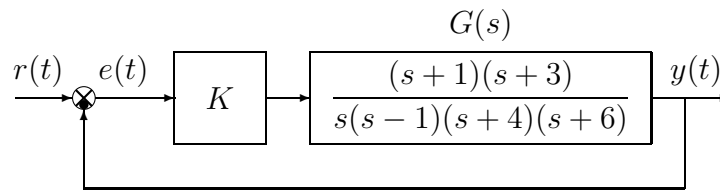


Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



a.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione “solo in modo qualitativo”.

Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1 G_1(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + K \frac{(s+1)(s+3)}{s(s-1)(s+4)(s+6)} = 0$$

dove $K_1 = K$. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ per $K > 0$ è mostrato in Fig. 1. Il luogo delle radici ha due asintoti verticali. Il centro degli asintoti è:

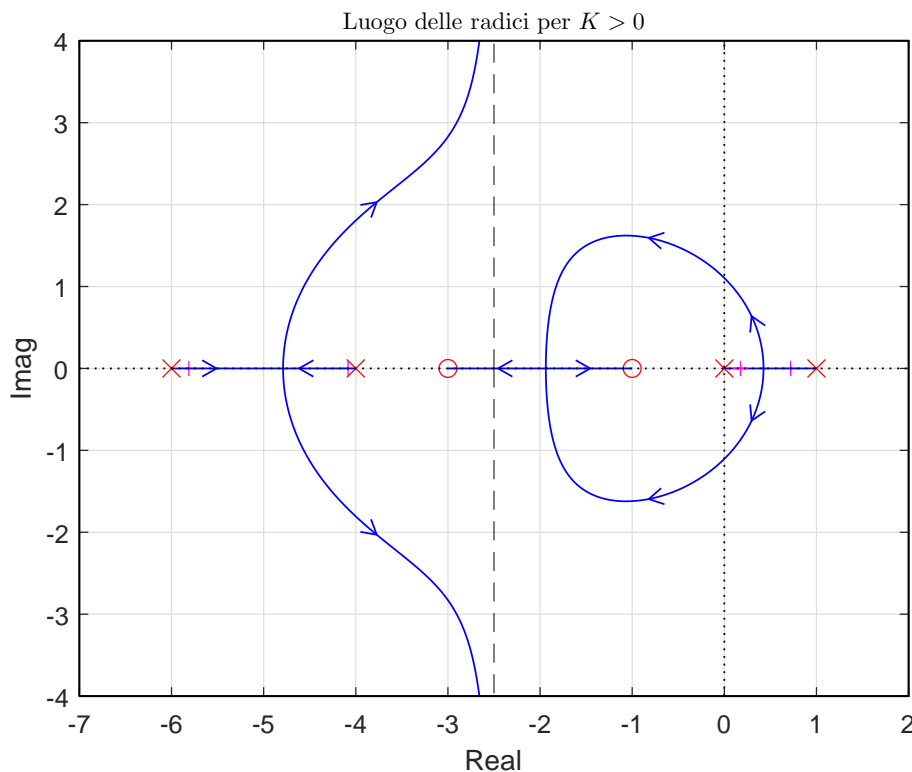


Figura 1: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ per $K > 0$

$$\sigma_a = \frac{1}{2} (-4 - 6 + 1 + 1 + 3) = -\frac{5}{2} = -2.5.$$

a.2) Sia data la seguente funzione di trasferimento $G_3(s)$:

$$G_3(s) = \frac{s+2}{s^2 + (\alpha+2)s + 2\alpha+1}$$

Mostrare graficamente come si muovono sul piano complesso i poli della funzione di trasferimento $G_3(s)$ al variare del parametro $\alpha > 0$. Calcolare il valore α^* a cui corrisponde il minimo tempo di assestamento del sistema $G_3(s)$ alla risposta al gradino.

Soluzione. I poli della funzione di trasferimento $G_3(s)$ coincidono con le radici del polinomio a denominatore:

$$s^2 + (\alpha + 2)s + 2\alpha + 1 = 0$$

che può essere riscritto nel seguente modo equivalente:

$$s^2 + 2s + 1 + \alpha(s + 2) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \alpha \frac{(s + 2)}{(s + 1)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \alpha G_4(s) = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\alpha > 0$ è mostrato in Fig. 2. In questo caso

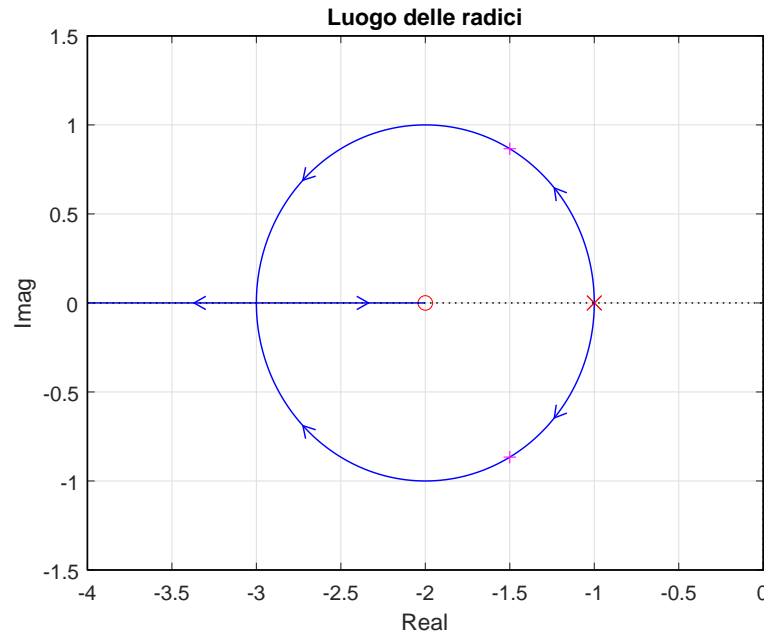


Figura 2: Contorno delle radici del sistema $G_4(s)$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

il contorno delle radici si muove lungo una circonferenza centrata in $z = -2$. Il raggio R della circonferenza è il seguente:

$$R = 1$$

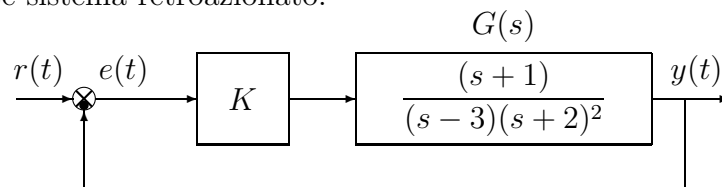
I punti di diramazione σ_1 e σ_2 del contorno delle radici sono:

$$\sigma_1 = -1, \quad \sigma_2 = -3.$$

La condizione di minimo tempo di assestamento si ha in corrispondenza del punto di diramazione $\sigma_1 = -1$ e quindi per il seguente valore del parametro α^* :

$$\alpha^* = - \left. \frac{1}{G_4(s)} \right|_{s=\sigma_2} = - \left. \frac{(s + 1)^2}{(s + 2)} \right|_{s=-3} = 4.$$

a.3) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K^* . Determinare per quale valore di K il sistema retroazionato presenta il minimo tempo di assestamento.

Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K \frac{(s + 1)}{(s - 3)(s + 2)^2} = 0$$

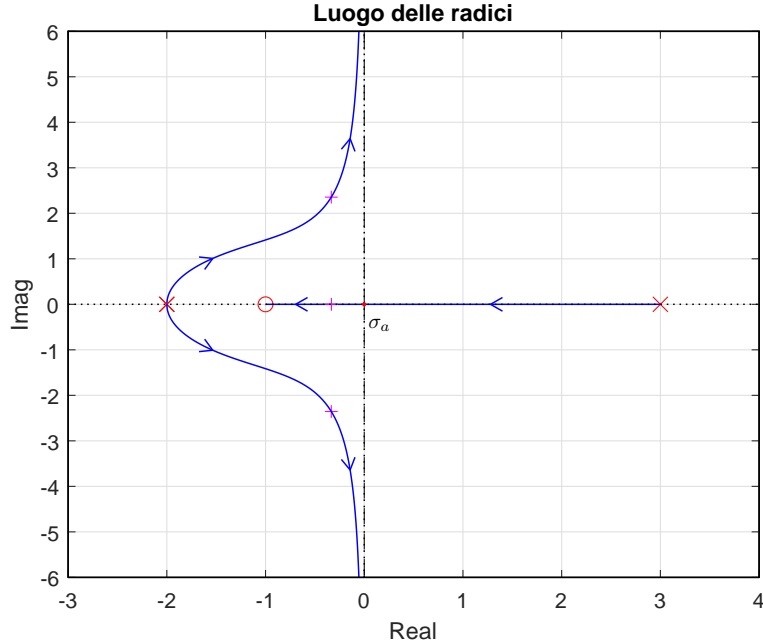


Figura 3: Luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$.

L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$ è mostrato in Fig. 3. Il luogo delle radici ha due asintoti verticali. La posizione σ_a del centro degli asintoti è:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-4 + 1 + 3) = 0.$$

Dal luogo delle radici risulta chiaro che il sistema retroazionato è stabile per:

$$K > K^* = -\frac{1}{G(s)} \Big|_{s=0} = 12$$

e che l'unica intersezione con l'asse immaginario si ha in corrispondenza della pulsazione: $\omega^* = 0$. Lo stesso risultato può essere ottenuto utilizzando il criterio di Routh:

$$1 + K \frac{(s+1)}{(s-3)(s+2)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + s^2 + (K-8)s + (K-12) = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & K-8 \\ 2 & 1 & K-12 \\ 1 & 4 & \\ 0 & K-12 & \end{array}$$

Dalla riga 0 si ottiene:

$$K - 12 > 0 \quad \rightarrow \quad K > 12 = K^*$$

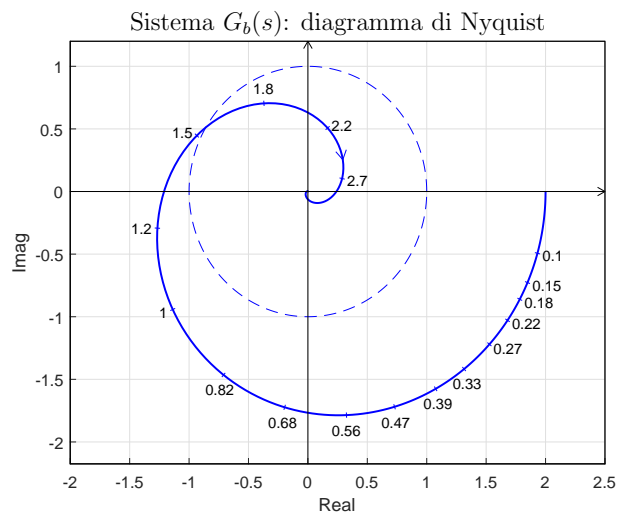
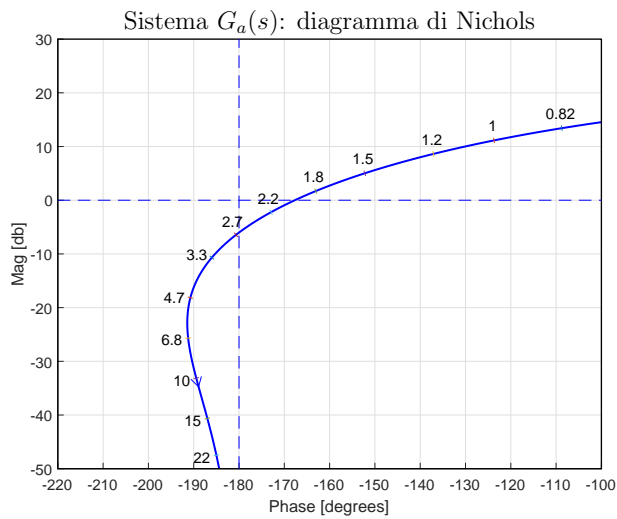
Siccome K^* annulla la riga 0, la corrispondente pulsazione è $\omega^* = 0$. Il sistema retroazionato presenta il minimo tempo di assestamento alla risposta al gradino quando è massima la distanza dei poli della $G(s)$ dall'asse immaginario. In questo caso tale distanza è massima quando i poli sono allineati. L'ascissa σ_0 della condizione di allineamento può essere calcolata utilizzando il teorema del baricentro:

$$3\sigma_0 = \sum_{i=1}^3 p_i = -1 \quad \rightarrow \quad \sigma_0 = -\frac{1}{3} = -0.3333$$

Il valore K_0 a cui corrisponde minimo tempo di assestamento è il seguente:

$$K_0 = -\frac{1}{G_1(s)} \Big|_{s=\sigma_0} = 13.888.$$

b) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi $G_a(s)$ e $G_b(s)$:



b.1) Per il sistema $G_a(s)$ progettare una rete anticipatrice in grado di garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = 50^\circ$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. La posizione del punto $B = M_B e^{j\varphi_B}$ è completamente determinata dalla specifica di progetto: $M_B = 10$ db e $\varphi_B = -130^\circ$. La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 4. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione

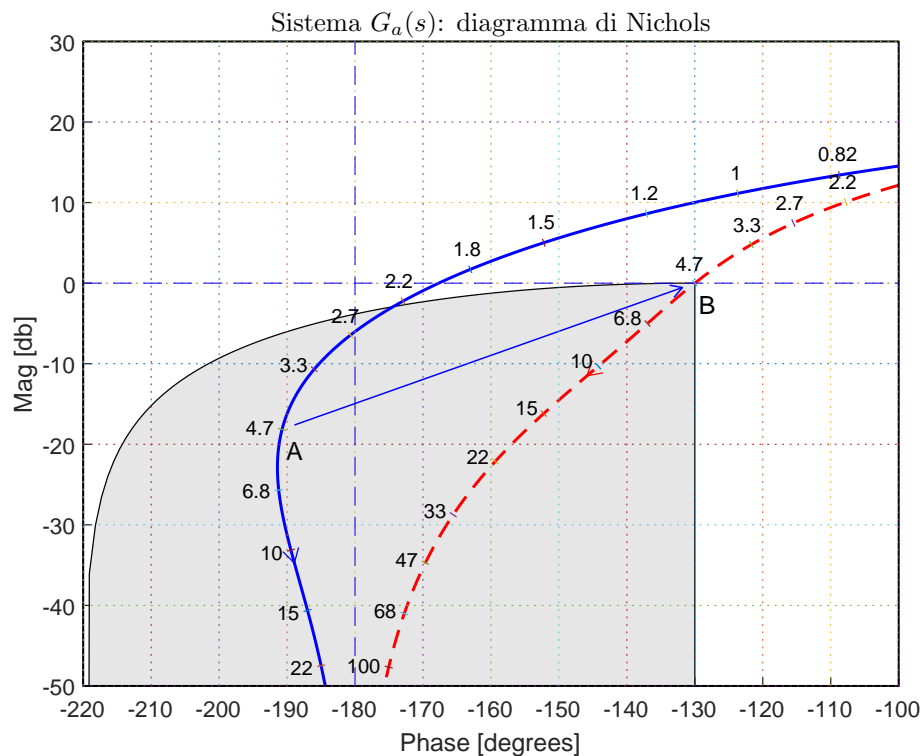


Figura 4: Diagrammi di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$.

$\omega_A = 4.7$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.1237, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -190.7^\circ.$$

Sostituendo i valori di M , φ e ω all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 1.852$ e $\tau_2 = 0.08905$ della rete correttiva $C_1(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 8.084, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 60.7^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 1.852s)}{(1 + 0.08905s)}.$$

Il diagramma di Nyquist delle funzioni $G_a(s) C_1(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

Sintesi della rete correttrice $C_1(s)$ per alcuni valori della pulsazione ω_A :

$$\begin{aligned} \omega_A &= [2.7 \quad 3.3 \quad 4.7 \quad 6.8 \quad 10 \quad 15 \quad 22] \\ M_A &= [0.4761 \quad 0.2922 \quad 0.1237 \quad 0.0519 \quad 0.0220 \quad 0.0093 \quad 0.0042] \\ \varphi_A &= [179.3 \quad 174 \quad 169.3 \quad 168.8 \quad 170.6 \quad 173 \quad 175] \\ M &= [2.1 \quad 3.422 \quad 8.084 \quad 19.23 \quad 45.39 \quad 107.4 \quad 236.7] \\ \varphi &= [50.66 \quad 56 \quad 60.74 \quad 61.23 \quad 59.43 \quad 56.99 \quad 55] \\ \tau_1 &= [0.7022 \quad 1.046 \quad 1.852 \quad 3.146 \quad 5.213 \quad 8.498 \quad 13.1] \\ \tau_2 &= [0.0755 \quad 0.0975 \quad 0.0890 \quad 0.0720 \quad 0.0565 \quad 0.0425 \quad 0.0316] \end{aligned}$$

b.2) Per il sistema $G_b(s)$, progettare una rete correttrice $C(s)$ in grado di garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_a = 5$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. La specifica sul margine di ampiezza $M_a = 5$ definisce completamente la posizione del punto $B = M_B e^{j\varphi_B}$:

$$M_B = \frac{1}{M_a} = 0.2, \quad \varphi_B = -180^\circ$$

La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 5.

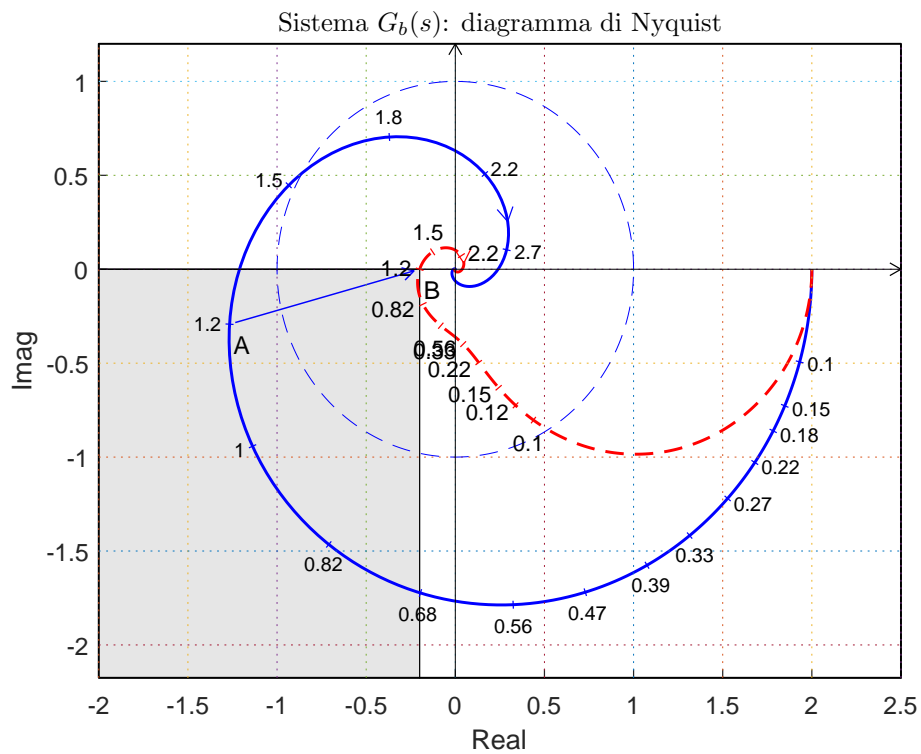


Figura 5: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)G_b(s)$.

Il punto $A = G_b(j\omega_A)$ scelto per la sintesi della rete correttrice è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 1.2$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 1.3, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -167^\circ.$$

Sostituendo i valori di M , φ e $\omega = \omega_A$ all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 3.038$ e $\tau_2 = 20.46$ della rete correttrice $C_2(s)$:

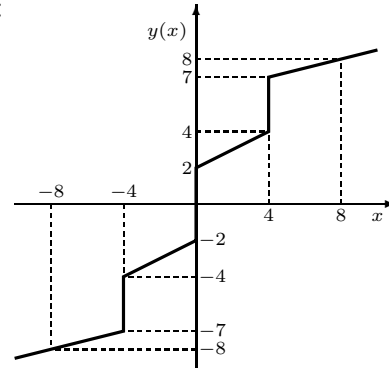
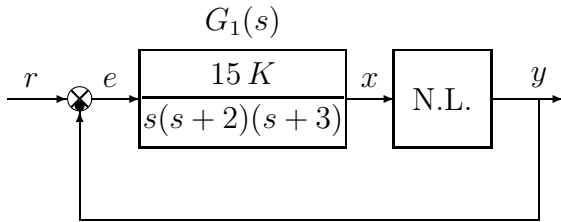
$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.1539, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -13^\circ \quad \rightarrow \quad C_2(s) = \frac{(1 + 3.038 s)}{(1 + 20.46 s)}.$$

Il diagramma di Myquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

Sintesi della rete correttiva $C_2(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A :

$$\begin{aligned} \omega_A &= [0.82 & 1 & 1.2] \\ M_A &= [1.628 & 1.477 & 1.3] \\ \varphi_A &= [-115.9 & -140.4 & -167] \\ M &= [0.1229 & 0.1354 & 0.1539] \\ \varphi &= [-64.15 & -39.64 & -13.01] \\ \tau_1 &= [0.4244 & 0.9949 & 3.038] \\ \tau_2 &= [10.44 & 10.37 & 20.46] \end{aligned}$$

c) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:



c.1) Posto $K = 1$, determinare per quali valori r_1 ed r_2 dell'ingresso r i punti di lavoro del sistema retroazionato sono posizionati in $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e in $(x_1, y_1) = (-2, -3)$.

Soluzione. Il sistema $G_1(s)$ è di tipo 1 per cui si ha: $K_1 = \infty$, $K_2 = 1$ e $K_3 = 1$. La retta di carico della parte lineare del sistema è una retta orizzontale di ordinata:

$$y = \frac{r}{K_2 K_3} = r \quad \rightarrow \quad r_0 = 0, \quad r_1 = -3.$$

c.2) Posto $K = 1$ ed utilizzando il criterio del cerchio, dire se il sistema retroazionato è stabile o meno nell'intorno del punto $(x_1, y_1) = (-2, -3)$.

Soluzione. Le pendenze α e β delle due rette che centrate nel punto $(x_1, y_1) = (-2, -3)$

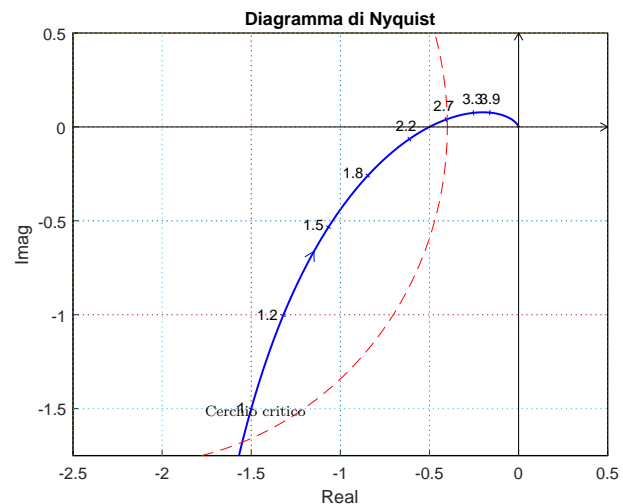
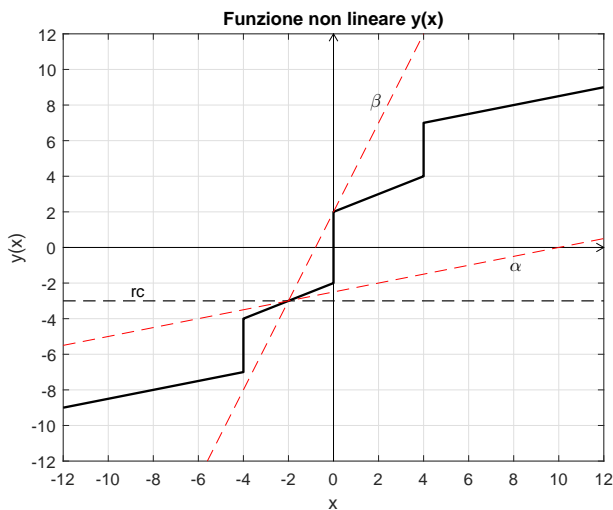


Figura 6: Settore che racchiude la non linearità e cerchio critico.

racchiudono a settore tutta la non linearità sono le seguenti:

$$\alpha = \frac{1}{4} = 0.25, \quad \beta = \frac{5}{2} = 2.5.$$

Il cerchio critico interseca il semiasse reale negativo nei punti:

$$-\frac{1}{\alpha} = -4, \quad -\frac{1}{\beta} = -\frac{2}{5} = 0.4.$$

Il margine di ampiezza K_1^* e la pulsazione ω_1^* della funzione $G_1(s)$ si determinano utilizzando il criterio di Routh:

$$G_1(s) = \frac{15}{s(s+2)(s+3)} \quad \rightarrow \quad K_1^* = 2, \quad \omega_1^* = \sqrt{6} = 2.4495.$$

Essendo $K_1^* < \beta$, il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ interseca il cerchio critico e quindi, in base al criterio del cerchio, non si può affermare nulla sulla stabilità del sistema retroazionato.

- c.3) Fornire l'espressione esatta della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità $y(x)$ nell'intorno del punto $(0, 0)$ per $X \leq 4$. Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ per $X > 0$. Utilizzare le variabili m_1, m_2, \dots per rappresentare gli eventuali valori minimi e massimi "non noti" della funzione $F(X)$.

Soluzione. L'espressione esatta della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità $y(x)$ nell'intorno del punto $(0, 0)$ per $X \leq 4$ è la seguente:

$$F(X) = \frac{8}{\pi X} + \frac{1}{2}$$

L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ è mostrato in Fig. 7. Indichiamo con m_1 il minimo locale della funzione $F(X)$ nel punto $X = 4$:

$$m_1 = F(X)|_{X=4} = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2} = 1.1366.$$

Indichiamo inoltre con $m_2 = 1.452$ il massimo locale nell'intorno di $X \simeq 4.7$ e con m_3 il valore finale a cui tende la funzione $F(X)$ per $X \rightarrow \infty$:

$$m_3 = F(X)|_{X \rightarrow \infty} = 0.25.$$

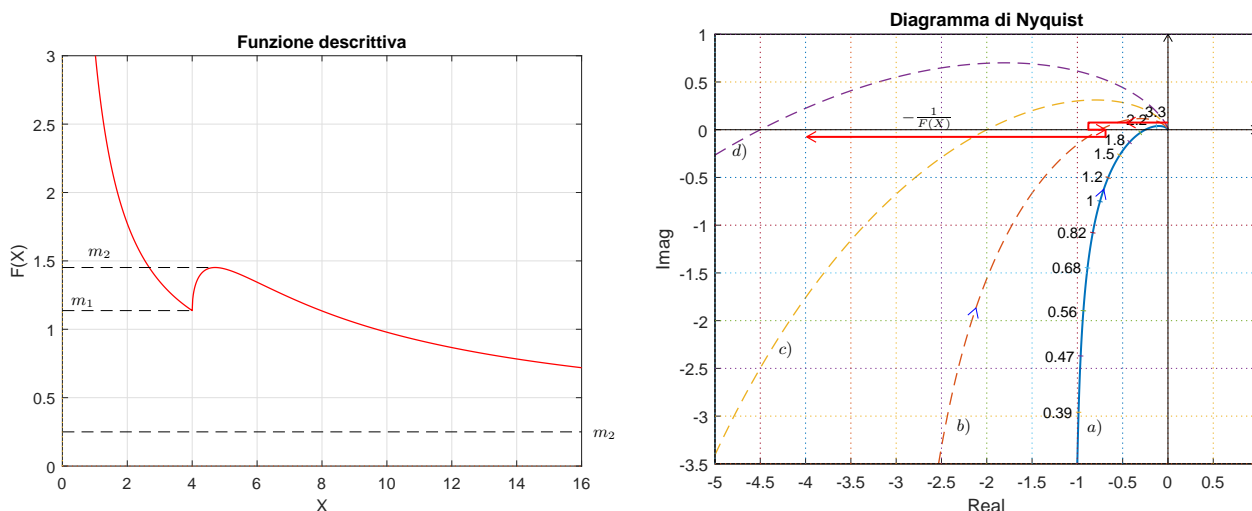


Figura 7: Funzione descrittiva $F(X)$ e discussione grafica.

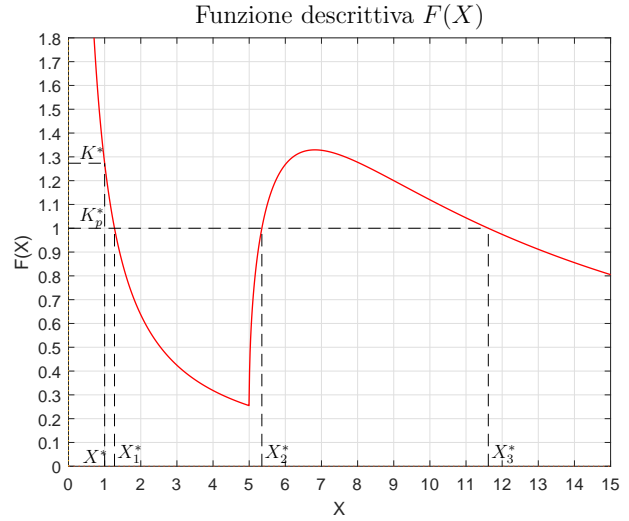
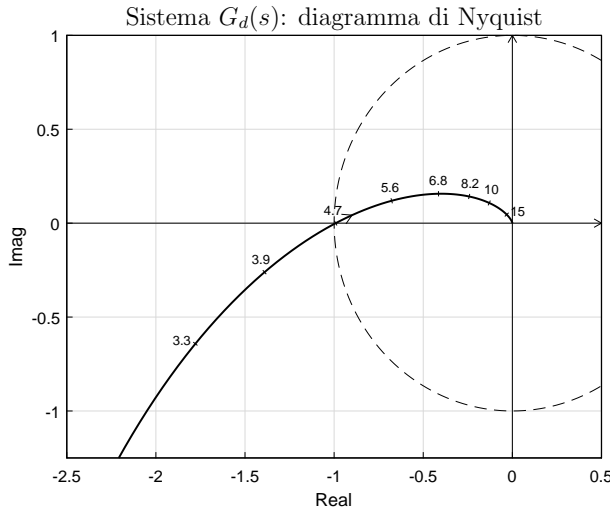
- c.4) Discutere "qualitativamente", in funzione dei parametri m_1, m_2, \dots , l'esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno $K > 0$.

Soluzione. Per $K = 1$, il margine di ampiezza K_1^* del sistema $G_1(s)$ è $K_1^* = 2$. Per $K \neq 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $K G_1(s)$ è $K^* = \frac{2}{K}$. Al variare di K^* si possono avere le seguenti condizioni dinamiche per sistema retroazionato:

- Per $K^* > m_2$ il diagramma di Nyquist della funzione $G_1(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile.
- Per $m_1 < K^* < m_2$, il diagramma di Nyquist della funzione $G_1(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in tre punti a cui corrispondono due cicli limite stabili (quelli esterni) e un ciclo limite instabile (quello intermedio).

- c) Per $m_3 < K^* < m_1$ il diagramma di Nyquist della funzione $G_1(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile.
- d) Per $K^* < m_3$, la funzione $-1/F(X)$ è tutta interna al diagramma polare completo della funzione $G(s)$ per cui non vi sono cicli limite e il sistema retroazionato è instabile.

d) Sia dato il diagramma di Nyquist di un sistema $G_d(s)$ posto in retroazione negativa su di una non linearità $y = y(x)$ di cui viene fornita la funzione descrittiva $F(X)$.



Nei limiti della precisione dei grafici forniti, determinare l'ampiezza X^* , la pulsazione ω^* e la stabilità degli eventuali cicli limite presenti nel sistema retroazionato.

Sol. Dal diagramma di Nyquist della funzione $G_d(s)$ si può leggere chiaramente il margine di ampiezza K_1^* del sistema e la pulsazione ω_1^* di attraversamento del semiasse reale negativo:

$$K_1^* \simeq 1, \quad \omega_1^* = 4.7.$$

Gli eventuali cicli limite si determinano imponendo $F(X) = K_1^*$. Utilizzando il grafico della funzione $F(X)$ si individuano tre cicli limite:

$$X_1^* \simeq 1.27, \quad X_2^* \simeq 5.35, \quad X_3^* \simeq 11.62$$

il primo e il terzo stabili e il secondo instabile. La pulsazione ω^* di tutti e tre i cicli limite è $\omega_1^* = 4.7$.

e) Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare, discretizzare il seguente sistema tempo-continuo:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s+2)}{(s+3)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.2$.

Soluzione. Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare si ottiene:

$$D(z) = \left. \frac{(s+2)}{(s+3)} \right|_{s=\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}} = \frac{2T+2+(2T-2)z^{-1}}{3T+2+(3T-2)z^{-1}}$$

Sostituendo $T = 0.2$ si ottiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{2.4 - 1.6 z^{-1}}{2.6 - 1.4 z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze ha la forma seguente:

$$m_k = \frac{1}{2.6} [1.4 m_{k-1} + 2.4 e_k - 1.6 e_{k-1}]$$

cioè:

$$m_k = 0.53846 m_{k-1} + 0.92308 e_k - 0.61538 e_{k-1}$$

f) Partendo da condizioni iniziali nulle, calcolare la risposta $y(n)$ della seguente equazione alle differenze:

$$y(n+1) = -0.6y(n) + 7x(n)$$

quando in ingresso è presente il gradino unitario $x(n) = 1$.

Soluzione. L'equazione alle differenze genera la seguente funzione discreta $G(z)$:

$$y(n+1) + 0.6y(n) = 7x(n) \quad \leftrightarrow \quad G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{7}{z+0.6}.$$

La \mathcal{Z} -trasformata del segnale di ingresso $x(n) = 1$ è:

$$X(z) = z/(z-1).$$

La \mathcal{Z} -trasformata $Y(z)$ del segnale di uscita è quindi la seguente:

$$Y(z) = G(z)X(z) = \frac{7z}{(z+0.6)(z-1)}.$$

Mediante il metodo della scomposizione in fratti semplici si ricava:

$$Y(z) = z \left[\frac{7}{(z-1)(z+0.6)} \right] = z \left[\frac{4.375}{(z-1)} - \frac{4.375}{(z+0.6)} \right]$$

e quindi:

$$Y(z) = \frac{4.375z}{(z-1)} - \frac{4.375z}{(z+0.6)} \quad \rightarrow \quad y(n) = 4.375 [1 - (-0.6)^n].$$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono corrette.

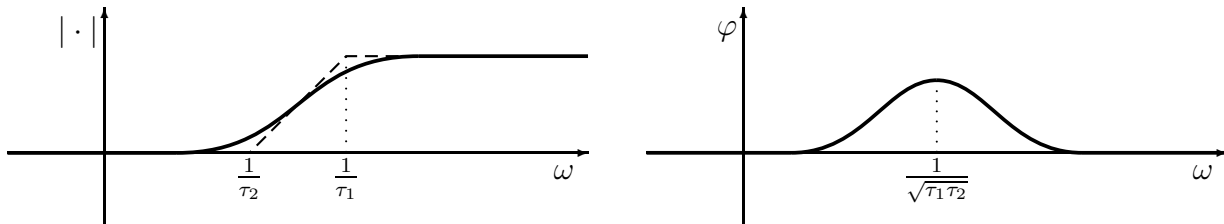
1. Scrivere la funzione di trasferimento discreta $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ corrispondente alla seguente equazione alle differenze:

$$y_{n+3} + 4y_{n+2} + 5y_{n+1} + 3y_n = 7x_{n+2} + 2x_{n+1} \quad \rightarrow \quad G(z) = \frac{7z^2 + 2z}{z^3 + 4z^2 + 5z + 3}$$

2. Sia $G(z)$ la \mathcal{Z} -trasformata della successione numerica $g(k)$. Scrivere gli enunciati dei teoremi del valore iniziale e del valore finale:

$$g(0) = g(k)|_{k=0} = \lim_{z \rightarrow \infty} G(z), \quad g(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})G(z).$$

3. Tracciare i diagrammi di bode (moduli e fasi) di una rete anticipatrice $C(s) = \frac{(1+\tau_1 s)}{(1+\tau_2 s)}$, ($\tau_1 > \tau_2$):



4. Fornire l'enunciato del Teorema del baricentro: *La somma dei poli del sistema ottenuto chiudendo in retroazione un sistema dinamico descritto da una funzione di trasferimento $G(s)$ razionale fratta con ...*

polinomio a denominatore di grado superiore di almeno due a quello del polinomio a numeratore è indipendente dal valore del guadagno statico di anello e dalle posizioni degli zeri ed è uguale alla somma dei poli del sistema ad anello aperto.

5. In un sistema discreto a segnali campionati, qual è il legame che lega la variabile discreta z e la variabile s di Laplace?

$$z = e^{sT}.$$

6. Scrivere la funzione di trasferimento $H_0(s)$ del ricostruttore di ordine 0:

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}.$$

7. Calcolare la soluzione $y(n)$ della seguente equazione alle differenze a partire dalla condizione iniziale $y(0) = y_0$:

$$y(n+1) + 0.4y(n) = 0 \quad \rightarrow \quad y(n) = y_0 (-0.4)^n.$$

8. Calcolare la \mathcal{Z} -trasformata $X(z)$ delle seguenti due successioni numeriche $x(k)$:

$$x(k) = 3k \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{3z}{(z-1)^2}, \quad x(k) = e^{2kT} \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{z}{z - e^{2T}}.$$

9. Nel piano z i luoghi dei punti a coefficiente di smorzamento δ costante

- sono rette uscenti dall'origine sono tratti di spirali verso l'origine
 sono circonferenze centrate nell'origine nessuna delle precedenti risposte

10. L'uso di un regolatore standard di tipo PI è consigliato:

- Se si desidera introdurre un anticipo di fase
- Se si desidera amplificare alle basse frequenze
- Se si desidera introdurre un ritardo di fase alle alte frequenze
- Se si desidera avere errore a regime nullo per ingresso a gradino

11. Si consideri il sistema

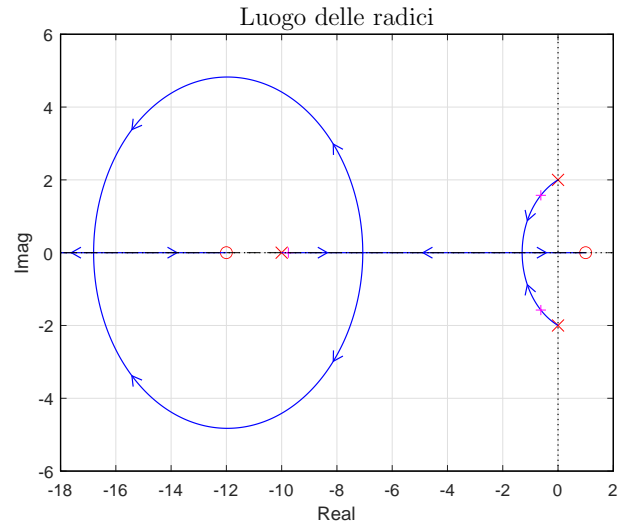
$$G(s) = \frac{(s - 1)(s + 12)}{(s^2 + 4)(s + 10)}$$

e il corrispondente luogo delle radici rappresentato in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico riportato sopra, calcolare il minimo tempo di assestamento ottenibile al variare di $K > 0$.

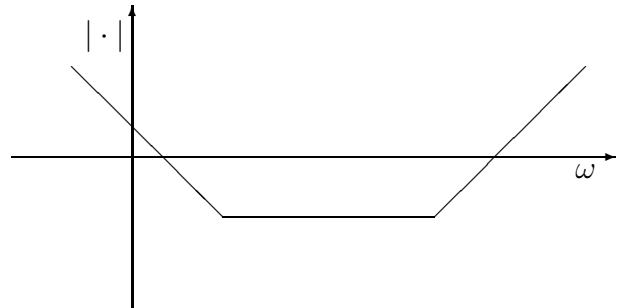
$$\sigma_1 = -1.298, \quad T_a = \frac{3}{|\sigma_1|} = 2.31$$

essendo σ_1 il punto di diramazione più vicino all'asse immaginario.

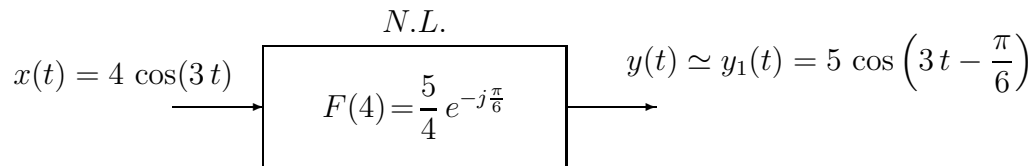


12. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un regolatore standard PID e a fianco disegnare qualitativamente il corrispondente diagramma di Bode dei moduli:

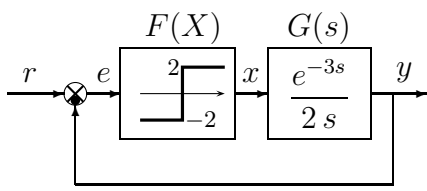
$$G(s) = K \left(1 + T_s s + \frac{1}{T_i s} \right)$$



13. Sia $y_1(t) = 5 \cos(3t - \frac{\pi}{6})$ la fondamentale del segnale periodico $y(t)$ che si ha all'uscita del blocco non lineare N.L. sollecitato in ingresso dal segnale periodico $x(t) = 4 \cos(3t)$. Calcolare il valore della funzione descrittiva $F(X)$ in corrispondenza del valore $X = 4$:



14. Sia dato il sistema retroazionato riportato qui sotto. Calcolare:



a) il margine di stabilità K^* del sistema $G(s)$:

$$K^* = 2 \frac{\pi}{2t_0} = \frac{\pi}{3} = 1.0472$$

b) L'intersezione σ_0 della funzione $G(j\omega)$ con il semiasse reale negativo:

$$\sigma_0 = -\frac{1}{K^*} = -\frac{3}{\pi} = -0.9549$$

c) la Funzione descrittiva $F(X)$ del relé ideale:

$$F(X) = \frac{8}{\pi X}$$

d) la pulsazione ω^* dell'oscillazione autosostenuta presente all'interno del sistema retroazionato:

$$\omega^* = \frac{\pi}{2t_0} = \frac{\pi}{6} = 0.5236$$

e) l'ampiezza X^* dell'oscillazione autosostenuta presente all'interno del sistema retroazionato:

$$F(X^*) = K^* \quad \rightarrow \quad X^* = \frac{24}{\pi^2} = 2.4317$$