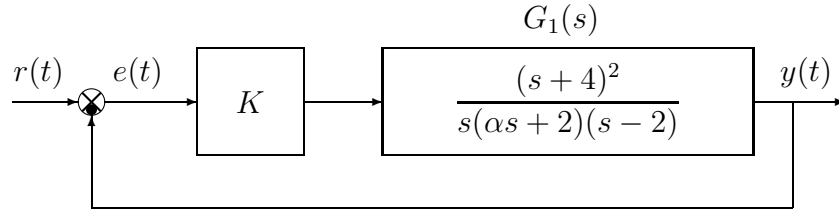


Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



a.1) Posto $\alpha = 1$, tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Determinare inoltre la posizione degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K^* . Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Soluzione. Posto $\alpha = 1$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1 G_1(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + K \frac{(s+4)^2}{s(s+2)(s-2)} = 0$$

L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare di $K > 0$ è mostrato in Fig. 1. Il luogo delle radici è caratterizzato da un solo asintoto coincidente con

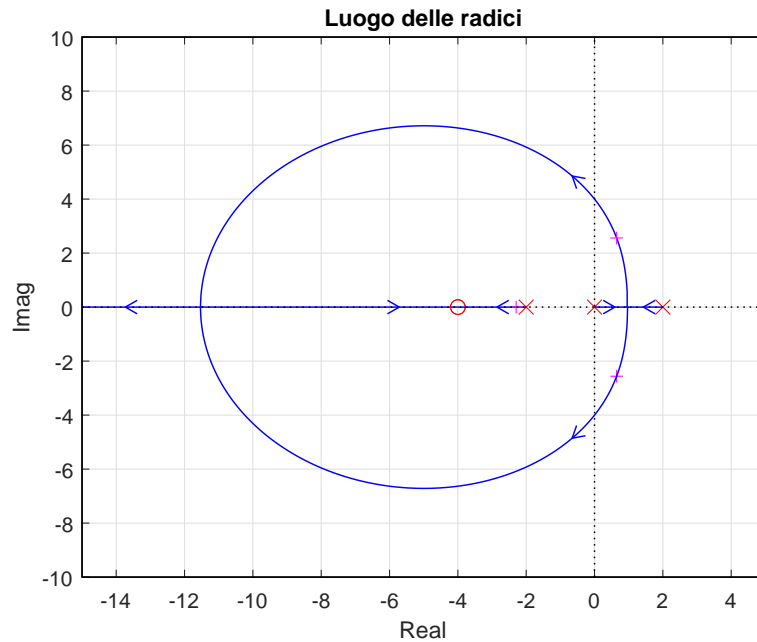


Figura 1: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare di $K > 0$.

il semiasse reale negativo. Le intersezioni con l'asse immaginario si determinano utilizzando il criterio di Routh. Equazione caratteristica:

$$1 + K \frac{(s+4)^2}{s(s+2)(s-2)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + Ks^2 + (8K-4)s + 16K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & (8K-4) \\ 2 & K & 16K \\ 1 & K(8K-4) - 16K & \\ 0 & 16K & \end{array}$$

Dalla tabella si ricavano i seguenti vincoli:

$$(8K - 20)K > 0, \quad K > 0$$

dai quali si ottiene che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > \frac{5}{2} = 2.5 = K^*.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{14} = 4.$$

a.2) Posto $K = 8$ nel sistema retroazionato sopra definito, tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\alpha > 0$. Nella graficazione del contorno delle radici si tenga conto che nei punti $p_1 \simeq -5.48$ e $p_2 \simeq -7.72$ sono presenti due punti di diramazione del contorno delle radici. Il calcolo di α^* non è necessario. Determinare la posizione degli altri punti di diramazione “solo in modo qualitativo”.

Sol. Posto $K = 8$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente:

$$1 + \frac{8(s+4)^2}{s(\alpha s+2)(s-2)} = 0 \quad \rightarrow \quad s(\alpha s+2)(s-2) + 8(s+4)^2 = 0$$

da cui si ricava l'equazione caratteristica $1 + \alpha G_2(s) = 0$:

$$2s(s-2) + 8(s+4)^2 + \alpha s^2(s-2) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{\alpha s^2(s-2)}{10(s^2+6s+12.8)} = 0$$

Mettendo in evidenza i poli della funzione $G_2(s)$ si ottiene:

$$1 + \alpha G_s(2) = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + \frac{\alpha s^2(s-2)}{10[(s+3)^2 + 1.949^2]} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\alpha > 0$ è mostrato in Fig. 2.

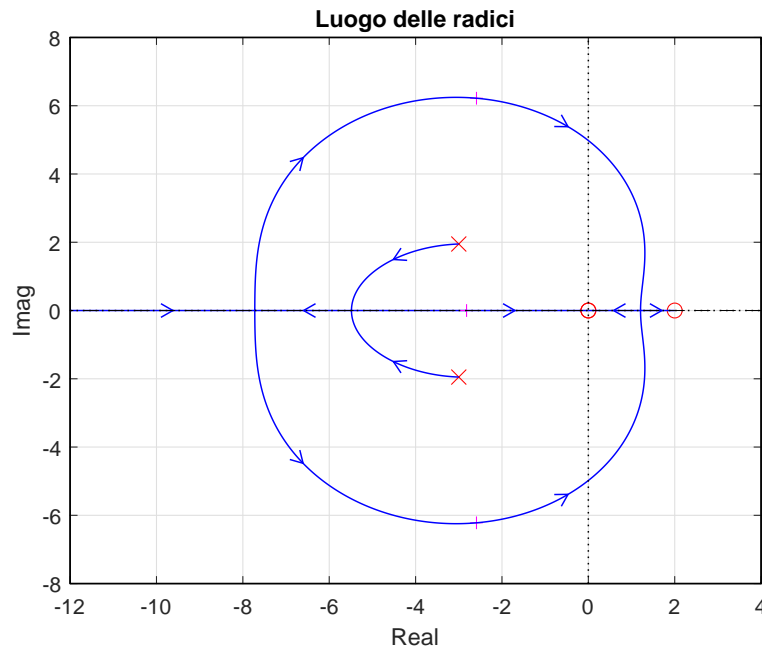
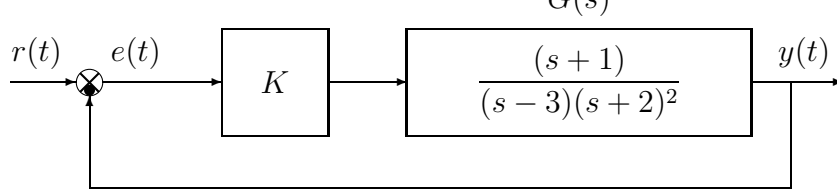


Figura 2: Contorno delle radici del sistema $G_2(s)$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

Il contorno delle radici ha un solo asintoto coincidente con il semiasse reale negativo e percorso dall'infinito al finito.

b) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



- b.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Determinare inoltre la posizione degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K^* . Determinare per quale valore di K il sistema retroazionato presenta il minimo tempo di assestamento.

Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K \frac{(s+1)}{(s-3)(s+2)^2} = 0$$

L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$ è mostrato in Fig. 3. Il luogo delle radici ha due asintoti verticali. La posizione σ_a

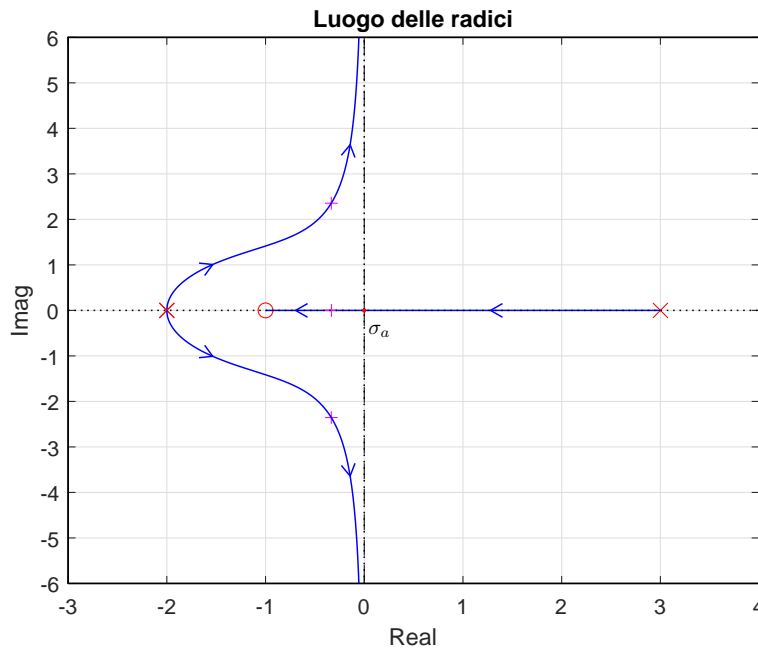


Figura 3: Luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$.

del centro degli asintoti è:

$$\sigma_a = \frac{1}{2} (-4 + 1 + 3) = 0.$$

Dal luogo delle radici risulta chiaro che il sistema retroazionato è stabile per:

$$K > K^* = -\frac{1}{G(s)} \Big|_{s=0} = 12$$

e che l'unica intersezione con l'asse immaginario si ha in corrispondenza della pulsazione: $\omega^* = 0$. Lo stesso risultato può essere ottenuto utilizzando il criterio di Routh:

$$1 + K \frac{(s+1)}{(s-3)(s+2)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + s^2 + (K-8)s + (K-12) = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & K-8 \\ 2 & 1 & K-12 \\ 1 & 4 & \\ 0 & K-12 & \end{array}$$

Dalla riga 0 si ottiene:

$$K - 12 > 0 \quad \rightarrow \quad K > 12 = K^*$$

Siccome K^* annulla la riga 0, la corrispondente pulsazione è $\omega^* = 0$. Il sistema retroazionato presenta il minimo tempo di assestamento alla risposta al gradino quando è massima la distanza dei poli della $G(s)$ dall'asse immaginario. In questo caso tale distanza è massima quando i poli sono allineati. L'ascissa σ_0 della condizione di allineamento può essere calcolata utilizzando il teorema del baricentro:

$$3\sigma_0 = \sum_{i=1}^3 p_i = -1 \quad \rightarrow \quad \sigma_0 = -\frac{1}{3} = -0.3333$$

Il valore K_0 a cui corrisponde minimo tempo di assestamento è il seguente:

$$K_0 = - \left. \frac{1}{G_1(s)} \right|_{s=\sigma_0} = 13.888.$$

b.2) Sia data la seguente funzione di trasferimento $G_3(s)$:

$$G_3(s) = \frac{s + 2}{s^2 + (\alpha + 2)s + 2\alpha + 1}$$

Mostrare graficamente come si muovono sul piano complesso i poli della funzione di trasferimento $G_3(s)$ al variare del parametro $\alpha > 0$. Calcolare il valore α^* a cui corrisponde il minimo tempo di assestamento del sistema $G_3(s)$ alla risposta al gradino.

Soluzione. I poli della funzione di trasferimento $G_3(s)$ coincidono con le radici del polinomio a denominatore:

$$s^2 + (\alpha + 2)s + 2\alpha + 1 = 0$$

che può essere riscritto nel seguente modo equivalente:

$$s^2 + 2s + 1 + \alpha(s + 2) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \alpha \frac{(s + 2)}{(s + 1)^2} = 0 \rightarrow \quad 1 + \alpha G_4(s) = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\alpha > 0$ è mostrato in Fig. 4. In questo caso

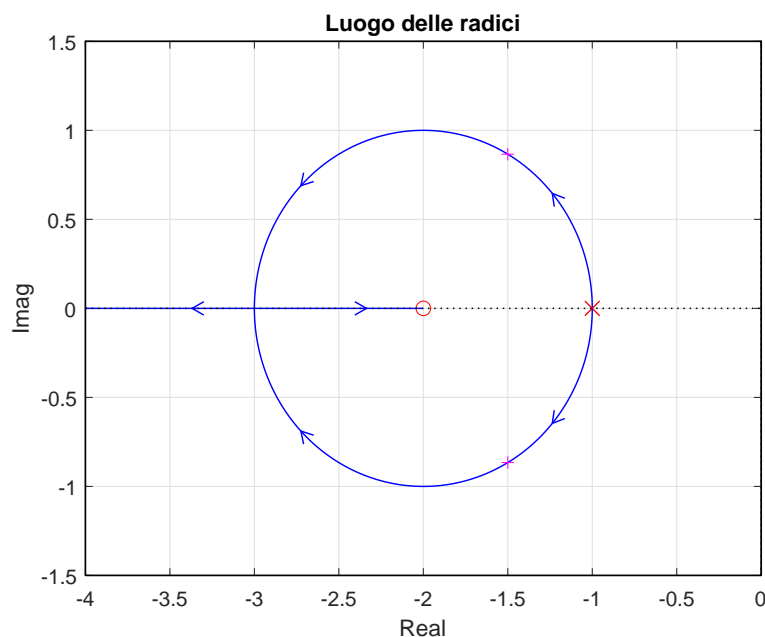


Figura 4: Contorno delle radici del sistema $G_4(s)$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

il contorno delle radici si muove lungo una circonferenza centrata in $z = -2$. Il raggio R della circonferenza è il seguente:

$$R = 1$$

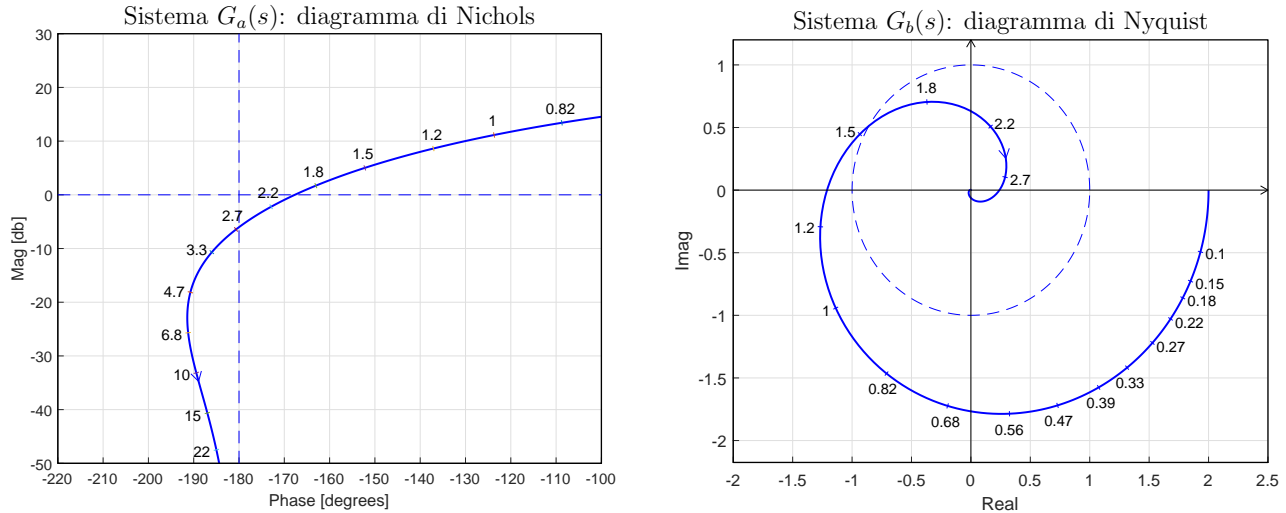
I punti di diramazione σ_1 e σ_2 del contorno delle radici sono:

$$\sigma_1 = -1, \quad \sigma_2 = -3.$$

La condizione di minimo tempo di assestamento di ha in corrispondenza del punto di diramazione $\sigma_1 = -1$ e quindi per il seguente valore del parametro α^* :

$$\alpha^* = - \left. \frac{1}{G_4(s)} \right|_{s=\sigma_2} = - \left. \frac{(s+1)^2}{(s+2)} \right|_{s=-3} = 4.$$

c) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi $G_a(s)$ e $G_b(s)$:



c.1) Per il sistema $G_a(s)$ progettare una rete anticipatrice in grado di garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = 50^\circ$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. La posizione del punto $B = M_B e^{j\varphi_B}$ è completamente determinata dalla specifica di progetto: $M_B = 1$ e $\varphi_B = -130^\circ$. La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 5. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione

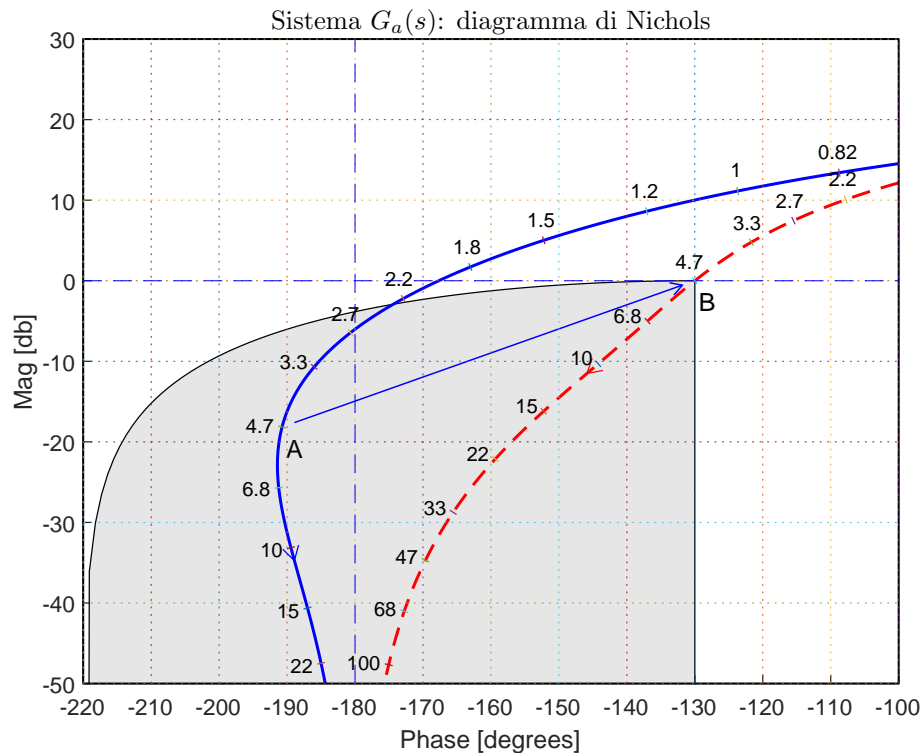


Figura 5: Diagrammi di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$.

$$\omega_A = 4.7:$$

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.1237, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -190.7^\circ.$$

Sostituendo i valori di M , φ e ω all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 1.852$ e $\tau_2 = 0.08905$ della rete correttiva $C_1(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 8.084, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 60.7^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 1.852 s)}{(1 + 0.08905 s)}.$$

Il diagramma di Nyquist delle funzioni $G_a(s) C_1(s) G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 5. Sintesi della rete correttiva $C_1(s)$ per alcuni valori della pulsazione ω_A :

$\omega_A =$	[2.7	3.3	4.7	6.8	10	15	22]
$M_A =$	[0.4761	0.2922	0.1237	0.0519	0.0220	0.0093	0.0042]
$\varphi_A =$	[179.3	174	169.3	168.8	170.6	173	175]
$M =$	[2.1	3.422	8.084	19.23	45.39	107.4	236.7]
$\varphi =$	[50.66	56	60.74	61.23	59.43	56.99	55]
$\tau_1 =$	[0.7022	1.046	1.852	3.146	5.213	8.498	13.1]
$\tau_2 =$	[0.0755	0.0975	0.0890	0.0720	0.0565	0.0425	0.0316]

c.2) Per il sistema $G_b(s)$, progettare una rete correttiva $C(s)$ in grado di garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_a = 5$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. La specifica sul margine di ampiezza $M_a = 5$ definisce completamente la posizione del punto $B = M_B e^{j\varphi_B}$:

$$M_B = \frac{1}{M_a} = 0.2, \quad \varphi_B = -180^\circ$$

La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 6.

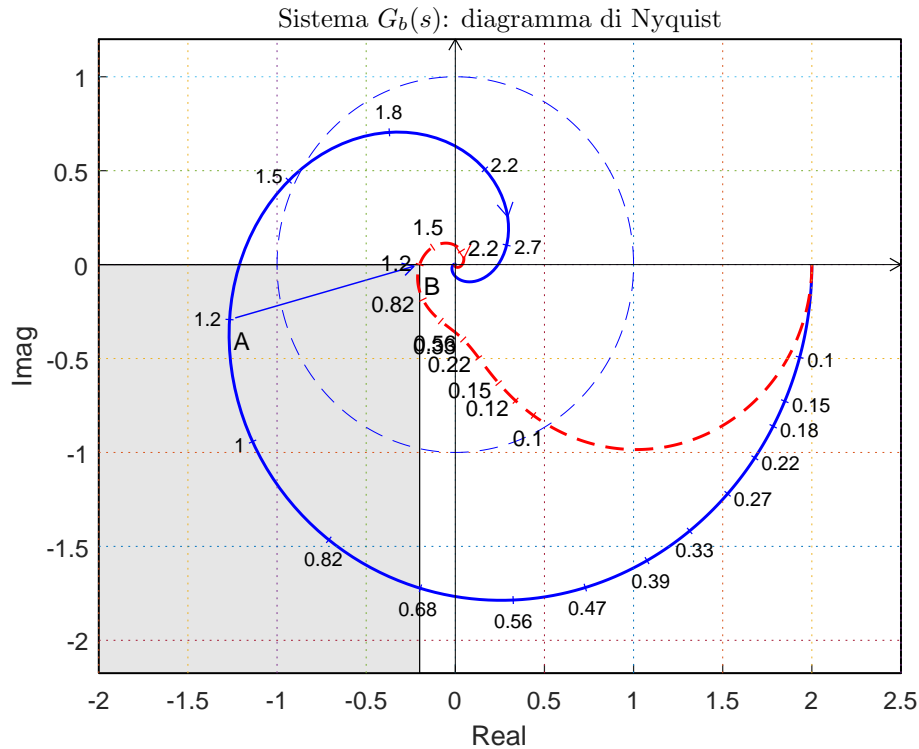


Figura 6: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s) G_b(s)$.

Il punto $A = G_b(j\omega_A)$ scelto per la sintesi della rete correttiva è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 1.2$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 1.3, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -167^\circ.$$

Sostituendo i valori di M , φ e $\omega = \omega_A$ all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 3.038$ e $\tau_2 = 20.46$ della rete correttiva $C_2(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.1539, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -13^\circ \quad \rightarrow \quad C_2(s) = \frac{(1 + 3.038 s)}{(1 + 20.46 s)}.$$

Il diagramma di Myquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 6. Sintesi della rete correttiva $C_2(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A :

$$\begin{aligned}\omega_A &= [0.82 \quad 1 \quad 1.2] \\ M_A &= [1.628 \quad 1.477 \quad 1.3] \\ \varphi_A &= [-115.9 \quad -140.4 \quad -167] \\ M &= [0.1229 \quad 0.1354 \quad 0.1539] \\ \varphi &= [-64.15 \quad -39.64 \quad -13.01] \\ \tau_1 &= [0.4244 \quad 0.9949 \quad 3.038] \\ \tau_2 &= [10.44 \quad 10.37 \quad 20.46]\end{aligned}$$

d) Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare, discretizzare il seguente sistema tempo-continuo:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s+2)}{(s+3)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.2$.

Soluzione. Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare si ottiene:

$$D(z) = \left. \frac{(s+2)}{(s+3)} \right|_{s=\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}} = \frac{2T+2+(2T-2)z^{-1}}{3T+2+(3T-2)z^{-1}}$$

Sostituendo $T = 0.2$ si ottiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{2.4 - 1.6 z^{-1}}{2.6 - 1.4 z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze ha la forma seguente:

$$m_k = \frac{1}{2.6} [1.4 m_{k-1} + 2.4 e_k - 1.6 e_{k-1}]$$

cioè:

$$m_k = 0.53846 m_{k-1} + 0.92308 e_k - 0.61538 e_{k-1}$$

e) Partendo da condizioni iniziali nulle, calcolare la risposta $y(n)$ della seguente equazione alle differenze:

$$y(n+1) = -0.6 y(n) + 7 x(n)$$

quando in ingresso è presente il gradino unitario $x(n) = 1$.

Soluzione. L'equazione alle differenze genera la seguente funzione discreta $G(z)$:

$$y(n+1) + 0.6 y(n) = 7 x(n) \quad \leftrightarrow \quad G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{7}{z+0.6}$$

La \mathcal{Z} -trasformata del segnale di ingresso $x(n) = 1$ è:

$$X(z) = z/(z-1).$$

La \mathcal{Z} -trasformata $Y(z)$ del segnale di uscita è quindi la seguente:

$$Y(z) = G(z)X(z) = \frac{7z}{(z+0.6)(z-1)}$$

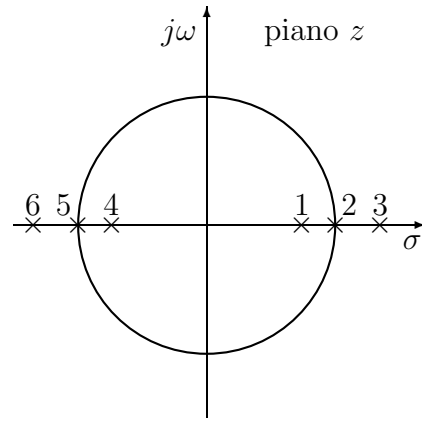
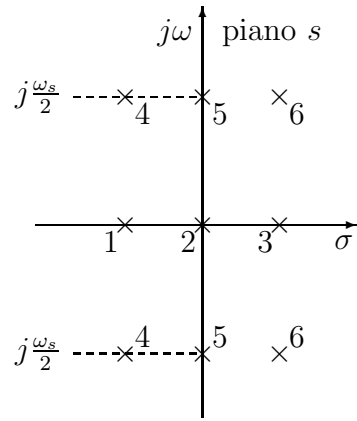
Mediante il metodo della scomposizione in fratti semplici si ricava:

$$Y(z) = z \left[\frac{7}{(z-1)(z+0.6)} \right] = z \left[\frac{4.375}{(z-1)} - \frac{4.375}{(z+0.6)} \right]$$

e quindi:

$$Y(z) = \frac{4.375 z}{(z-1)} - \frac{4.375 z}{(z+0.6)} \quad \rightarrow \quad y(n) = 4.375 [1 - (-0.6)^n].$$

f) In base al legame teorico a tra il piano s e il piano z , tracciare qualitativamente sul piano z le posizioni dei poli 1, 2, 3, ..., 6 che sono stati evidenziati con delle crocette sul piano s :



Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono corrette.

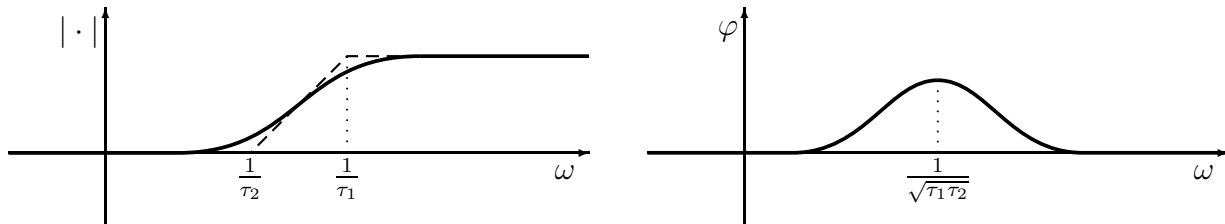
1. Scrivere la funzione di trasferimento discreta $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ corrispondente alla seguente equazione alle differenze:

$$y_{n+3} + 4y_{n+2} + 5y_{n+1} + 3y_n = 7x_{n+2} + 2x_{n+1} \quad \rightarrow \quad G(z) = \frac{7z^2 + 2z}{z^3 + 4z^2 + 5z + 3}$$

2. Sia $G(z)$ la \mathcal{Z} -trasformata della successione numerica $g(k)$. Scrivere gli enunciati dei teoremi del valore iniziale e del valore finale:

$$g(0) = g(k)|_{k=0} = \lim_{z \rightarrow \infty} G(z), \quad g(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})G(z).$$

3. Tracciare i diagrammi di bode (moduli e fasi) di una rete anticipatrice $C(s) = \frac{(1+\tau_1 s)}{(1+\tau_2 s)}$, ($\tau_1 > \tau_2$):



4. Fornire l'enunciato del Teorema del baricentro: *La somma dei poli del sistema ottenuto chiudendo in retroazione un sistema dinamico descritto da una funzione di trasferimento $G(s)$ razionale fratta con ...*

polinomio a denominatore di grado superiore di almeno due a quello del polinomio a numeratore è indipendente dal valore del guadagno statico di anello e dalle posizioni degli zeri ed è uguale alla somma dei poli del sistema ad anello aperto.

5. In un sistema discreto a segnali campionati, qual è il legame che lega la variabile discreta z e la variabile s di Laplace?

$$z = e^{sT}.$$

6. Scrivere la funzione di trasferimento $H_0(s)$ del ricostruttore di ordine 0:

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}.$$

7. Calcolare la soluzione $y(n)$ della seguente equazione alle differenze a partire dalla condizione iniziale $y(0) = y_0$:

$$y(n+1) + 0.4y(n) = 0 \quad \rightarrow \quad y(n) = y_0 (-0.4)^n.$$

8. Calcolare la \mathcal{Z} -trasformata $X(z)$ delle seguenti due successioni numeriche $x(k)$:

$$x(k) = 3k \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{3z}{(z-1)^2}, \quad x(k) = e^{2kT} \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{z}{z - e^{2T}}.$$

9. Nel piano z i luoghi dei punti a coefficiente di smorzamento δ costante

- sono rette uscenti dall'origine sono tratti di spirali verso l'origine
 sono circonferenze centrate nell'origine nessuna delle precedenti risposte

10. Una rete ritardatrice $\frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$ viene inserita in un anello di controllo

- per ridurre gli errori a regime per ingresso a gradino
- per migliorare l'andamento "a regime" del sistema retroazionato
- per migliorare l'andamento "in transitorio" del sistema retroazionato

11. Si consideri il sistema

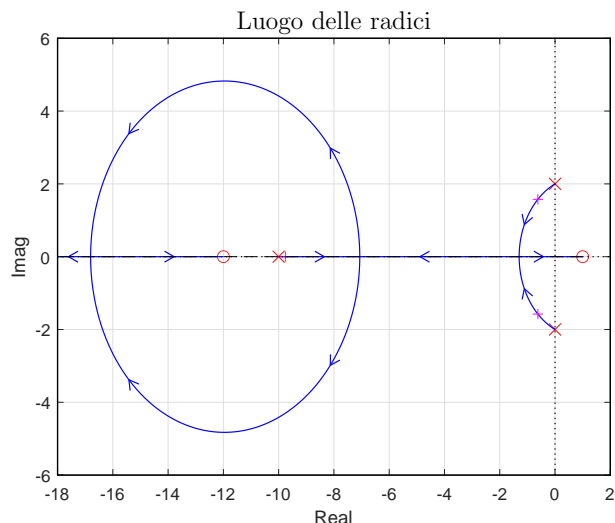
$$G(s) = \frac{(s-1)(s+12)}{(s^2+4)(s+10)}$$

e il corrispondente luogo delle radici rappresentato in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico riportato sopra, calcolare il minimo tempo di assestamento ottenibile al variare di $K > 0$.

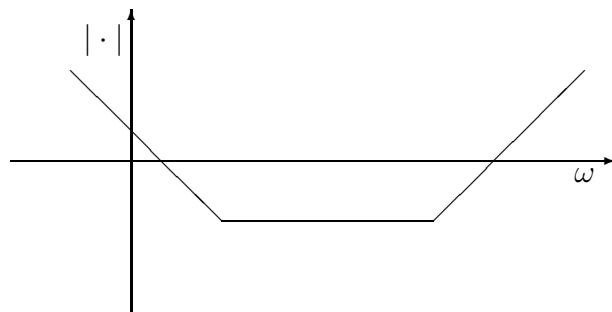
$$\sigma_1 = -1.298, \quad T_a = \frac{3}{|\sigma_1|} = 2.31$$

essendo σ_1 il punto di diramazione più vicino all'asse immaginario.

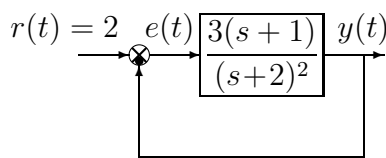


12. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un regolatore standard PID e a fianco disegnare qualitativamente il corrispondente diagramma di Bode dei moduli:

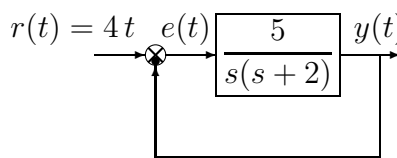
$$G(s) = K \left(1 + T_s s + \frac{1}{T_i s} \right)$$



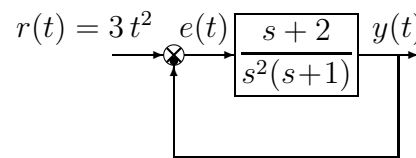
13. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



$$e(\infty) = \frac{2}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{8}{7} = 1.143$$



$$e(\infty) = \frac{8}{5} = 1.6$$



$$e(\infty) = \frac{6}{2} = 3$$

14. Indicare quale dei seguenti sistemi discreti $G(z)$ tende a zero "più lentamente":

- $G(z) = \frac{1}{z(z+0.6)}$
- $G(z) = \frac{1}{z(3z-1)}$
- $G(z) = \frac{1}{z(z+0.8)}$
- $G(z) = \frac{1}{z(z-0.4)}$

15. Posto $T = 0.2$, calcolare il tempo di assestamento T_a della risposta impulsiva $g(k)$ del sistema discreto $G(z) = \frac{z}{z-0.5}$:

$$T_a = \frac{3}{\frac{1}{T} |\ln(0.5)|} = \frac{0.6}{|\ln(0.5)|} = 0.8656$$

16. Sia $X(z) = \mathcal{Z}[x(k)]$. Enunciare il teorema della traslazione "in anticipo" nel tempo:

$$\mathcal{Z}[x(t+nT)] = z^n [X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}]$$