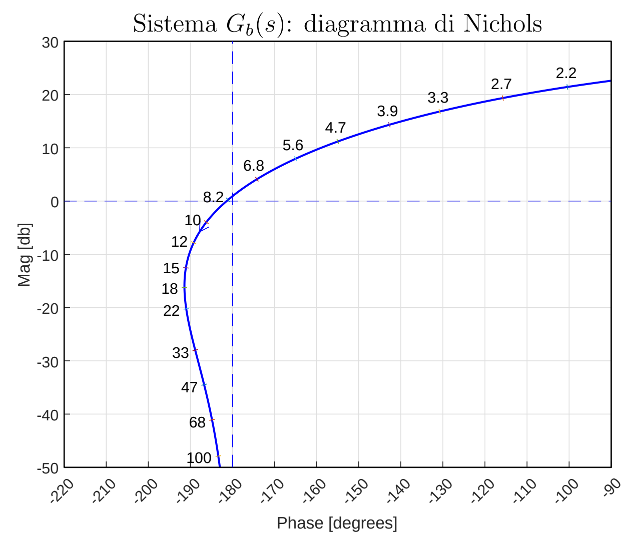
$$\frac{dG_4(s)}{ds} = 0 \quad \rightarrow \quad (2s+1)(s+2) - s(s+1) = s^2 + 4s + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}.$$

La condizione di minimo tempo di assestamento di ha in corrispondenza del punto di diramazione $\sigma_1 = -3.4142$ e quindi per il seguente valore del parametro α^*:

$$\alpha^* = -\left.\frac{1}{G_4(s)}\right|_{s=\sigma_1} = -\left.\frac{(s+2)}{s(s+1)}\right|_{s=-3.4142} = 0.1716.$$

c) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi $G_a(s)$ e $G_b(s)$:





c.1) Per il sistema $G_a(s)$, progettare una rete correttrice $C(s)$ in grado di garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_a = 10$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. La specifica sul margine di ampiezza $M_a = 10$ definisce completamente la posizione del punto $B = M_B\, e^{j\varphi_B}$:

$$M_B = \frac{1}{M_a} = 0.1, \qquad \varphi_B = -180^\circ$$

La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 6.

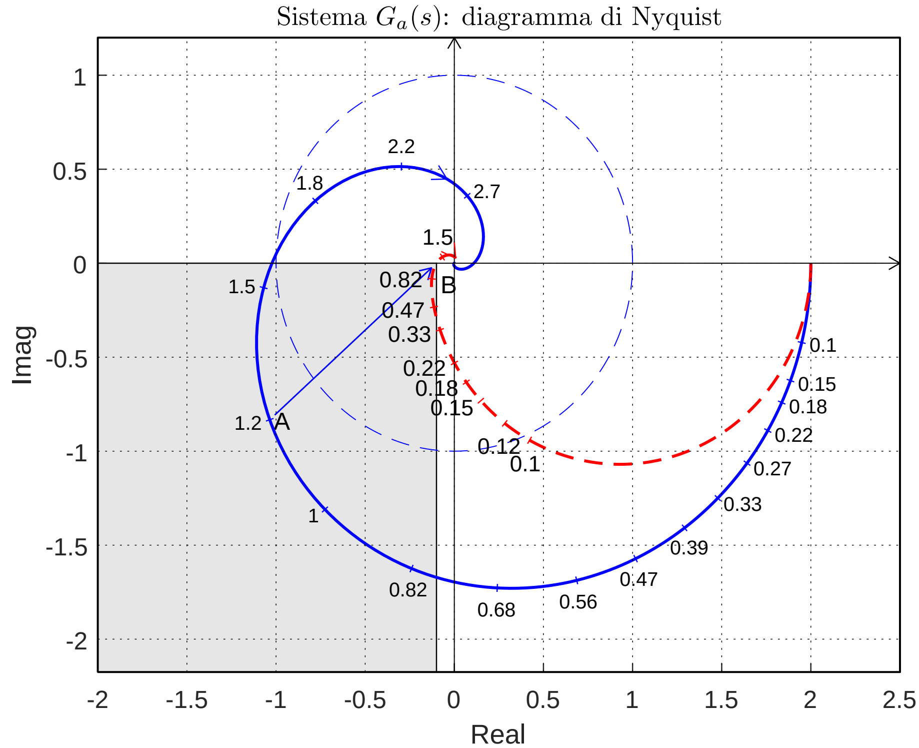


Figura 6: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)\,G_a(s)$.

Il punto $A = G_b(j\omega_A)$ scelto per la sintesi della rete correttrice è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 1.2$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 1.33, \qquad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -141.2°.$$

Sostituendo i valori di M, φ e $\omega = \omega_A$ all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 0.936$ e $\tau_2 = 16.63$ della rete correttrice $C_1(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.0753, \qquad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -38.8° \qquad \rightarrow \qquad C_1(s) = \frac{(1 + 0.936\,s)}{(1 + 16.63\,s)}.$$

Il diagramma di Myquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 6.
Sintesi della rete correttrice $C_1(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A:

$$\begin{array}{rl}
\omega_A = & [\; 0.82 \quad 1 \quad 1.2 \quad 1.5 \;] \\
M_A = & [\; 1.642 \quad 1.498 \quad 1.329 \quad 1.077 \;] \\
\varphi_A = & [\; -98.4 \quad -119 \quad -141.2 \quad -173.1 \;] \\
M = & [\; 0.0609 \quad 0.0667 \quad 0.0752 \quad 0.0928 \;] \\
\varphi = & [\; -81.6 \quad -61.02 \quad -38.81 \quad -6.943 \;] \\
\tau_1 = & [\; 0.1051 \quad 0.4775 \quad 0.936 \quad 4.963 \;] \\
\tau_2 = & [\; 20.06 \quad 16.57 \quad 16.63 \quad 53.94 \;]
\end{array}$$

c.2) Per il sistema $G_b(s)$ progettare una rete anticipatrice in grado di garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = 60°$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. Soluzione. La posizione del punto B è completamente determinata dalla specifica di progetto $B = M_B\, e^{j\varphi_B}$: $M_B = 0$ db $= 1$ e $\varphi_B = -120°$. La regione di ammissibilitá è mostrata in grigio in Fig. 7. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 22$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = -20.24 \text{ db} = 0.0973, \qquad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -191°.$$

Sostituendo i valori di M, φ e ω all'interno delle formule di inversione:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi}, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin\varphi}$$

si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 0.4784$ e $\tau_2 = 0.01098$ della rete correttrice $C_1(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 10.28, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 70.99^\circ \qquad \rightarrow \qquad C_1(s) = \frac{(1 + 0.4784\, s)}{(1 + 0.01098\, s)}.$$

Sintesi della rete correttrice $C_1(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A:

$$\begin{array}{r@{\,=\,}l}
\omega_A & [\begin{array}{rrrrrrr} 15 & 18 & 22 & 33 & 47 & 68 & 100 \end{array}] \\
M_A & [\begin{array}{rrrrrrr} 0.2371 & 0.1542 & 0.0973 & 0.0398 & 0.0188 & 0.0088 & 0.0040 \end{array}] \\
\varphi_A & [\begin{array}{rrrrrrr} 168.9 & 168.6 & 169 & 171.1 & 173.3 & 175.1 & 176.6 \end{array}] \\
M & [\begin{array}{rrrrrrr} 4.218 & 6.484 & 10.28 & 25.09 & 52.93 & 113.2 & 247.6 \end{array}] \\
\varphi & [\begin{array}{rrrrrrr} 71.07 & 71.42 & 70.99 & 68.86 & 66.74 & 64.86 & 63.38 \end{array}] \\
\tau_1 & [\begin{array}{rrrrrrr} 0.2744 & 0.3613 & 0.4784 & 0.8035 & 1.217 & 1.832 & 2.764 \end{array}] \\
\tau_2 & [\begin{array}{rrrrrrr} 0.0061 & 0.0096 & 0.0109 & 0.0104 & 0.0087 & 0.0067 & 0.0049 \end{array}]
\end{array}$$

I diagrammi di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 7.

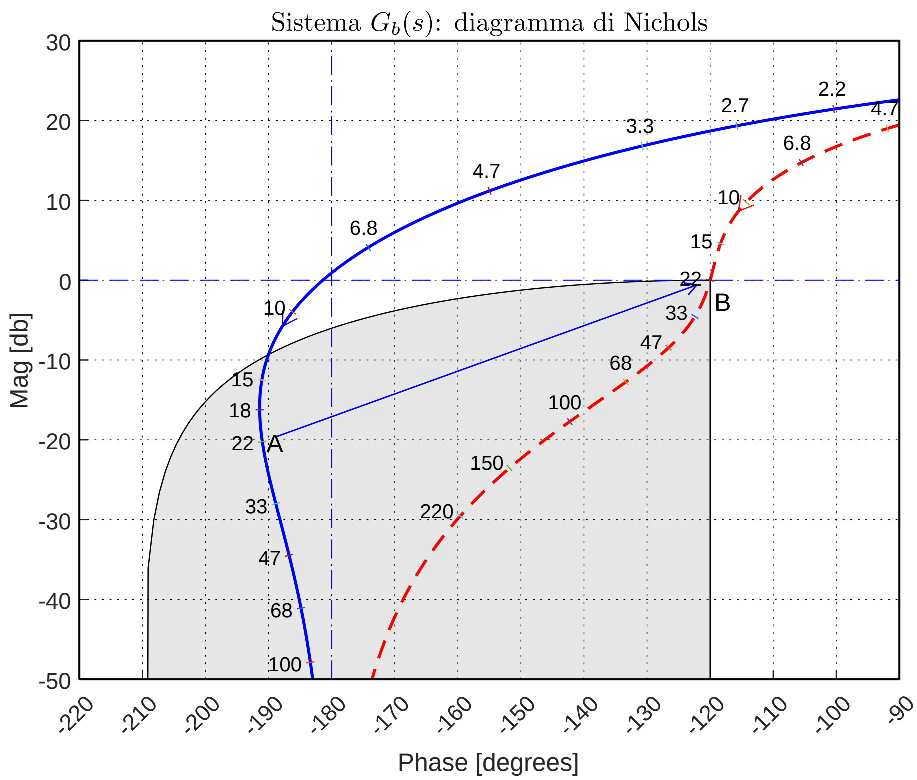


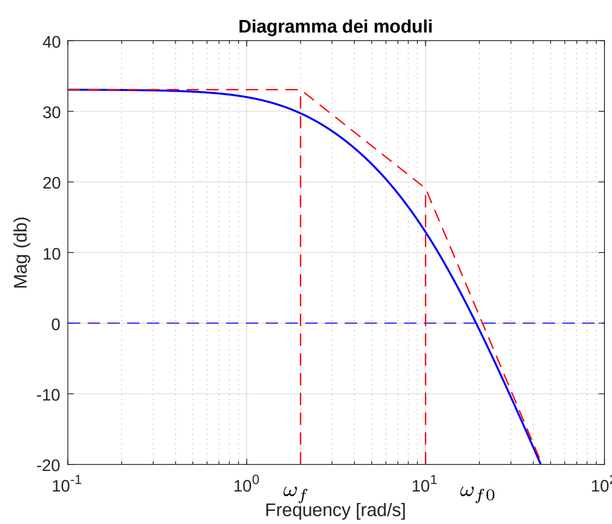
Figura 7: Diagrammi di Nichols delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)\,G_b(s)$.

d) Fornire una stima della larghezza di banda ω_f e del tempo di salita t_r del sistema $G_1(s)$ di cui a fianco è riportato il diagramma di Bode dei moduli:

$$\omega_f \simeq 2 \qquad\qquad t_r \simeq \frac{1}{\omega_f} = 0.5 \text{ s}$$

Fornire inoltre una stima della larghezza di banda ω_{f0} e del tempo di salita t_{r0} del corrispondente sistema retroazionato:

$$\omega_{f0} \simeq 20 \qquad\qquad t_{r0} \simeq \frac{1}{\omega_{f0}} = 0.05 \text{ s}$$



e) Partendo dalla condizione iniziale nulla $y(0) = 0$, calcolare la risposta $y(n)$ del seguente sistema dinamico discreto:

$$y(n+1) = 0.5\, y(n) + 3\, x(n)$$

quando in ingresso è presente il gradino unitario $x(n) = 1$.

Sol. Applicando la $\mathcal{Z}$-trasformata alla precedente equazione alle differenze si ottiene:

$$z\,Y(z) = 0.5\,Y(z) + 3\,X(z)$$

Esprimendo $Y(z)$ in funzione di $X(z)$ si ottiene:

$$Y(z) = \frac{3}{z-0.5}\,X(z) = \frac{3\,z}{(z-0.5)(z-1)}$$

Scomponendo in fratti semplici si ottiene:

$$Y(z) = z\left[\frac{6}{z-1} - \frac{6}{z-0.5}\right] = \left[\frac{6\,z}{z-1} - \frac{6\,z}{z-0.5}\right]$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(n) = 6 - 6\,(0.5)^n.$$

f) Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare, discretizzare il seguente sistema tempo-continuo:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s+3)}{(s+1)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

Soluzione. Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare si ottiene:

$$D(z) = \left.\frac{(s+3)}{(s+1)}\right|_{s=\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}} = \frac{3T+2+(3T-2)\,z^{-1}}{T+2+(T-2)\,z^{-1}}$$

Sostituendo $T = 0.1$ si ottiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{2.3-1.7\,z^{-1}}{2.1-1.9\,z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze ha la forma seguente:

$$m_k = \frac{1}{2.1}\left[1.9\,m_{k-1} + 2.3\,e_k - 1.7\,e_{k-1}\right]$$

cioè:

$$m_k = 0.90476\,m_{k-1} + 1.0952\,e_k - 0.80952\,e_{k-1}$$

Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

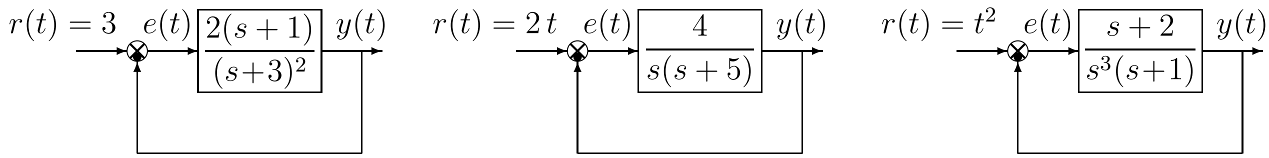
Controlli Automatici B - INFO
9 gennaio 2026 - Domande Teoriche

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono corrette.

1. Scrivere la funzione di trasferimento discreta $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ corrispondente alla seguente equazione alle differenze:

$$3\,y_{k+2} + 4\,y_{k+1} + 6\,y_k + 5\,y_{k-1} = x_k + 2\,x_{k-1} \qquad \rightarrow \qquad G(z) = \frac{1 + 2\,z^{-1}}{3\,z^2 + 4\,z + 6\,z + 5\,z^{-1}}$$

2. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:

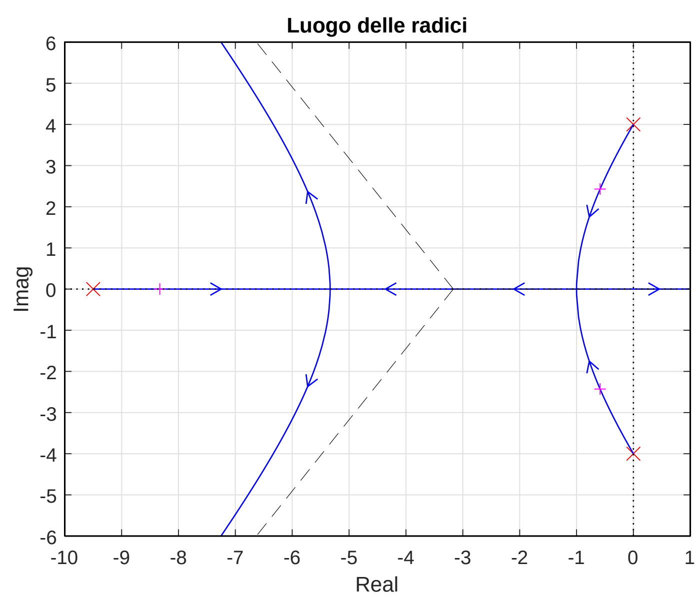


$$e(\infty) = \frac{3}{1+\frac{2}{9}} = \frac{27}{11} = 2.454 \qquad e(\infty) = \frac{2}{\frac{4}{5}} = \frac{10}{4} = 2.5 \qquad e(\infty) = 0$$

3. Calcolare la $\mathcal{Z}$-trasformata $X(z)$ dei seguenti segnali $x(t)$ quando $t = k\,T$, $a > 0$ e $b > 0$:

$$x(t) = 2\,t \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{2\,T\,z}{(z-1)^2} \qquad\qquad x(t) = 2\,a^{-3\,t} \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{2\,z}{(z - a^{-3\,T})}$$

4. A fianco è riportato il luogo delle radici del sistema $G(s) = \frac{-100}{(s+9.5)(s^2+16)}$ al variare del parametro $K > 0$. Calcolare:



4.1) La posizione σ_0 dei due poli dominanti nella condizione di minimo tempo di assestamento:

$$\sigma_0 = -1$$

4.2) Il valore K_0 corrispondente alla condizione di minimo tempo di assestamento:

$$K_0 = -\frac{1}{G(s)}\bigg|_{s=-1} = \frac{8.5 \cdot 17}{100} = 1.445$$

4.3) Per quali valori di K il sistema retroazionato è stabile:

$$0 < K < K^* = -\frac{1}{G(s)}\bigg|_{s=0} = \frac{38}{25} = 1.52$$

5. Il valore iniziale $x(0)$ della sequenza $x(k)$ corrispondente alla funzione $X(z) = \frac{z(2\,z+1)}{(z-1)(z-0.5)}$ è:

○ $x(0) = 0$ ○ $x(0) = 1$ ⊗ $x(0) = 2$ ○ $x(0) = 6$

6. Il valore a regime $x(\infty)$ della sequenza $x(k)$ corrispondente alla funzione $X(z) = \frac{z(2\,z+1)}{(z-1)(z-0.5)}$ è:

○ $x(\infty) = 0$ ○ $x(\infty) = 1$ ○ $x(\infty) = 2$ ⊗ $x(\infty) = 6$

7. Scrivere la funzione di trasferimento $H_0(s)$ del ricostruttore di ordine zero:

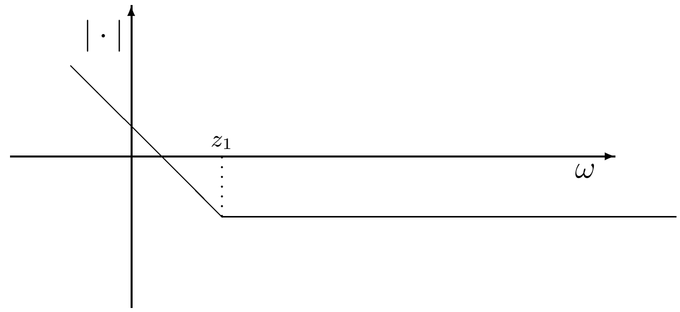
$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

8. Si scelgano quelle corrette fra le seguenti affermazioni riguardanti le regioni di ammissibilità nel progetto di reti correttrici:

   ⊗ contengono un numero infinito di punti
   ⊗ il loro tracciamento dipende dalla specifica fornita in termini di margine di fase o di ampiezza
   ○ sono tracciabili sui diagrammi di Nyquist, di Nichols e di Bode
   ○ il loro tracciamento dipende dal guadagno ad anello aperto

9. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un regolatore standard PI e a fianco disegnare qualitativamente il corrispondente diagramma di Bode dei moduli:

$$G(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$



10. Si scelgano quelle corrette fra le seguenti affermazioni per un sistema del primo ordine in catena aperta:

   ○ la larghezza di banda è direttamente proporzionale alla costante di tempo
   ⊗ la larghezza di banda è inversamente proporzionale alla costante di tempo
   ○ la larghezza di banda è direttamente proporzionale al tempo di salita
   ⊗ la larghezza di banda è inversamente proporzionale al tempo di salita

11. Calcolare la soluzione $y(n)$ della seguente equazione alle differenze a partire dalla condizione iniziale $y(0) = y_0$:

$$2\,y(n+1) + 0.6\,y(n) = 0 \qquad \rightarrow \qquad y(n) = y_0\,(-0.3)^n.$$

12. Come si determina la funzione di risposta armonica $F(\omega)$ di un sistema discreto $G(z)$?

   ○ $F(\omega) = G(e^{j\omega})$ ○ $F(\omega) = G(j\omega)$ ○ $F(\omega) = G(j\omega T)$ ⊗ $F(\omega) = G(e^{j\omega T})$

13. Sia $1 + KG(s) = 0$ l'equazione caratteristica di un sistema retroazionato. Il numero di asintoti presenti nel luogo delle radici al variare di K:

   ⊗ coincide con il grado relativo di $G(s)$ ○ coincide con il numero di zeri di $G(s)$
   ○ coincide con il numero di poli di $G(s)$ ○ coincide con il tipo di $G(s)$

14. Si consideri il sistema retroazionato riportato nella figura a fianco. Si scelgano quelle corrette fra le seguenti affermazioni:

   ○ il sistema retroazionato è robusto alle variazioni del parametro β se il guadagno d'anello è in modulo molto grande
   ⊗ il sistema retroazionato è robusto alle variazioni del parametro α se il guadagno d'anello è in modulo molto grande
   ○ il sistema retroazionato è robusto alle variazioni del parametro β se il guadagno d'anello è in modulo molto piccolo
   ○ il sistema retroazionato è robusto alle variazioni del parametro α se il guadagno d'anello è in modulo molto piccolo